Una Apróximación Empírica al Modelo de Ciclos Económicos Reales

Mateo Duque

Directores del Proyecto de Grado:
Natalia González, Ph.D.
Andrés Muñoz

Universidad Icesi
Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas
Santiago de Cali, diciembre de 2015

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

Resumen

This application manual shows an empirical approach of the real business cycle model by simulating a dynamic system. For this, some introductory familiarization exercises will be shown step by step with them solution in MATLAB. For the application of the model RBC [1], analytical and empirical model with differential equations solution will be shown by the method of Bellman equation, and later calibration. However, although some parts may omit the complete derivations of the mathematical models, the appropriate references will be included for those are interested to get deeper on the origin of the models equations.
Keywords: Real business cycles, calibration, adjustments costs, dynamic optimization.

Resumen

Este manual aplicativo muestra una aproximación empírica al modelo de ciclos económicos reales mediante la simulación de un sistema dinámico. Para esto, se presentará la solución paso a paso de algunos ejercicios introductorios de familiarización con MATLAB, con sus respectivas soluciones. Para la aplicación del modelo CER[2], se mostrará la solución analítica y empírica al modelo con ecuaciones diferenciales mediante el método de Bellman, y posteriormente su calibración. No obstante, aunque puede que en algunas partes las derivaciones completas de los modelos matemáticos se omitan, se incluirán las referencias a textos apropiados para aquellos interesados en profundizar más sobre el origen de las ecuaciones del modelo.
Palabras clave: Ciclos económicos reales, calibración, costos de ajuste, optimización dinámica.

[1] i.e. “ Real Bussiness Cycles ”

[2] i.e. Ciclos Económicos Reales o RBC por sus siglas en inglés “Real Bussiness Cycles”

1. Introducción

1.1. ¿Qué es MATLAB?

MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "laboratorio de matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado y didáctico con un lenguaje de programación propio. Al respecto, Klee y Allen (2002) sostienen que MATLAB sirve a una variedad de aplicaciones, incluyendo la biotecnología, disintas áreas de la ingeniería, modelos financieros, económicos y la dinámica de vuelo. Los economistas, por su parte, recurren a métodos de simulación para predecir algunos comportamientos de la economía dadas unas condiciones específicas. Adicional a esto, la simulación, lejos de los tratamientos econométricos, también sirve para simular el comportamiento de una economía tras la formulación de políticas púbicas. Además, la simulación de desastres naturales ayuda en la preparación y en los procesos de planeación económica para mitigar el impacto de eventos catastróficos, entre otros.

1.2. Nociones básicas de programación

Tal y como lo afirma Borrell (2013) , al abrir MATLAB la primera sensación puede ser de saturación. La interfaz gráfica de MATLAB no corresponde como tal a la sencillez del uso real del programa; y es por eso que por ahora interesan solo dos herramientas: la ventana de comando y el editor.

El editor permite escribir o modificar los códigos y la ventana de comando no es más que la vía principal de comunicación con MATLAB. Cualquiera de las operaciones de la interfaz gráfica pueden realizarse únicamente escribiendo comandos en la consola.

Para comenzar, considere una línea de código muy simple:

```
>> a = 1;
```

Hay tres elementos en esta línea de código:

- a es una variable.
- = es el operador de asignación.
- 1 es el literal que define el número 1.

Dado que una variable es una palabra cualquiera, se debe escoger siempre nombres[3] descriptivos que permitan descifrar el algoritmo que se está implementando. El operador asignación almacena en la memoria el resutado de la operación de su derecha y la asigna (por eso su nombre) a la variable. En MATLAB cada comando solo puede obtener un operador asignación y a su izquierda sólo puede haber una variable.

Es importante resaltar también que MATLAB define una variable especial llamada ans que no se debe sobreescribir nunca. Es decir, cada vez que se ejecute un comando y no se asigne a su resultado una variable, MATLAB hará tal asignación de manera completamente automática a la variable ans. Por ejemplo:

```
>> 2+2
ans =
      4
```

[3] No se debe usar indistintamente las letras mayúsculas y minúsculas.

