ISSN: 2323-0223

TRABAJOS ACADÉMICOS en Finanzas de Mercado y Finanzas Corporativas

VALORACIÓN DE OPCIONES

SIMULACIÓN DE MONTECARLO Y BLACK-SCHOLES

Julián Benavides Franco, Ph.D.

DOCUMENTO 2013 – 006

SALÓN BURSÁTIL

Departamento Contable Financiero

UNIVERSIDAD ICESI

www.icesi.edu.co/departamentos/finanzas_contabilidad

TRABAJOS ACADEMICOS EN FINANZAS DE MERCADO Y FINANZAS CORPORATIVAS

ISSN: 2323-0223

2013-006 Cali, Octubre 2013

Frecuencia: Bimestral

Universidad Icesi Facultad Ciencias Administrativas y Económicas
Departamento Contable y Financiero
Teléfono: 5552334
Calle 18 No. 122-135
http://www.icesi.edu.co/departamentos/finanzas_contabilidad/

VALORACIÓN DE OPCIONES
SIMULACIÓN DE MONTECARLO Y BLACK-SCHOLES

Julián Benavides Franco, Ph.D.
jbenavid@icesi.edu.co
Jefe Departamento de Estudios Contables y Financieros
Universidad Icesi (Cali, Colombia)

Resumen:

Esta nota presenta una metodología para valorar opciones mediante simulación de Montecarlo usando las herramientas estándar disponibles en hoja de cálculo. Inicialmente se presentan los fundamentos de la evolución de precios de un activo siguiendo el modelo lognormal. Posteriormente se simula una trayectoria de precios. Finalmente se genera un precio al vencimiento que permite valorar una opción europea. En la parte final se compara este resultado con la fórmula de Black-Scholes.

Abstract:

The note presents a methodology to option valuation using Montecarlo simulation with standard spreadsheet tools. The fundamentals of asset prices under the lognormal process are presented, to simulate price trajectories. Maturity prices are simulated to value standard European options. At the end, the simulation results are compared to option prices obtained with the Black-Scholes formula.

Palabras clave: Opciones, Simulación de Montecarlo, Black-Scholes

Keywords: Options, Montecarlo Simulation, Black-Scholes

JEL Code: G17

Introducción

Este documento expone los fundamentos del proceso lognormal aplicado a los precios de activos financieros, el cual es fundamental en la construcción de un modelo para generar trayectorias de precios y la utilización de la simulación de Montecarlo para estimar el precio de un derivado europeo.

Para hallar el precio de un derivado europeo[1] debemos definir un proceso que determine la evolución de precios del activo subyacente. Es usual considerar que este proceso es el Lognormal. Habiendo definido una trayectoria plausible, se genera un número estadísticamente significativo de trayectorias (con un componente aleatorio) y se evalúa el resultado de la opción al vencimiento para cada trayectoria. Al promediar los valores finales y descontarlos a valor presente se encuentra el valor actual del derivado. La simulación de Montecarlo genera el componente aleatorio requerido, de acuerdo a la distribución estadística que el proceso requiera. El valor resultante se compara con los resultados entregados por las fórmulas de valoración de opciones de Black-Scholes. Los valores obtenidos por los dos métodos son muy cercanos.

1. Proceso Lognormal

El proceso lognormal presupone que el precio de un activo nunca puede ser negativo. El precio del activo tiene una tendencia (normalmente creciente) estable a lo largo del tiempo, sin embargo sus valores puntuales son esencialmente aleatorios.

El supuesto fundamental plantea que la distribución de probabilidad de los retornos continuos es normal, así:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left[\tilde{r}_{\Delta t}\Delta t\right] \qquad (1)$$

Esto implica

$$\tilde{r}_{\Delta t}\Delta t = \ln\left[\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right]$$

Puesto que asumimos que la distribución de $\tilde{r}_{\Delta t}\Delta t$ es normal se tiene:

Distribución de $\tilde{r}_{\Delta t}\Delta t \sim N\left[(\phi - \sigma^2/2)\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right]$

Por lo que podemos re-expresar (1), como:

$$S_{t+\Delta t} = S_t.\exp\left[(\phi - \sigma^2/2)\Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}\right] \text{ con } \tilde{Z} \sim N\left[0,1\right] \qquad (2)$$

[1] Este tipo de derivado no se puede ejercer antes del vencimiento.

Si disponemos de series históricas de los precios de los activos podemos hallar los parámetros ϕ y σ usando las siguientes formulas, que resultan de (2):

$$E\left[ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right] = E\left[(\phi - \sigma^2/2)\Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}\right] = (\phi - \sigma^2/2)\Delta t$$

$$Var\left[ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right] = Var\left[(\phi - \sigma^2/2)\Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}\right] = \sigma^2\Delta t$$

Finalmente se obtiene:

$$\mu = (\phi - \sigma^2/2) = \frac{E\left[\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right]}{\Delta t}\ ;\ \sigma^2 = \frac{Var\left[ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right]}{\Delta t}$$

Sabemos que $\Delta t=T/n$, donde T implica el horizonte sobre el cual se calculan los parámetros y n el número de periodos en el que se divide. T es usualmente igual a un año, tomando el valor de T = 1, por lo que $\Delta t=1/n^*$, n^* puede tomar el valor de 12 (si los datos son mensuales), alrededor de 242 (si los datos son diarios, solo días hábiles), 365 (si los datos son diarios, días calendario), etc.

$$\mu = (\phi - \sigma^2/2) = E\left[\ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right].n^*\ ;\ \sigma^2 = Var\left[ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)\right].n^* \quad (3)$$

Con esta expresión podemos hallar los parámetros de un proceso lognormal para un activo particular con base en los datos históricos y simular series de precios de activos con estos parámetros.

Veamos

1. Cálculo de la media y varianza anualizada:

En la tabla 1 se listan los precios de final de semana y mes del ADR[2] de Ecopetrol y se calcula su retorno de manera discreta y continua. Es usual en la práctica de negocios el uso de retornos y tasas discretas, aun cuando la manipulación de las tasas discretas genera las diferencias entre tasas nominales y efectivas. Este problema desaparece cuando se usan tasas continuas. El retorno discreto se calcula como $r_d = \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} - 1$, su contraparte continua es $r_d = Ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$. A menor Δt la diferencia entre estos retornos se reduce.

Tabla 1
Precios y retornos mensuales y semanales ADR de Ecopetrol, de 03/2009 a 04/2013
Retornos discretos y continuos, no todos los periodos se meuestran

[2] ADR: American Depositary Receipt. Un ADR representa 1 o más acciones de una empresa no estadounidense, originalmente listada en otro país, que se negocian en bolsas de EE. UU.

