Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL. 24 de mayo de 2011

NOMBRE: ____________________ CÓDIGO: ____________

PROFESOR: ____________________ GRUPO: ____________

1. .

(a) Sea π el plano que contiene los puntos $P(1,2,-5)$, $Q(1,3,4)$ y $R(2,4,7)$.

i. (4 puntos) Escriba la ecuación del plano π.

ii. (2 puntos) Determine si el punto $S(1,2,3)$ pertenece al plano π.

iii. (3 puntos) Encuentre otro punto del plano π, distinto de los ya mencionados.

(b) (7 puntos) Decimos que dos rectas se **cruzan** si no son paralelas ni se interceptan. Muestre que las dos rectas siguientes se cruzan:

$$l_1 : x = 1+4t, \quad y = 2+5t, \quad z = 3+3t$$

$$l_2 : x = 2+h, \quad y = 1-3h, \quad z = -1-2h$$

(c) (4 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que resulta de la intersección de los planos

$$\pi_1 : x - y + z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_2 : 2x + y + z = -1.$$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) (4 puntos) Encuentre los valores propios de A.

(b) (6 puntos) Sabiendo que el polinomio característico de A es $p(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$, encuentre los valores propios de A asociados a cada valor propio λ.

(c) (10 puntos) Encuentre una matriz ortogonal $\mathbf{P}$ y una matriz diagonal $\mathbf{D}$ tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}A\mathbf{P}$.

3. Sea $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ una transformación lineal definida por $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x-2y+z \\ x-z \\ 2x+y \\ z \end{bmatrix}$.

(a) (4 puntos) Encuentre la matriz de la transformación lineal L referida a las bases canónicas.

(b) (8 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L y una base para la imagen de L .

(c) (4 puntos) ¿L es inyectiva? ¿L es sobreyectiva? Justifique sus respuestas.

(d) (4 puntos) ¿(2,2,0) pertenece al Núcleo de L? ¿(3,1,2,0) pertenece a la Imagen de L? Justifique sus respuestas.

4. (10 puntos) Seleccione y responda una (solo una) de las preguntas siguientes:

   (a) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos $(1,1)$, $(5,2)$ y $(7,-1)$.

   (b) Identifique la cónica y encuentre una forma cuadrática $h(x,y)$ equivalente a la forma cuadrática $g(x,y) = 13x^2 - 8xy + 7y^2 = 45$.

5. (20 puntos) Determine el valor de verdad de las proposiciones siguientes. Justifique su respuesta en cada caso:

   (a) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\vec{u} - \vec{v}$ es una solución para el sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (b) $S = \{(1,2,3), (1,0,1)\}$ es una base para el subespacio $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Si A y B son matrices 2×2 no singulares (invertibles), entonces $A - B$ es una matriz no singular.

   (d) Si $A \in M_{4\times 4}$ y $|A| = -2$, entonces $|-A| = 2$.

6. (10 puntos) Seleccione dos (solamente dos) de las proposiciones siguientes y realice sus respectivas demostraciones.

   (a) Si $L: \mathbf{R}^7 \to \mathbf{R}^5$ es una transformación lineal con $nulidad\,(L) = 2$, entonces L es sobreyectiva.

   (b) Si A es una matriz de $n \times n$ diagonalizable y $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1} A\, \mathbf{P}$, entonces $|\mathbf{D}| = 0$.

   (c) Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, entonces $\cos\theta = \pm 1$.