2. Primer Contacto con MATLAB

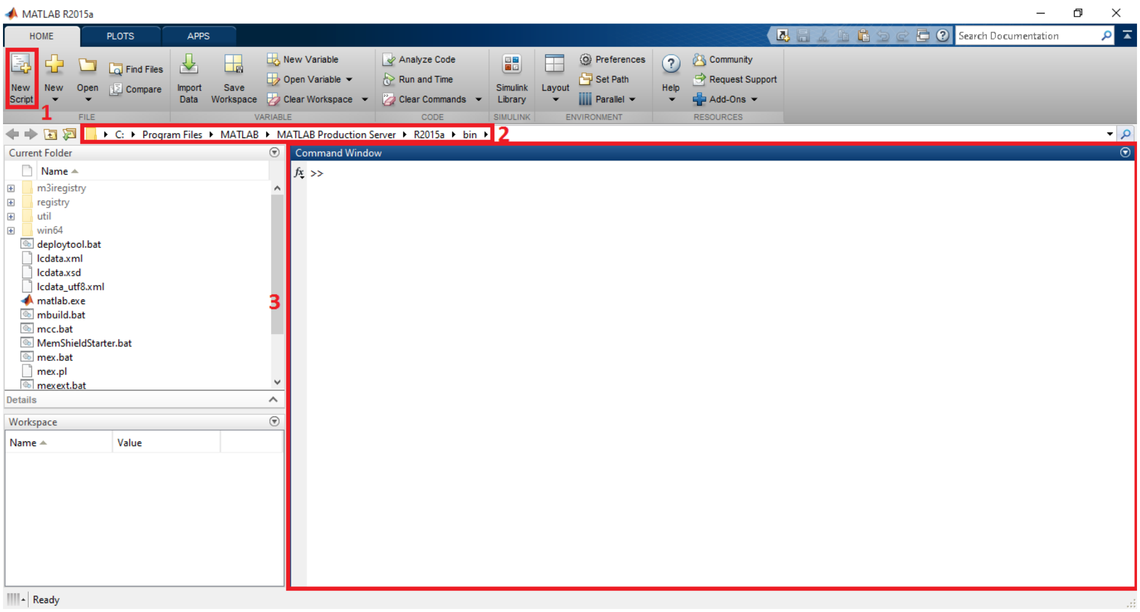
2.1. La interfaz gráfica de MATLAB

En primera instancia, cabe resaltar que la interfaz gráfica de MATLAB es prácticamente la misma en cualquiera de sus versiones independiente del sistema operativo.

La ventana principal está dividida en secciones con una función específica. Cada una de estas secciones, a excepción del menú, es una ventana que puede moverse dentro de la interfaz para efectos de reducir la congestión visual, permitiendo ordenar MATLAB para ajustarlo a las necesidades de cada usuario. Las tres partes que de momento se analizarán están marcadas con un número en la figura 1.

Por un lado, el ícono señalado con el número 1 indica "nuevo archivo" y sirve para abrir el editor de MATLAB. Por otro lado, el recuadro señalado con el número 2 muestra el diálogo para seleccionar el directorio de trabajo. A medida que se escriba el código, éste deberá ser guardado en algún lugar del computador, en tanto que para poder ser utilizado a futuro es importante que MATLAB sepa dónde éste ha sido guardado. Cabe aclarar que, por defecto, MATLAB trae guardadas las funciones propias de la aplicación y de los distintos *toolkits* en un directorio específico, que es el que se señala en el recuadro 2 de la figura 1.

Figura 1: Captura de la interfaz gráfica de MATLAB R20015a



MATLAB busca funciones y scripts en los directorios especificados por la función `path`. El primero de ellos siempre es el especificado en el diálogo `Current Directory`.

