UNIVERSIDAD ICESI — Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemáticas y Estadística

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES.

SUPLETORIO DEL SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 25 de abril de 2009

1. (12 puntos)

   (a) Si las ecuaciones $ux + vy = uv$ y $uy - vx = -uv$ definen a u y v como funciones de x y y, encuentre $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ usando derivación implícita.

   (b) Si $z = f(x/y)$, donde f es una función derivable tal que $f'(2) = 1$ y $f''(2) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2,1)$

   (c) Muestre que la función $z = \dfrac{1}{2}(e^y - e^{-y})\text{sen}x$ satisface la ecuación: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

2. (9 puntos)

   (a) Halle una ecuación de la superficie que consiste en el conjunto de todos los puntos tales que su distancia al plano $y = -2$ es la mitad de su distancia al punto (0,2,0). Identifique la superficie.

   (b) Muestre que la curva parametrizada por la función $\mathbf{r}(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}, e^{-t}\text{sen}t,)$ se encuentra sobre un cono de eje principal $\mathbf{y}$.

   (c) Dibuje la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 2$ y $z = 0$

3. (8 puntos) Considere la curva parametrizada por la función $\mathbf{r}(t) = (2\text{sen}t, 2\cos t, 4\text{sen}^2 t)$

   (a) Identifique y dibuje dos superficies que contengan a la curva. Haga un bosquejo gráfico de la curva, indicando la dirección en que la dibuja.

   (b) Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el punto $(1, \sqrt{3}, 1)$.

4. (9 puntos) Considere la función $g(x,y) = e^{1-x^2+y^2}$

   (a) Dibuje un mapa de contorno de g, identificando en particular la curva que pasa por el punto $(3, 2\sqrt{2})$

   (b) Utilice propiedades del gradiente de g para encontrar la ecuación de la recta tangente en $(3, 2\sqrt{2})$ a la curva de nivel.

   (c) Halle el valor de la máxima razón de cambio de g en $(3, 2\sqrt{2})$

5. (12 puntos)

   (a) Considere la función definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{|x| + |y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 1$. Analice la continuidad de f en $(0,0)$.

   (b) Si $g(x,y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$, calcule $g_{xy}(0,0)$.