Rentabilidad y Varianza						
			Retorno		Retorno	
Mes-año	**Mes (t)**	**Precio**	**Discreto**		**Continuo**	
03/2009	0	16.07				
04/2009	1	17.25	7.34%	=(St+1/St)-1	7.09%	=ln(St+1/St)
05/2009	2	20.34	17.91%	:	16.48%	:
06/2009	3	22.29	9.59%	:	9.15%	:
07/2009	4	25.16	12.88%	:	12.11%	:
08/2009	5	24.67	- 1.95%	:	- 1.97%	:
09/2009	6	26.10	5.80%	:	5.63%	:
10/2009	7	24.10	- 7.66%	:	- 7.97%	:
11/2009	8	24.76	2.74%	:	2.70%	:
12/2009	9	23.30	- 5.90%	:	- 6.08%	:
01/2010	10	23.39	0.39%	:	0.39%	:
01/2013	46	63.59	2.27%	:	2.24%	:
02/2013	47	57.16	- 10.11%	:	- 10.66%	:
03/2013	48	54.52	- 4.62%	:	- 4.73%	:
04/2013	49	47.14	- 13.54%	:	- 14.54%	:

			Retorno		Retorno	
Sem-año	**Semana (t)**	**Precio**	**Discreto**		**Continuo**	
30/03/2009	0	16.07				
06/04/2009	1	16.35	1.74%	=(St+1/St)-1	1.73%	=ln(St+1/St)
13/04/2009	2	16.52	1.04%	:	1.03%	:
20/04/2009	3	17.09	3.45%	:	3.39%	:
27/04/2009	4	17.25	0.94%	:	0.93%	:
04/05/2009	5	19.15	11.01%	:	10.45%	:
11/05/2009	6	18.69	- 2.40%	:	- 2.43%	:
18/05/2009	7	19.66	5.19%	:	5.06%	:
26/05/2009	8	20.34	3.46%	:	3.40%	:
01/06/2009	9	21.66	6.49%	:	6.29%	:
08/06/2009	10	22.6	4.34%	:	4.25%	:
16/02/2010	46	24.95	2.21%	:	2.19%	:
22/02/2010	47	25.84	3.57%	:	3.50%	:
01/03/2010	48	26.78	3.64%	:	3.57%	:
08/03/2010	49	27.03	0.93%	:	0.93%	:
15/03/2010	50	26.99	- 0.15%	:	- 0.15%	:
08/04/2013	210	48.75	- 10.70%	:	- 11.31%	:
15/04/2013	211	47.25	- 3.08%	:	- 3.13%	:
22/04/2013	212	47.14	- 0.23%	:	- 0.23%	:

Ahora calculamos la media y la varianza de este título, tanto con datos mensuales como semanales:

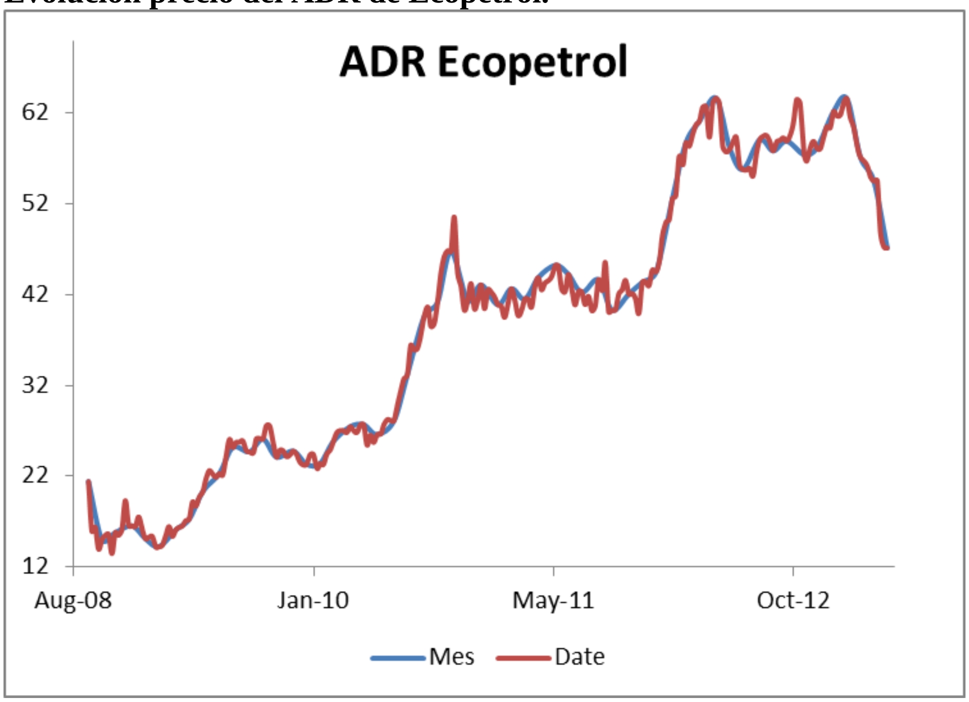
Mensual	n	**12**			
	Δt	**0.083**	=1/n		
		Discreto		**Continuo**	
Retorno	$\mu' = \mu.\Delta t$	**2.51%**	=promedio(ri)	**2.20%**	=promedio(ri)
	P49	**54.19**	=P0.(1+μ')^49	**47.14**	=P0.exp(μ'.49)
	¿Qué pasa?				
	μ'	**2.22%**	=(P49/P0)^(1/49)-1	**2.20%**	=ln(P49/P0)/49
Equivalencia					
	μ_d'	**2.22%**	=exp(μ_c')-1		
	μ (Anual)	**30.15%**	=(1+$\mu'_{d\text{-}mes}$)^n-1	**26.36%**	=$\mu'_{c\text{-}mes}$.n
		30.15%	=exp(μ_c')-1		= $\mu.\Delta t_{c\text{-}mes}$.n

Con datos mensuales, n es 12 y Δt es el inverso de n. Al calcular el retorno discreto promedio mes encontramos que esta estimación no es correcta, puesto que al aplicar la fórmula de valor futuro discreta [$F=P(1+\mu')^n$] con el valor hallado de μ'=2.51% el valor estimado de la acción para el mes 49 sería de 54.19, y no de 47.14, que es el valor correcto. La tasa correcta se halla despejando μ' de la fórmula de valor futuro, lo cual resulta en un valor de 2.22% (discreta).
Como se ve en el cálculo equivalente con retornos continuos, el problema es inexistente para esta metodología. La fórmula de valor futuro continua [$F=P\exp(\mu' n)$] entrega el valor correcto usando el promedio de las tasas continuas, que es de 2.20%. Este valor coincide cuando en la ecuación de valor futuro despejamos μ' (μ=ln(P0/P49)/49). Incidentalmente podemos hallar la equivalencia entre tasas continuas y discretas, puesto que para cualquier frecuencia de datos se cumple que $1+\mu'_d=\exp(\mu'_c)$. Finalmente se observa que la ecuación (3) solo se cumple para retornos continuos, $\mu = \mu'_c.n$, eliminando la diferencia entre tasas efectivas y nominales, esto significa que el promedio de los retornos continuos si estima correctamente la media que es $\phi-\sigma^2/2$, mientras que el promedio de los retornos discretos debe ser corregido, puesto que solo estima ϕ.