`path` *(path, dir)*

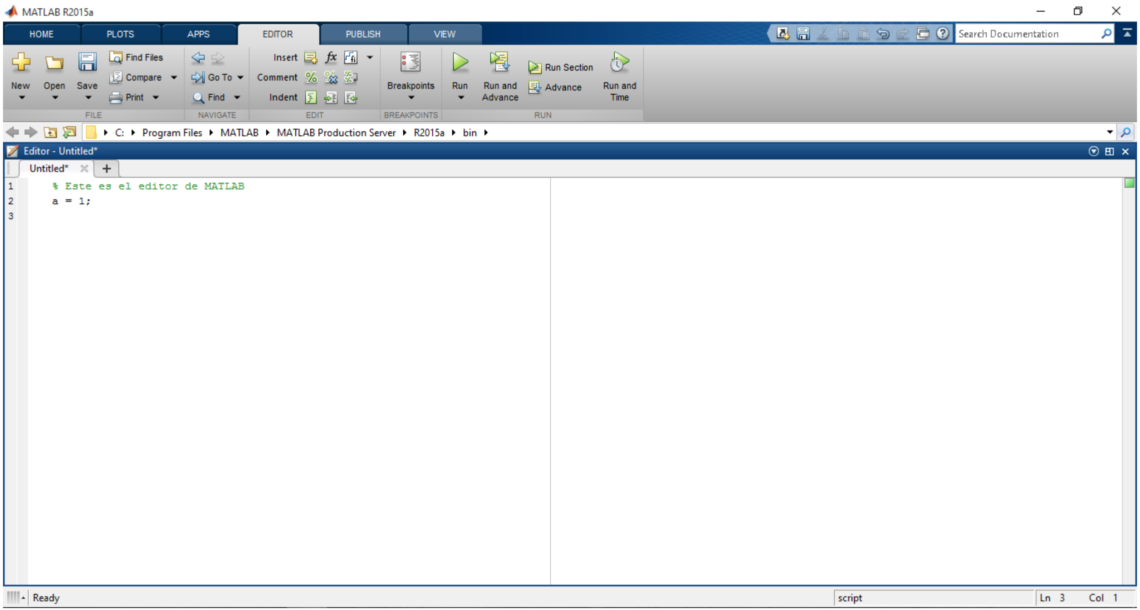
> Sin argumentos imprime en la pantalla los directorios donde MATLAB busca los archivos. En el caso de darle dos argumentos, normalmente el primero será simplemente `path`, mientras que el segundo será el nombre de un directorio que se quiera añadir a la lista. Para añadir un directorio:
>
> `>> path(path,'C:/Users/Yo/Documents/MATLAB/Funciones')`

Por último, el recuadro número 3 señala la ventana de comando de MATLAB. Como se mencionó anteriormente, MATLAB no es más que un intérprete para un lenguaje de programación tal que la vía directa de comunicación con el mismo es la ventana de comando.

La figura 2 muestra el editor[4] de MATLAB. El editor cuenta con casi todas las capacidades que se esperan de una herramienta de programación moderna:

- Coloreado de código
- Análisis sintáctico capaz de detectar errores antes de ejecutar el código
- Depurador integrado.

Figura 2: Captura del editor de MATLAB R20015a



2.2. Definición de funciones

En la sección anterior se mostró que realizar operaciones con números reales, en general, es simple. Antes de comenzar a realizar ejercicios básicos en MATLAB, es importante entender el proceso de creación de una función. Es por esto que el siguiente paso es entender cómo se debe definir una función.
Hay dos maneras de definir una función en MATLAB:

2.2.1. Funciones anónimas

Una forma fácil de crear funciones es a través de las funciones anónimas. La forma general de las funciones anónimas es la siguiente:

```
» nombredelafuncion = @(argumentos) expresion
```

donde `nombredelafuncion` es el nombre con el que se quiere llamar a la función; en `argumentos` se escriben las variables de la función, y en `expresion` se define la función que se quiere. Es importante resaltar que este comando funcionará como cualquier otro comando ya definido de MATLAB.

