Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES. Grupo 21 Profesor: Hendel Yaker A.

QUIZ No. 04 27 de octubre de 2010

1. Considere la función $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ definida en el semidisco
$$\mathbf{D} = \left\{(x,y)\,|\,x^2 + (y-1)^2 \leq 1;\ x \geq 0\right\}.$$
   (a) (10 puntos) Encuentre los extremos absolutos de de la función en el semidisco. Debe utilizar multiplicadores de Lagrange en el análisis de la frontera.
   (b) (6 puntos) Aplique el criterio de las segundas derivadas a uno de los puntos críticos, para corroborar si se trata de un extremo relativo.

2. (10 puntos) Para cada uno de los casos siguientes escriba un sistema de Lagrange que permita resolver el respectivo problema de optimización. Debe identificar claramente la función objetivo y la restricción (o restricciones). No resuelva el sistema.
   (a) Mostrar que la caja rectangular de volumen máximo inscrita en una esfera de radio r es un cubo.
   (b) Encontrar el punto de la curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y $x + 2z = 4$ que esté más cerca del origen.

3. (30 puntos)
   (a) Escriba como una sola integral doble la suma de integrales $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2-\sqrt{2y+4}}^{2+\sqrt{2y+4}} dx\,dy + \int_{0}^{6}\int_{y}^{2+\sqrt{2y+4}} dx\,dy.$
   Explique el significado geométrico de esta integral (NO la evalúe).
   (b) Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \sin x^2\,dx\,dy.$
   (c) Evalúe la integral $I = \displaystyle\iint_R f(x,y)\,dA,$ que representa el área de la región plana R limitada por las gráficas de las ecuaciones $x = \sqrt{y}$, $x = 6 - y$ y $x = 0$.

4. (Opcional. 10 puntos) Sea f una función derivable. Muestre que la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ es:
$$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

NOTA: Se califica sobre 50 puntos.