El cálculo se repite para frecuencias semanales. Aquí solo cabe anotar que al convertir las tasas semanales a anuales encontramos, como es de esperar, los mismos valores. El número de semanas por año no es exactamente 52. Para calcular el número exacto de semanas en el periodo multiplicamos 12 por el número de semanas en el periodo dividido por el número de meses en el mismo: 12x212/49.

Semanal	n	**51.92**	=12.#Sem/#Mes		
	Δt	**0.019**	=1/n		
		Discreto		**Continuo**	
Retorno	$\mu' = \mu\Delta t$	**0.58%**	=promedio(ri)	**0.51%**	=promedio(ri)
	P212	**54.68**	=P0.(1+μ')^212	**47.14**	=P0.exp(μ'.212)
	¿Qué pasa?				
	μ'	**0.51%**	=(P212/P0)^(1/212)-1	**0.51%**	=ln(P212/P0)/212
Equivalencia					
	μ_d'	**0.51%**	=exp(μ_c')-1		
	μ (Anual)	**30.15%**	=(1+$\mu'_{d\text{-}sem}$)^n-1	**26.36%**	=$\mu'_{c\text{-}sem}$.n
		30.15%	=exp(μ_c')-1		= $\mu.\Delta t_{c\text{-}sem}$.n

Gráfica 1
Evolución precio del ADR de Ecopetrol.



Nota: La línea azul solo presenta los datos mensuales

En el caso de los retornos la estimación no cambia dependiendo de la frecuencia de muestreo, puesto que el retorno solo depende de los datos iniciales y finales. Esto no sucede para el caso de la varianza; como se ve en la gráfica 1, una menor frecuencia de muestreo soslaya importante información respecto a la variabilidad.

A continuación se calcula la volatilidad de los retornos mensuales, usando tanto los retornos discretos como los continuos.

Volatilidad Muestral (Datos Mensuales)					
		Discreto		**Continuo**	
Var. Mes	$\sigma^2{}_m' = \sigma^2{}_m.\Delta t$	**0.49%**	=var(ri)	**0.49%**	=var(ri)
	$\sigma^2{}_{año}$	**0.0593**	$=\sigma^2{}_{mes}'.n$	**0.0586**	$=\sigma^2{}_{mes}'.n$
Desv. Mes	σ_m	**7.03%**	$=(\sigma^2{}_m')^{1/2}$	**6.99%**	$=(\sigma^2{}_m')^{1/2}$
	$\sigma_{año}$	**24.36%**	$=\sigma_{mes}'.n^{1/2}$	**24.21%**	$=\sigma_{mes}'.n^{1/2}$

Volatilidad Muestral (Datos Semanales)					
		Discreto		**Continuo**	
Var. Sem	$\sigma^2{}_m' = \sigma^2{}_m\Delta t$	**0.09%**	=var(ri)	**0.09%**	=var(ri)
	$\sigma^2{}_{año}$	**0.04619826**	$=\sigma^2{}_m'.n$	**0.048361**	$=\sigma^2{}_m'.n$
Desv. Sem	σ_m	**2.98%**	$=(\sigma^2{}_m')^{1/2}$	**3.05%**	$=(\sigma^2{}_m)^{1/2}$
	$\sigma_{año}$	**21.49%**	$=\sigma_{sem}'.n^{1/2}$	**21.99%**	$=\sigma_{sem}'.n^{1/2}$

Al calcular la varianza (muestral o poblacional), usando los retornos discretos o continuos, encontramos que el valor hallado para los datos semanales es diferente, y posiblemente más cercano a la realidad, que el hallado con datos mensuales.

Finalmente, con el cálculo de la varianza se puede mejorar el cálculo del retorno discreto, aplicando la siguiente corrección $\mu_d' = \phi' - \sigma^2/2$, que reporta un valor muy cercano a la realidad:

Corrección Retorno Discreto (Datos Mensuales)			
Retorno	μ_d'	**2.26%**	$=\phi'-\sigma^2/2$

Corrección Retorno Discreto (Datos Semanales)			
Retorno	μ_d'	**0.53%**	$=\phi'-\sigma^2/2$

Simulación de una Trayectoria de Precios

En esta sección se usarán los cálculos previos para simular una trayectoria de precios de un año, con frecuencia semanal (52 semanas) para el ADR de Ecopetrol. Los datos básicos son:

Parámetros de Simulación		
ADR Ecopetrol		
Media (μ)	1.58%	
Desviación (σ)	21.99%	
Δt	1.93%	semana
S_0	47.14	

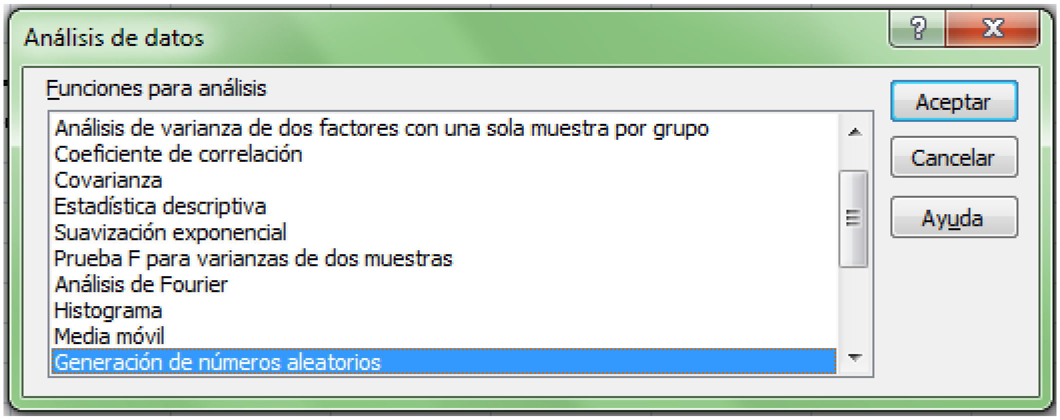
Con la media y la desviación simulamos una posible realización de la trayectoria de precios del ADR de Ecopetrol implementando la ecuación (2): $S_{t+\Delta t} = S_t . \exp[\mu \Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}]$ en forma sucesiva.

Con base en los parámetros previos valores se desarrolla el siguiente modelo. Primero se calcula $S_1 = S_0 . \exp[\mu \Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}]$, posteriormente $S_2 = S_1 . \exp[\mu \Delta t + \tilde{Z}\sigma\Delta t^{1/2}]$ y así sucesivamente hasta llegar a T.