[4]Uno de los atajos de teclado más útiles del editor de MATLAB es utilizar la tecla F5 para guardar y ejecutar el código que se está escribiendo.

Por ejemplo, se quiere realizar el producto entre el seno y el coseno entre dos vectores **x** y **y** cualesquiera. Para eso se define la siguiente función anónima en la consola:

```
>> funcion1=@(x,y) sin(x)*cos(y);
```

Seguidamente se introducen los argumentos de la siguiente forma:

```
>> funcion1([1,4,5],[5,3,7]')
```

y se obtiene el siguiente resultado:

```
ans =
    0.2650
```

2.2.2. Funciones definidas por el usuario

Generalmente se trabajan funciones del tipo $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una expresión matemática en términos de la variable x. A través de una regla de asignación (función) se calcula un valor de y (salida) cuando se proporciona un valor de x (entrada) en la expresión. MATLAB define de manera predeterminada muchas funciones como `sin(x)`, `sqrt(x)`, etc.

Es posible definir funciones y guardarlas en un fichero[5] y usarlas de un modo semejante a las funciones predefinidas de MATLAB. Es por esto que la principal ventaja de definir una función propia es la posibilidad de reutilizar el código para otras aplicaciones.

Se debe tener en cuenta que la entrada y la salida de una función puede ser una o varias variables, cada una de ellas puede ser un escalar, un vector o una matriz de cualquier tamaño.

La primera línea en el editor es la definición de la función que comienza con la palabra clave `function`, tal como sigue:

```
»  function variables_salida=nombre_funcion(variables_entrada)
»     condiciones
»  end
```

- `nombre_funcion`, es el nombre significativo que se le asigna a la función y coincide con el nombre del fichero de extensión *.m en el que se guarda el código de dicha función. Las reglas para nombrar un función son las mismas que para las variables, los nombres no deben de incluir espacios, ni se pueden utilizar plabras reservadas por MATLAB.

- `variables_entrada`, es el conjunto de parámetros que se le introducen a la función. Los nombres de las variables van entre paréntesis y separadas por coma.

- `variables_salida`, es el valor o conjunto de valores de las variables devueltos por la función. Las variables de salida van despueés de la palabra reservada `function` entre corchetes cuadrados y separados por comas si hay varios de ellos.

- `condiciones`, son las líneas de código que, tomando los valores de los parámetros de entrada, calculan, mediante expresiones, los valores que devuelve la función.

- `end`, marca el final de la función. Este es opcional (salvo en las funciones anidadas[6]) pero es conveniente acostumbrarse a ponerlo al finalizar la función.

[5] Las funciones se crean del mismo modo que un script seleccionado en el menú y se guardan en un fichero que tiene el mismo nombre que la función y extensión *.m

[6] Son funciones definidas dentro de otras funciones.

2.3. Un primer ejercicio en MATLAB

Antes de escribir algún código o implementar algún algoritmo es necesario familiarizarse con el entorno de desarrollo. Este primer ejercicio constará de una función que indicará si una función $f(x)$ es definida positiva o no. Para esto, es importante recordar el siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Sea $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ una forma cuadrática con una matriz simétrica $\mathbf{A}$ asociada. Sea $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los valores propios (reales). Entonces:*

- *Q es definida positiva si y solo si, $\lambda_1 > 0, ..., \lambda_n > 0$.*
- *Q es semidefinida positiva si y solo si, $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$.*
- *Q es definida negativa si y solo si, $\lambda_1 < 0, ..., \lambda_n < 0$.*
- *Q es semidefinida negativa si y solo si, $\lambda_1 \leq 0, ..., \lambda_n \leq 0$.*
- *Q es indefinida si y solo si, $\mathbf{A}$ tiene valores propios con signos contrarios.*

Se procede entonces a abrir el editor y se escribe la primera parte del código de la siguiente manera:

```
1  function x=def(Q)
2  n=size(Q,1);
3  if size(Q,2)~=n
4      error('La matriz no es cuadrada')
5  end
```

En primera instancia, vale la pena detenerse en la primera línea para identificar tres elementos claves:

- El comando `function` indica que se programará una nueva función, que utilizará una sintaxis determinada.
- `Q`, en la sintaxis, es la entrada que corresponde a la matriz asociada a la función objetivo.
- `x`, en la sintaxis, es la salida que corresponde al vector de valores propios de la matriz Q.

