



EXAMEN FINAL DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES. 20 de mayo de 2009

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

PROFESOR: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

**NOTA:** el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **112** puntos. SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

1. (20 puntos)

(a) Utilice integración para deducir la serie de Maclaurin de la función  $f(x) = \arctan x$ . Verifique que  $x = 1$  está en el intervalo de convergencia de dicha serie y utilice los primeros cuatro términos de la serie para aproximar el valor de  $\arctan(1)$ .

(b) Escriba los tres primeros términos de una serie de potencias que aproxime el valor de la integral  $\int_0^1 \frac{\sin t^2}{t^2} dt$ . Indique cuál es el orden del error que se comete con esta aproximación.

2. (20 puntos)

(a) Cuando  $t = 0$  un objeto está en el punto  $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  y tiene un vector velocidad  $\mathbf{v}(0) = 3\mathbf{j}$ . El objeto se mueve con aceleración  $\mathbf{a}(t) = -2 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}$ . Justifique por qué se puede concluir que la trayectoria del objeto es una elipse.

(b) Demuestre que si un objeto se mueve con rapidez constante entonces sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

3. (18 puntos) Considere la función  $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$

(a) Identifique y dibuje el dominio de  $f$  y la gráfica de  $f$ .

(b) Dibuje un mapa de contorno de  $f$ , identificando en particular la curva que pasa por el punto  $(2, 8)$

(c) Utilice propiedades del gradiente de  $f$  para encontrar la ecuación de la recta tangente en  $(2, 8)$  a la curva de nivel.

4. (24 PUNTOS)

(a) Encuentre los puntos de la esfera de centro en el origen y radio 2 que están más cerca y más lejos del punto  $P(3, 1, -1)$ .

(b) Sea  $w = f(x, y)$ , donde  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Determine si se satisface la ecuación

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

(Sugerencia: usando regla de la cadena calcule las cantidades  $\partial w / \partial r$  y  $\partial w / \partial \theta$  y luego construya la parte derecha de la igualdad)

5. (30 puntos)

(a) Calcule la integral  $\int_0^3 \int_{3y}^9 e^{x^2} dx dy$

(b) Convierta la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evalúe la integral iterada más sencilla (debe dibujar el dominio de integración):

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} (x^2 + y^2)^{3/2} dz dy dx$$

(c) Utilice un cambio adecuado de variables para evaluar la integral  $\iint_R \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$  donde  $R$  es la región plana acotada por  $x = 0$ ,  $y = 0$  y  $x + y = 1$ .