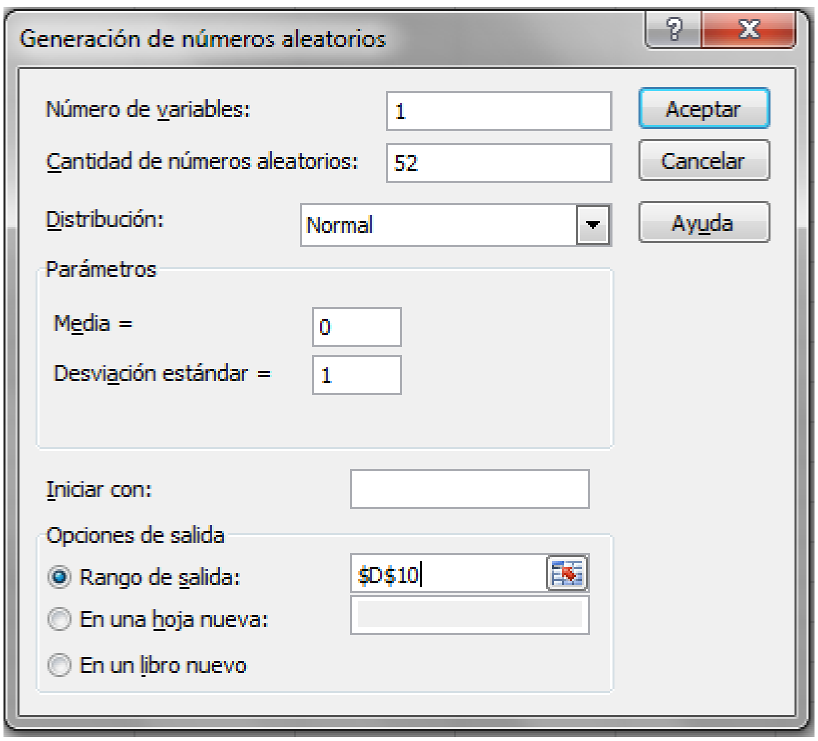
Periodo	Fecha	Z	Precio	
0	22/04/2013		47.14	
1	29/04/2013	-0.88	45.90	<--=S_0.EXP(μ.Δt+Z .σ.$\Delta t^{1/2}$)
2	06/05/2013	-0.92	44.64	<--=S_1.EXP(μ.Δt+Z .σ.$\Delta t^{1/2}$)
3	13/05/2013	0.80	45.75	
4	20/05/2013	0.93	47.08	
5	27/05/2013	0.99	48.54	
6	03/06/2013	0.76	49.69	
7	10/06/2013	-0.14	49.49	
8	17/06/2013	-0.81	48.31	
9	24/06/2013	-0.12	48.14	
10	01/07/2013	-1.85	45.51	

Los valores en la columna Z son números aleatorios que responden a una distribución normal estándar. Programas cuantitativos tales como Matlab o Mathematica tienen la capacidad de generar una serie de este tipo. Otra posibilidad es recurrir a Excel, usando la función de generación de números aleatorios, procedimiento que detallamos a continuación.

En primer lugar seleccionamos **[Datos/Análisis de Datos]** lo cual despliega la siguiente pantalla:

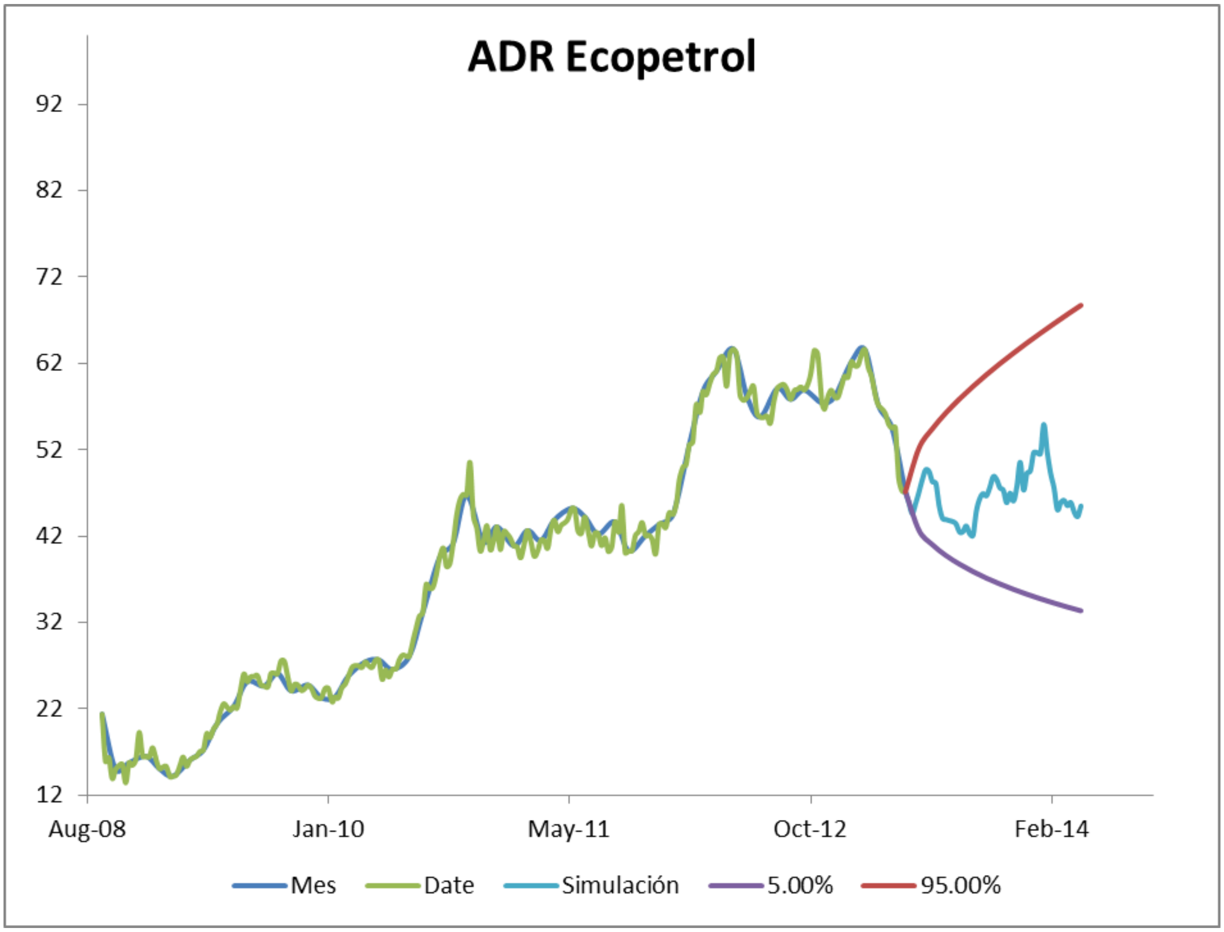


Al seleccionar generación de números aleatorios debemos a continuación definir el número de variables (columnas) y la cantidad de datos (52 semanas), además de la distribución deseada (Normal, media = 0, desviación = 1) y la celda donde se desea ubicar el primer dato:



La grafica resultante se muestra a continuación; los datos simulados no pretenden generar un resultado cercano a los datos reales, puesto que apenas son una realización, entre muchas posibles, de un proceso aleatorio, por lo que su poder predictivo es nulo:

Gráfica 2
Trayectoria simulada precio del ADR de Ecopetrol.
Intervalo de confianza 90%



Predicciones

Aunque el modelo lognormal no predice una trayectoria particular puede usarse para establecer rangos de posibles realizaciones, intervalos de confianza, futuras con una probabilidad definida. Se trabaja en este caso con el logaritmo del precio, que según los supuestos del modelo lognormal, tiene una distribución normal. Por ejemplo, los valores de una variable y, en un tiempo x (e.g. 6 meses) estarán entre ymax y ymin con una certeza del z%. A continuación se plantea un modelo que permite tal tipo de cálculos.