Ahora bien, también es de suma importancia verificar que la matriz asociada a la función sea cuadrada y es precisamente lo que se logra en las líneas 2 a 5 con el comando `size`, condicionando a que el número de columnas sea igual al número de filas.

La segunda parte del código calculará todos los autovalores de la matriz asociada a través del comando `eig`, y así determinar si la función es definida positiva o no. A continuación, la segunda parte del código:

```
6  -   x=eig(Q);
7  -   if x>0
8  -       display('Positiva');
9  -   elseif x>=0
10 -       display('Semipositiva');
11 -   elseif x<0
12 -       display('Negativa');
13 -   elseif x<=0
14 -       display('Seminegativa');
15 -   end;
16 -   end
```

2.4. Otros ejercicios

2.4.1. Producto Kronecker

Este ejercicio consiste en crear una función `prodk.m` que programe y calcule el producto Kronecker para dos matrices de dimensión 2×2. Para esto es importante recordar la siguiente definición:

Definición 2.2 *Sea* $\mathbf{A}$ *una matriz* $m \times n$ *y* $\mathbf{B}$ *es una una matriz* $p \times q$*, entonces el producto Kronecker* $A \otimes B$ *es una matriz bloque de dimensión* $mp \times nq$*, tal que:*

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

Más explícitamente, se tiene

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Se introduce el siguiente código en el editor:

```
1    function K=prodk(A,B)
2 -  K = zeros(size(A,1)*size(B,1),size(A,2)*size(B,2));
3 -      K(1:size(B,1),1:size(B,2)) = A(1,1)*B;
4 -      K(size(B,1)+1:2*size(B,1),1:size(B,2)) = A(2,1)*B;
5 -      K(1:size(B,1),size(B,2)+1:2*size(B,2)) = A(1,2)*B;
6 -      K(size(B,1)+1:2*size(B,1),size(B,2)+1:2*size(B,2)) = A(2,2)*B;
7 -  end
```

En la primera línea se define la función `prodk` con sus dos respectivos argumentos que en este caso serán dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, de dimensiones $m \times n$ y $p \times q$ respectivamente. Seguidamente, en las líneas 2 a 6 se establecen las condiciones que, tomando los valores de los parámetros de ambas matrices, calcularán el producto Kronecker. Finalmente, en la línea 7 se marca el final de la función.

2.4.2. Suma de una serie geométrica

Este ejercicio consiste en crear una función `ssg.m` que compute la suma de los elementos de una serie geométrica cuando $r < 1$.

Considere primero la siguiente definición y el siguiente teorema:

Definición 2.3 *Si una sucesión es de la forma* $\{a_n\} : a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}$ *se denomina sucesión geométrica de razón* r.

Teorema 2.4 *Sea una una serie geométrica* $\{S_n\} = \sum_{i=1}^{i=n} ar^{i-1}$. *Entonces, si* $r < 1$, *entonces es una sucesión convergente tal que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1+r}$

Para calcular la suma de una sucesión geométrica con las condiciones anteriores se debe introducir el siguiente código:

```
1   function G=ssg(a,r,n)
2   if r~=1
3       G=a*(1-r^n)/(1-r);
4   else r=1;
5       display('divergente');
6   end
```

Como en los casos anteriores, en las líneas 1 a 3 se define la función y se establece la condición para calcular la suma de la sucesión. No obstante, en las tres líneas siguientes se plantea un condicional adicional para el caso en el que $r = 1$, el cual hace que la suma de la sucesión sea infinita, o divergente.

