UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DE UNA VARIABLE. 20 de noviembre de 2008

NOMBRE:_____ CÓDIGO:_____

PROFESOR:_____ GRUPO:_____

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. (18 puntos)

   a) Si $f(x) = \arctan(\frac{x}{x+1})$, calcule $f'(0)$

   b) Si $f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^x$, Calcule $f'(x)$.

2. (18 puntos) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{i) } \int_0^1 e^x (2x-1)^2\, dx \qquad \text{ii) } \int_0^4 \frac{x^2 - 5x - 4}{(x^2+1)(x-3)}\, dx$$

3. (22 puntos)

   a) Calcule el área de la región del primer cuadrante acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = 2 - x^2$ y $y = 0$.

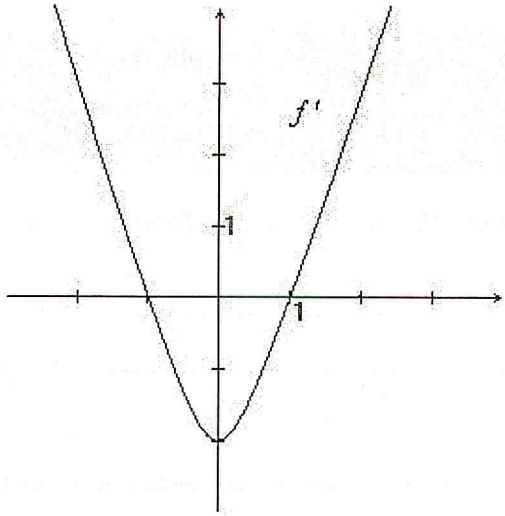
   b) Considere la región R acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x + 2$, y $y = x^2 - 4$. Escriba una expresión integral que represente el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región R alrededor de la recta $x = 4$. No evalúe la integral .

4. (14 puntos) Resuelva uno (**solamente uno**) de los siguientes problemas:

   a) Un globo asciende verticalmente a razón de 3 m/seg desde un punto del suelo distante 30m de un observador. Calcule el ritmo de cambio del ángulo de elevación del globo con respecto al observador, cuando el globo está a una altura de 30m.

   b) ¿Cuál es el área más grande que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud L?

5. (12 puntos) La siguiente figura ilustra la gráfica de la derivada f' de una función f



Utilice esta información para responder lo siguiente (especifique las suposiciones que considere necesario hacer para elaborar sus respuestas)

a) Determine los intervalos donde la función f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.

b) Determine los intervalos donde la función f es cóncava hacia arriba y los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.

c) Identifique los extremos de f, si los hay.

d) Elabore una gráfica posible de la función f.

6. (36 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es cierto o falso. Justifique claramente su respuesta.

a) La función $f(x) = |x|$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[-1, 1]$

b) Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, entonces f es derivable en $x = 2$.

c) La gráfica de la curva representada por $3(x^2 + y^2)^2 = 10(x^2 - y^2)$ tiene una tangente horizontal en el punto (4,2).

d) $\displaystyle\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$

e) Si $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$

f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{1+t}{2+t}\,dt}{x} = \frac{1}{2}$