Siguiendo con el ADR de Ecopetrol, podemos estimar el intervalo de confianza con probabilidad del 90% en 6 meses de la siguiente manera. En primer lugar se estima el valor esperado del precio, en términos del logaritmo, en un tiempo T: $Ln(S_T) = S_0 + \mu.T$. Este valor es 3.86, el cual equivale a un valor de US 47.51 al calcular la exponencial. La volatilidad acumulada semestral $\sigma.T^{1/2}$ es 0.16. Puesto que la variable Z es normal estándar, podemos estimar su realización en los límites superior e inferior del rango superior estimando el inverso de la distribución normal estándar para una probabilidad del 95% (Excel: +/- INV.NORM.ESTAND(95%)). El resultado es Desv=1.64 desviaciones estándar. En otras palabras entre -1.64 y +1.64 desviaciones estándar se encontrarán el 90% de las realizaciones de la variable. Al multiplicar este valor por la volatilidad acumulada (0.16), obtenemos el Delta o la magnitud en la que se afecta el valor esperado, Delta = Desv. $\sigma T^{1/2}$=0.26, hacia abajo y hacia arriba. Estos valores son, en términos del logaritmo de la variable, los límites inferior y superior, Ln($S_T$min) y Ln($S_T$max), respectivamente, del intervalo de confianza esperado. Los valores esperados $S_T$min y $S_T$max, se obtienen nuevamente al calcular la exponencial.

Intervalo de Confianza		
T	1/2	Seis meses
Ln(S_T)	3.86	Ln(S_0)+μT
E(S_T)	47.51	Exp(Ln(S_T))
Desviación Semestral Acumulada		
$\sigma T^{1/2}$	0.16	
Probabilidad		
Certeza	95.00%	Cola Superior
Desv.	1.64	N^{-1}(Pr=95%)
	↑=INV.NORM.ESTAND(H9)	
Valores Extremos		
Delta	0.26	Desv.$\sigma T^{1/2}$
Ln($S_T$min)	3.61	Ln(S_T)-Delta
Ln($S_T$max)	4.12	Ln(S_T)+Delta
$S_T$min	36.79	Exp(Ln($S_T$min))
$S_T$max	61.36	Exp(Ln($S_T$max))

En la gráfica 1, se incorporaron los valores $S_T$min y $S_T$max para T variando entre 0 y 1 año. Este cálculo se puede realizar en Excel usando **[Datos/Análisis Y si/Tabla de Datos]** definiendo como variable independiente a T, los valores se reportan a continuación:

	Intervalo de Confianza		5.00%	95.00%
	Fecha	**T**		
	22/04/2013	-	47.14	47.14
1	20/05/2013	0.08	42.70	52.17
2	17/06/2013	0.15	41.01	54.45
3	15/07/2013	0.23	39.77	56.28
4	12/08/2013	0.31	38.77	57.88
5	09/09/2013	0.38	37.91	59.34
6	07/10/2013	0.46	37.15	60.69
7	04/11/2013	0.54	36.47	61.97
8	02/12/2013	0.61	35.85	63.19
9	30/12/2013	0.69	35.29	64.37
10	27/01/2014	0.77	34.76	65.50
11	24/02/2014	0.84	34.27	66.60
12	24/03/2014	0.92	33.81	67.68
13	21/04/2014	1.00	33.37	68.73

Simulación de Trayectorias

Se presenta en este acápite un procedimiento y una macro[3] que permite simular 3 trayectorias aleatorias.

Ahora continuamos con la generación de trayectorias aleatorias y la envolvente de probabilidad (90%) entre 0 y 26 semanas. La hoja de cálculo luce de la siguiente forma:

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
4	t	z1	z2	z3	Tray1	Tray2	Tray3	Media	Min	Max
5	0				100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00
6	1	1.55529051	0.67966084	-0.71240947	104.87	102.35	98.48	100.44	95.96	105.13
7	2	2.08186975	0.65879817	-0.95084033	111.60	104.70	96.34	100.89	94.59	107.61
8	3	-1.02654212	0.52924293	-0.64573896	108.95	106.72	95.05	101.34	93.64	109.67
9	4	-0.230566	0.45768957	0.45420961	108.73	108.57	96.68	101.78	92.91	111.51
10	5	1.42113322	-2.47382559	-1.2405053	113.60	101.82	93.83	102.24	92.32	113.22
11	6	0.67235419	-0.06181153	-0.27845545	116.25	102.09	93.52	102.69	91.83	114.83
12	7	0.58554178	1.5365913	1.0641952	118.68	107.01	96.74	103.14	91.42	116.38
13	8	-0.49998675	-1.39455096	0.28793011	117.57	103.41	97.95	103.60	91.06	117.87
14	9	-0.68564759	0.91502216	0.54630391	115.86	106.53	99.89	104.06	90.75	119.32
15	10	0.35871381	-0.53135636	0.62747063	117.54	105.44	102.09	104.52	90.48	120.74
16	11	-0.33401989	0.25878535	-1.45424565	116.97	106.67	98.49	104.99	90.24	122.14
17	12	1.39799795	0.8563643	0.78230642	122.14	109.72	101.10	105.45	90.04	123.50
18	13	0.61781293	-0.34796585	-1.12923999	124.80	109.15	98.42	105.92	89.85	124.86
19	14	-1.60237505	-0.02758043	-0.17014713	119.90	109.55	98.39	106.39	89.69	126.19
20	15	0.62031404	-0.44152443	1.19007836	122.52	108.69	102.14	106.86	89.55	127.51
21	16	-0.9051837	1.41465307	0.62644631	120.02	113.54	104.39	107.33	89.43	128.82
22	17	1.17027639	-0.91607035	-1.19209972	124.52	111.19	101.44	107.81	89.32	130.12
23	18	-0.98879354	1.01035312	0.52291739	121.69	114.85	103.38	108.29	89.23	131.41
24	19	1.10131396	-0.38502776	1.39962594	126.02	114.14	107.95	108.77	89.15	132.70
25	20	0.61439096	-0.11249767	-0.9863038	128.76	114.29	105.50	109.25	89.09	133.97
26	21	0.94688176	0.47483127	-0.19238769	132.77	116.31	105.41	109.73	89.03	135.25
27	22	-0.84647127	0.36778374	-0.82424094	130.26	118.03	103.48	110.22	88.99	136.52
28	23	0.58010187	-0.19550725	0.12698365	132.96	117.91	104.31	110.71	88.95	137.78
29	24	-1.9901745	0.91154106	1.52108441	126.38	121.46	109.28	111.20	88.93	139.05
30	25	-1.10103429	-0.84144631	0.18678065	123.12	119.19	110.34	111.69	88.91	140.31
31	26	0.18724791	-0.73868705	0.59683885	124.31	117.29	112.68	112.19	88.90	141.57