3. Marco Conceptual

La investigación en la dinámica económica ha experimentado una notable transformación en las últimas décadas. Hoy en día, en todos los campos de aplicación de la economía, se tienen teorías que tratan explícitamente con agentes económicos racionales que vivien a través del tiempo en ambientes de aleatoriedad o estocásticos.

Para este análisis, un buen punto de partida es el modelo de crecimiento estocástico. Comenzando con Kydland y Prescott (1982), este marco conceptual se ha utilizado para la comprensión de las fluctuaciones en la economía global, además de que ha sido útil para proporcionar una estructura analítica para la evaluación de políticas.

3.1. Descripción del modelo

Adda y Cooper (2003) proponen un modelo de crecimiento estocástico que se basa en una economía con hogares con un horizonte temporal infinito. Cada hogar consume un solo bien (c_t), e invierte el resto (i_t). La inversión aumenta el stock de capital (k_t) con un período de rezago[7]. Existe también una tasa (exógena) a la cual se deprecia el capital, denotada por $\delta \in (0,1)$. Por ahora, se asume que hay un solo bien el cual es producido cada período a partir de los factores productivos capital y mano de obra. El capital es determinado por las decisiones de inversión en el pasado, y la mano de obra por los hogares.

Las fluctuaciones en la economía son ocasionadas por choques al proceso productivo de los bienes. Es decir, auges en la economía representan altos niveles de productividad ambos factores. Ante esto, el planeador central responderá de manera óptima a estas variaciones en la productividad ajustando la oferta de mano de obra de los hogares y las decisiones de ahorro. Desde luego, la inversión es una decisión a futuro en tanto que el nuevo capital es durable y no es productivo hasta el próximo período.

Formalmente, las preferencias de los hogares por el consumo (c_t) y el ocio (l_t) están dadas por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, l_t)$$

[7] i.e. invertir hoy crea más capital en el siguiente período

donde el factor de descuento $\beta \in (0,1)$. Se asumirá que la función $u(c,l)$ es continuamente diferenciable y estrictamente cóncava. Por otro lado, los hogares se enfrentan a una restricción en todo momento del tiempo (t) de la forma:

$$1 = l_t + n_t$$

tal que la única unidad de dotación de tiempo debe ser repartida entre ocio y trabajo (n_t).

El lado de la producción de la economía está representado por una función de producción con rendimientos constantes a escala. Dado que la escala no está determinada como tal, se modelará la economía como si hubiera una sola empresa competitiva que contrata la mano de obra de los hogares y utiliza también su el capital en el proceso de producción.

La función de producción tal y como está expresada es:

$$Y_t = A_t F(K_t, N_t)$$

donde $F(N,K)$ es una función creciente en ambos argumentos, posee retornos constantes a escala y es estrictamente cóncava. Las variaciones en la productividad, A_t, serán la fuente de las fluctuaciones en esta economía. Se debe tener en cuenta que aquí las variables en mayúsculas se refieren a los agregados económicos y las variables en minúscula son las variables per cápita de los hogares.

De manera análoga a la restricción que enfrentan los hogares, también existe también hay una restricción de recursos: la suma del consumo y la inversión no puede exceder de la producción en cada período. Esto es:

$$Y_t = C_t + I_t$$

3.2. Evolución aleatoria del modelo en el tiempo: la ecuación de Bellman

Para comenzar el análisis de esta sección, se debe suponer que el trabajo se suministra inelásticamente en una unidad por hogar. Por esta razón se considerará que las preferencias de los hogares son representadas por $u(c)$. Esto de alguna manera permite centrarse en la dinámica del problema.

Para este caso, se usa el supuesto de los retornos constantes a escala de la función $F(K,N)$ para escribir el producto per cápita (y_t) como una función estrictamente cóncava del stock de capital per cápita (k_t):

$$y_t \equiv A_t F(K_t/N, 1) \equiv A_t f(k_t)$$

Como $F(K,N)$ presenta retornos constantes a escala, $f(k)$ será estrictamente cóncava. Así, la ecuación de Bellman[8] para el modelo de crecimiento estocástico con un horizonte temporal infinito puede especificarse como

$$V(A,k) = \max_{k'} u(Af(k) + (1-\delta)k - k') + \beta E_{A'|A} V(A', k') \tag{1}$$

para todo (A,k).