En las columnas F a H tenemos números aleatorios generados de la misma manera que en la sección anterior. Las columnas I a K contienen las trayectorias de precios producto de las realizaciones de los números aleatorios. En la columna L se tiene el valor medio de la variable (Equivalente a la celda B14, nótese que el valor en la semana 26 coincide con el valor calculado previamente). En las columnas M y N tenemos los valores mínimo y máximo que determinan el rango del 90% de probabilidad (Equivalentes a las celdas B24 y B25, respectivamente)

[3] Una macro es un programa en VBA que automatiza o realiza cálculos diferentes a los pre-programados por Excel.

A continuación se muestran las fórmulas para los cálculos de estos valores para la semana 1, estas fórmulas se repiten hasta la semana 26:

	I	J
4	**Tray1**	**Tray2**
5	=B8	=I5
6	=I5*EXP($B$4*$B$7+F6*$B$5*$B$7^(1/2))	=J5*EXP($B$4*$B$7+G6*$B$5*$B$7^(1/2))

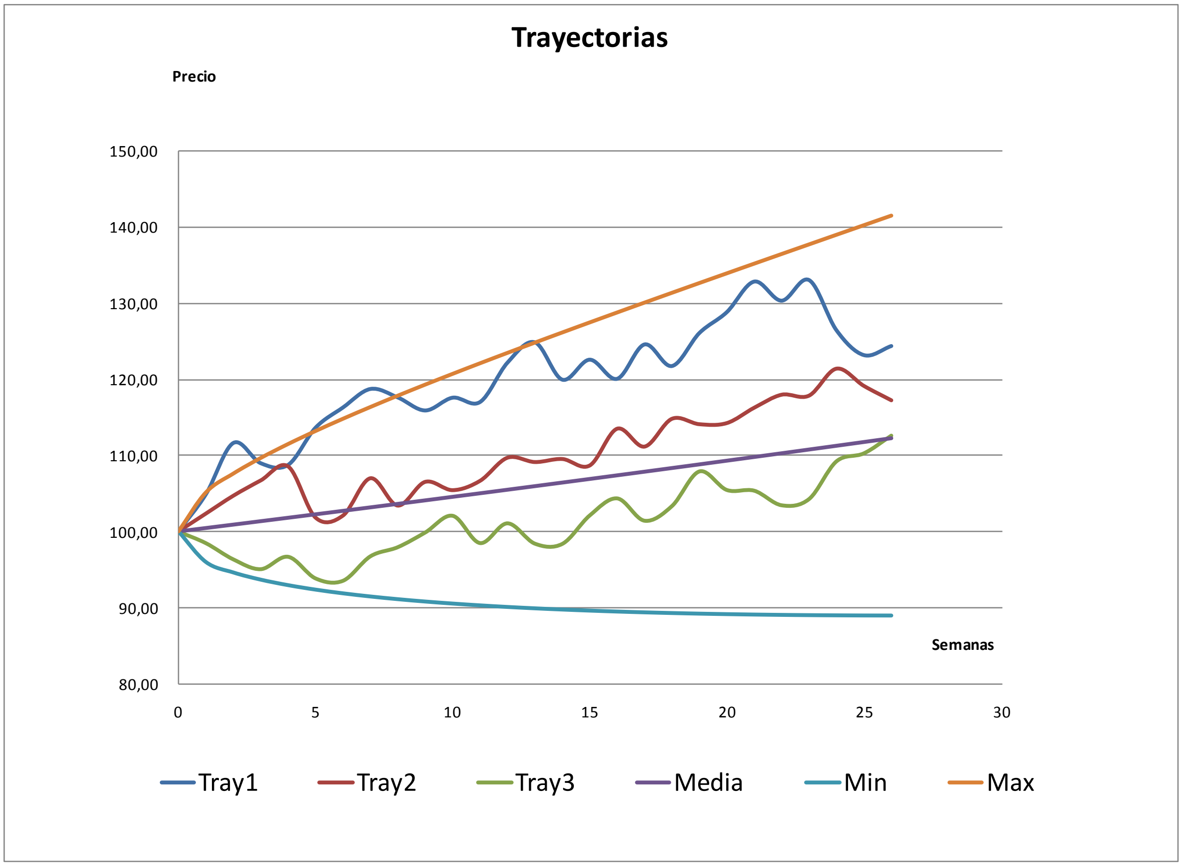
	K	L
4	**Tray3**	**Media**
5	=J5	=K5
6	=K5*EXP($B$4*$B$7+H6*$B$5*$B$7^(1/2))	=$L$5*EXP($B$4*$E6/$B$6)

	M
4	**Min**
5	=L5
6	=$L$5*EXP($B$4*$E6/$B$6-$B$19*$B$5*($E6/$B$6)^(1/2))

	N
4	**Max**
5	=M5
6	=$L$5*EXP($B$4*$E6/$B$6+$B$19*$B$5*($E6/$B$6)^(1/2))

Gráficamente el resultado es el siguiente:

Gráfica 3
Trayectorias simulada modelo lognormal.
Intervalo de confianza 90%



Generación automática de una serie de Precios

El proceso anterior puede automatizarse fácilmente a través de una macro simple. La macro transcrita a continuación permite generar tres series de números aleatorios. Para tal fin se crean dos rangos de nombres: 1) Noal, F6:H31, donde se guardan los números aleatorios; 2) celi, F6, la celda inicial.

A continuación se transcribe la macro:

```
Sub Macro1()
'
' Macro1 Macro
' Aleator
'
' Acceso directo: Ctrl+Mayús+A
'
    Application.ScreenUpdating = False
    Sheets("Hoja1").Select
    Range("Noal").Select
```

```
'   Range(Selection, Selection.End(xlDown)).Select
    Selection.ClearContents
    Application.Run "ATPVBAEN.XLAM!Random", ActiveSheet.Range("celi"), 3, 26 _
        , 2, , 0, 1
    Sheets("Gráfico1").Select
    Application.ScreenUpdating = True
End Sub
```

Ejercicios

1. Estime cuales son los valores mínimo y máximo para un intervalo de confianza del 80% dentro de 4 meses para una variable similar a la del ejemplo previo.
2. Genere 4 trayectorias de precios, el valor medio y la envolvente para un intervalo de confianza del 95% entre 0 y 1 año, para una variable con precio inicial de 500, volatilidad del 25% y un retorno esperado del 14%.

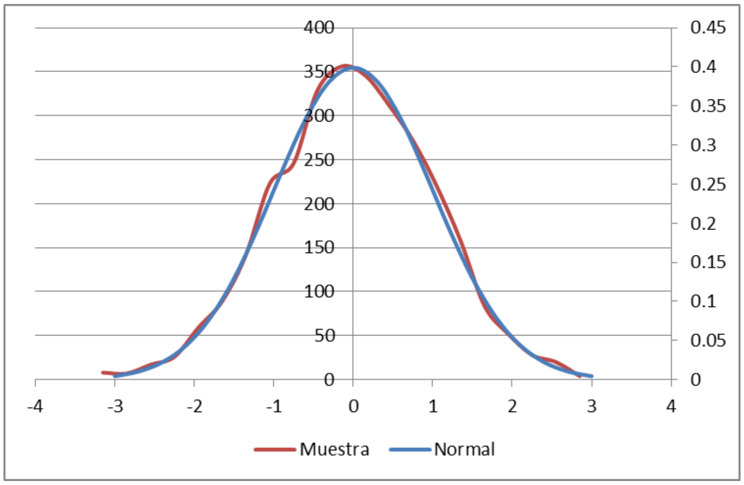
Valoración de Derivados utilizando la Simulación de Montecarlo

Las herramientas desarrolladas en las secciones anteriores nos permiten estimar el valor de un derivado a través de una simulación. Se valorarán en este caso opciones de compra (Call) y venta (Put) europeas a 6 meses sobre el ADR de Ecopetrol, con un precio de ejercicio de 50. Puesto que son derivados europeos, solo pueden ejercerse al vencimiento. Una opción de compra (Call) se ejerce si el precio de ejercicio X es inferior al precio de vencimiento del subyacente S_T, la utilidad es en este caso de S_T-X, la opción no se ejerce si X es superior a S_T, este resultado se esquematiza como el máximo entre S_T-X y 0: Max(S_T-X, 0). Para la opción de venta (Put) la utilidad es máximo entre X-S_T y 0: Max(X-S_T, 0). Asumiremos que la volatilidad de los retornos es 21.99%, manteniéndose en los valores estimados previamente, la tasa libre de riesgo es del 4% y el precio actual de la acción es $47.14.

	Parámetros de Simulación		
	ADR Ecopetrol		
Tasa libre de riesgo (k_f)		4%	
	Desviación (σ)	21.99%	
	Media (μ)	1.58%	$=k_f-\sigma^2/2$
	T	0.50	años
	Fecha 0	22/04/2013	
	Fecha T	21/10/2013	
	S_0	47.14	

Puesto que nuestro interés es simular los precios al vencimiento (en 0.5 años), modificamos el procedimiento previo para obtener el valor final tal que $S_T = S_0.\exp\left[\mu T + \tilde{Z}\sigma T^{1/2}\right]$. Es importante destacar que $\mu = k_f-\sigma^2/2$. La razón de este ajuste es que no tenemos mejor información sobre el retorno esperado de la acción que la tasa libre de riesgo. Ya que el objetivo es una muestra representativa de los posibles valores finales, repetimos el cálculo un número suficiente de veces tal, que obtengamos la distribución de $\tilde{Z}$. La similitud de la distribución de la muestra y la teórica para 3,000 realizaciones de $\tilde{Z}$ se presenta en el gráfico 4.

Gráfica 4
Distribución Muestra vs. Normal
Histograma de frecuencia de la muestra vs. distribución normal teórica.
3000 simulaciones



Se calculan sucesivamente S_T y el valor del derivado al vencimiento. Puesto que la expectativa más razonable respecto al rendimiento del activo es la tasa libre de riesgo, expresamos $\mu=k_f-\sigma^2/2$. A continuación se presentan 2 realizaciones, de las 3000 requeridas, de S_T:

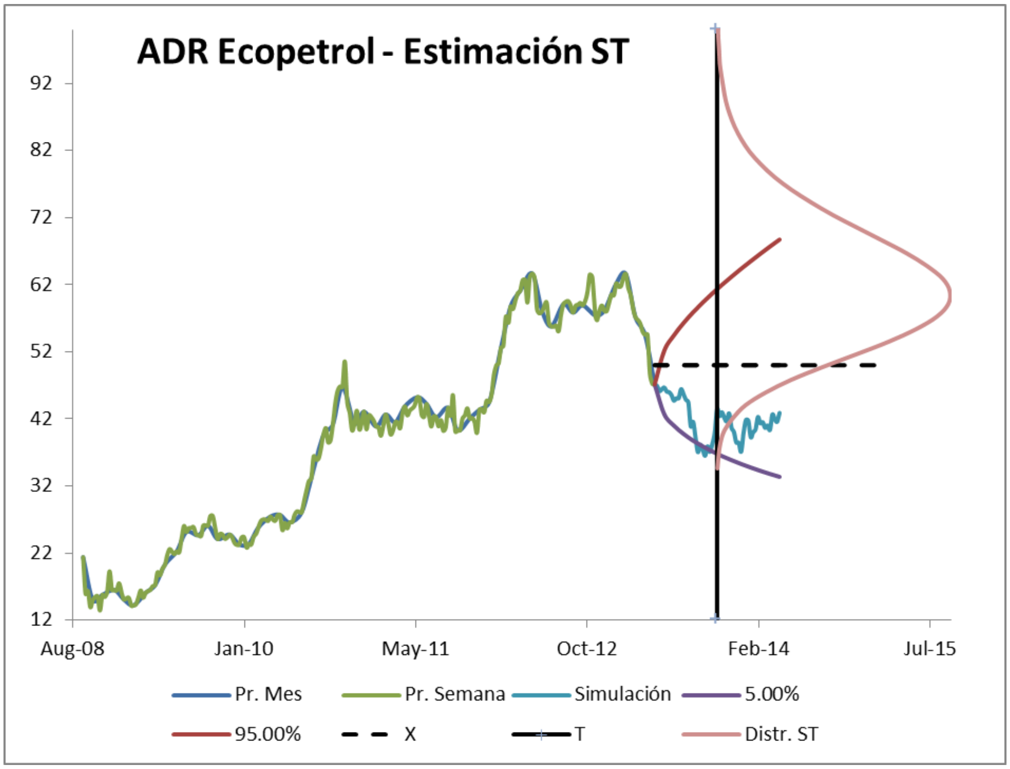
Periodo	$\tilde{Z}$	**Precio (S_T)**	
0		47.14	
1	0.67	45.95	<--=S_0.EXP(μ.T+$\tilde{Z}$.σ.$T^{1/2}$)
2	0.09	62.66	<--=S_0.EXP(μ.T+$\tilde{Z}$.σ.$T^{1/2}$)