Un elemento importante de este modelo es el shock de productividad multiplicativo. A través de la introducción de este choque en la economía, el modelo se construye para capturar fluctuaciones procíclicas de la productividad. Una pregunta importante es si las fluctuaciones en la producción, el empleo, el consumo, la inversión, etc., inducidos por estos choques, coinciden con lo que realmente muestran los datos.

Para el análisis cuantitativo del modelo, se parte de suponer que A es una variable acotada, discreta y aleatoria, que sigue un proceso de Markov de primer orden. La matriz de transición

[8] Para su planteamiento, la ecuación de transición al estado estacionario es $k' = Af(k) + (1-\delta)k - c$.

está dada por Π y esta es, implícitamente, usada en el valor esperado condicional de la ecuación 1.

Para el modelo de crecimiento, es importante asegurarse que el problema está acotado. Para esto, sea $\bar{k}$ que resuelve que:

$$k = A^{+} f(k) + (1-\delta)k \tag{2}$$

donde A^{+} es el mayor choque de productividad. Dado que el consumo no puede ser negativo, entonces, a partir de la ecuación de transición, el k que resuelve esta expresión es la mayor cantidad de capital que esta economía podría acumular. Además, dado que $f(k)$ es estrictamente cóncava, existirá entonces un único valor finito de $\bar{k}$ que satisface la ecuación 2. Esto implica entonces que el mayor nivel de consumo también es $\bar{k}$: el mayor consumo posible se produce cuando el stock de capital más grande es consumido en un solo período. Esta es precisamente la razón por la cual se puede acotar la utilidad a $u(\bar{k})$.

Dado que el problema ha sido acotado, existe entonces una única función de valor $V(A,k)$ que resuelve la ecuación 1. Además, se sabe que hay una función política dada por

$$k' = \phi(A,k)$$

Es así como se convierte en un objetivo clave analizar más a fondo las propiedades de esta solución. Para subrayar otro punto importante, la función política representa el puente entre el problema de optimización y los datos. La misma función política depende de los parámetros estructurales subyacentes y proporciona una relación entre las variables, algunas de las cuales son observables. Así, el problema de la inferencia es realmente claro: ¿qué es posible determinar acerca de los parámetros estructurales de las observaciones sobre la producción, el capital, el consumo, la producción, etc.?

3.3. La linealización como una solución al modelo

Si bien es posible determinar la solución al modelo a través de otros mecanismos[9] que no se abordarán en este proyecto, para esta ocasión se proporcionará un método de solución que consiste en obtener una solución a través de la linealización logarítmica.

Adda y Cooper (2003) sostienen que la linealización logarítmica permite una aproximación a la caracterización de la solución del modelo de crecimiento estocástico a través del análisis de la restricción de recursos que enfrenta la economía y la ecuación de Euler. Esta última es una condición necesaria para el óptimo y se puede obtener directamente del planteamiento del problema del planeador central. Alternativamente, utilizando la ecuación de Bellman, la condición de primer orden para el planificador es

$$u'(Af(k) + (1-\delta)k - k') = \beta E_{A'|A} V_{k'}(A', k') \tag{3}$$

para todo (A,k). Dado que $V(A,k)$ no es conocida, es posible resolver este problema para su derivada. De la ecuación 1, se tiene que

$$V_k(A,k) = u'(c)[Af'(k) + (1-\delta)]$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 3 y evaluándola en (A', k') implica que

$$u'(c) = \beta E_{A'|A} u'(c')[A'f'(k') + (1-\delta)] \tag{4}$$

donde

$$c = Af(k) + (1-\delta)k - k' \tag{5}$$

[9] La iteración de la función valor es una de las formas de solucionar el modelo apelando directamente al problema de programación dinámica.