En la gráfica 5 se incorpora la distribución de valores finales de S_T a los cálculos previos. La línea rosada (graficada sobre el momento del vencimiento de los derivados) presenta esta distribución. Los valores superiores al precio de ejercicio son aquellos en los cuales es óptimo ejercer la opción de compra (Call), los valores inferiores al precio de ejercicio son aquellos en los cuales es óptimo ejercer la opción de venta (Put). Los valores de los derivados que corresponden a las realizaciones de los precios arriba mostrados se presentan a continuación. Si el precio final del subyacente es 45.95, el resultado para la opción de compra es Max(45.95-50, 0)=0 ; si el precio final es 62.66, el resultado es Max(62.66-50,0)=12.66. Los cálculos correspondientes a la opción de venta se calculan en forma análoga:

	Call	**Put**
Periodo	**Max(S_T-X,0)**	**Max(X-S_T,0)**
0		
1	-	4.05
2	12.66	-

Gráfica 5
Evolución ADR Ecopetrol

Las líneas verde (semana) y azul oscura (mes) representan la evolución del precio histórico del ADR de Ecopetrol. Las líneas roja (95% superior) y violeta (5% inferior) representan la evolución del intervalo de confianza del 90%, la línea azul clara es una posible realización del precio. La línea horizontal punteada negra representa el precio de ejercicio X. La línea vertical negra representa el momento del vencimiento de los derivados T. Finalmente, la curva rosada representa la distribución de los valores de S_T al momento del vencimiento.



Habiendo obtenido los valores finales, los promediamos. Encontramos así el valor esperado del derivado, así:

Valor esperado en T de la opción de compra (Call): $V_F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(S_{T,i} - X, 0\right)$
Valor esperado en T de la opción de venta (Put): $V_F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Max\left(X - S_{T,i}, 0\right)$

Puesto que el retorno esperado del subyacente es k_f, el valor futuro (VF) se descuenta a esta tasa:

Valor esperado en 0 de la opción de compra (Call) o venta (Put): $V_O = V_F . exp\left(-k_f . T\right)$

A continuación se estiman los valores futuro y presente de los derivados analizados:

	Valor Futuro, V_F	Valor Presente, V_0
Call	2.19	**2.15**
Put	4.12	**4.04**

Los valores anteriores se pueden comparar fácilmente con los obtenidos con la fórmula de Black-Scholes, el cual se describe someramente a continuación.

Modelo de Black-Scholes

Black, Scholes y Merton derivaron la fórmula para valorar opciones europeas en tiempo continuo. Su argumento básico es que en cualquier momento se puede duplicar el valor de una opción como una inversión de Δ_0 unidades del activo subyacente y una inversión con monto B_0 en el activo libre de riesgo, el activo subyacente se comporta siguiendo el modelo lognormal de precios, anteriormente discutido. Tenemos entonces que el valor del derivado f_0 es:

$$f_0 = \Delta_0.S_0 + B_0 \qquad (4)$$

En tiempo continuo estos valores se modifican permanentemente. El valor de Δ_0 puede interpretarse como la sensibilidad de la prima de la opción al valor del subyacente.
Para el caso de la opción de compra europea (Call), los valores de Δ_0 y B_0 son:

$$\mathbf{\Delta_0=N(d_1), \qquad B_0= - X.e^{-kf.T}N(d_2)}$$

Para el caso de la opción de venta europea (Put), los valores de Δ_0 y B_0 son:

$$\mathbf{\Delta_0=-N(-d_1), \qquad B_0= X.e^{-kf.T}N(-d_2)}$$

Las expresiones N(.) representan la distribución normal estándar acumulada. Los términos d_1 yd_2 están definidos como:

$$d_1= [Ln(S_0/X)+(k_f+\sigma^2/2)T]/(\sigma T^{1/2})$$
$$d_2= d_1 - \sigma T^{1/2}$$

Los valores de S_0, X, k_f, σ y T son el precio actual del subyacente, el precio de ejercicio, la tasa libre de riesgo, la volatilidade y el tempo al vencimento, respectivamente.

Las expresiones resultantes para los derivados son:

Opción de compra (Call) europea: $C_0=S_0.N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$

Opción de venta (Put) europea: $P_0= - S_0.N(-d_1) + Xe^{-rT}N(-d_2)$

El valor de las primas para la opción de compra y la de venta para las condiciones del ejemplo prévio son:

	Black-Scholes
Call	2.14
Put	4.01

Modificaciones simples a la fórmula deBlack-Scholes

Otras fórmulas también han sido desarrolladas para evaluar opciones europeas sobre acciones que pagan dividendos:

1. Pago de Dividendos en periodos discretos y conocidos

Los dividendos se descuentan del valor actual de la Acción:

$$S_0^* = S_0 - \sum_{i=1}^{m} D_i . e^{-k_f . t_i}$$

S_0^* toma el valor de S_0 en las fórmulas anteriores, que se aplican sin cambios adicionales, d_1 también debe ajustarse en consecuencia.

2. Flujo continuo de Dividendos

Este flujo continuo se expresa a una tasa q de tal manera que:
$S_0^* = S_0 . e^{-q.T}$
También debe ajustarse d_1. Asimismo esto aplica a una opción sobre divisas donde k_{f1} es la tasa libre de riesgo del país cuya divisa se puede adquirir o vender y la tasa de cambio esta expresada en Moneda local sobre moneda extranjera:
$S_0^* = S_0 . e^{-k_{f1}.T}$

3. Cuando la opción es de venta (Call) americana y paga dividendos se puede aplicar la aproximación de Black. En este caso el valor de la opción es el máximo entre una opción europea con vencimiento en T, que paga dividendos, como el caso anterior, y una opción europea con vencimiento en t^-_{m-1}, siendo este término el instante anterior al pago del último dividendo. Lo que implica que para la segunda opción

$$S_0^* = S_0 - \sum_{i=1}^{m-1} D_i . e^{-k_f . t}$$

, donde $t_{max}=t_{m-1}$.

4. Opciones sobre futuros. El valor de S_0 se modifica a $S_0^* = F . e^{-k_{f1}.T}$

Glosario

ADR: American depositary receipt, representa 1 o más acciones de una empresa no estadounidense, originalmente listada en otro país, que se negocian en bolsas de EE. UU.
Call: Opción de compra del subyacente S con vencimiento en T por un precio X, se ejerce (se compra el subyacente) si el precio del subyacente al vencimiento es mayor que X. La opción europea solo se ejerce al vencimiento, la americana puede ejercerse en cualquier momento previo al vencimiento.
Put: Opción de venta del subyacente S con vencimiento en T por un precio X, se ejerce (se vende el subyacente) si el precio del subyacente al vencimiento es menor que X. La opción europea solo se ejerce al vencimiento, la americana puede ejercerse en cualquier momento previo al vencimiento.

Referencias

Benavides, S. (2010). Fundamentos de Derivados y Opciones. Notas de Clase.

Benninga, S. (2008). Financial Modeling. The MIT Press, 3rd edition.

Black, F. y M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy, 81: 637-654.

Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science, 4 (1): 141-183.

Hull, J. (2008). Introducción a los mercados de futuros y opciones. Pearson, 6ta edición.

SALÓN BURSÁTIL

Departamento
Contable Financiero

UNIVERSIDAD ICESI