tal que c' está definida. Estas dos expresiones, junto con la evolución de A en el tiempo (especificada a continuación), definen un sistema de ecuaciones. Así, es posible representar el modelo de crecimiento óptimo como un sistema de ecuaciones estocásticas en diferencias de primer orden en (c, k, A).
Con el fin de caracterizar de una manera aproximada esta solución, se hace necesario linealizar esta condición y la restricción de recursos alrededor del estado estacionario, (c^*, k^*). Para hacerlo, se centra el parámetro de productividad, A, a su media, $\bar{A}$. El valor de estado estacionario del stock de capital deberá entonces satisfacer que

$$1 = \beta[\bar{A}f'(k^*) + (1 - \delta)] \tag{6}$$

Además, en el estado estacionario $k' = k = k^*$, de manera que el nivel de consumo en el estado estacionario implica que

$$c^* = \bar{A}f(k^*) - \delta k^*$$

De acuerdo con Kydland et al. (1988), $\hat{c}_t$, $\hat{k}_t$ y $\hat{A}_t$ denotan el porcentaje de desviaciones de estos valores en su estado estacionario. Entonces, por ejemplo, $\hat{x}_t = \frac{x_t - x^*}{x^*}$. Se asume que en términos de las desviaciones estándar de la media los choques siguen un proceso autorregresivo de orden uno

$$\hat{A}_{t+1} = \rho\hat{A}_t + \varepsilon_{t+1}$$

donde $\rho \in (0, 1)$.

Por lo tanto, es posible reescribir la condítión de euler, ecuación 4, como:

$$\xi\hat{c}_t = \xi\hat{c}_{t+1} + \nu\rho\hat{A}_t + \nu\chi\hat{k}_{t+1} \tag{7}$$

donde ξ es la elasticidad de la utilidad marginal del consumo, $\xi \equiv \frac{u''(c^*)c^*}{u'(c^*)}$. El parámetro $\nu \equiv \beta\bar{A}f'(k^*)$ equivale a $1 - \beta(1 - \delta)$ en el estado estacionario. El parámetro ρ es la correlación de la desviación del choque del estado estacionario, y $\chi \equiv \frac{f''(k^*)k^*}{f'(k^*)}$ es la elasticidad del producto marginal del capital con respecto al capital[10].

La restricción de recursos, ecuación 5, puede aproximarse por:

$$\hat{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\hat{k}_t + \frac{\delta}{(1 - S_c)}\hat{A}_t - \frac{S_c}{(1 - S_c)}\delta\hat{c}_t \tag{8}$$

donde S_c es la participación del consumo en la producción en el estado estacionario. Es decir, la participación del consumo S_c es solo una función de parámetros de la economía como tal.

Por ejemplo, para el caso de una función de producción Cobb-Douglas, la ecuación 6 puede reescribirse como

$$1 = \beta[\alpha(y^*/k^*) + (1 - \delta)]$$

donde y^* es el nivel de producción en el estado estacionario. Ya que el nivel de inversión en el estado estacionario es $i^* = \delta k^*$, la ecuación anterior puede reescribirse como:

$$1 = \beta[\alpha\delta/(1 - S_c) + (1 - \delta)]$$

Resolviendo esta expresión,

$$(1 - S_c) = \frac{\beta\alpha\delta}{1 - \beta(1 - \delta)}$$

[10]Por ejemplo, si la función de producción es Cobb-Douglas, donde α es la participación del capital, entonces χ es simplemente $(\alpha - 1)$. De igual forma, ν solo depende del factor de descuento y de la tasa de depreciación del capital.

de manera que la participación del consumo en la producción en el estado estacionario puede calcularse directamente a partir de los parámetros dados.

Esta forma de solucionar el modelo de crecimiento estocástico entrega un sistema logarítmicamente linealizado, cuyos parámetros son determinados por la especificación dada de las preferencias, la tecnología y el el comportamiento como tal de la economía.

4. Metodología

4.1. La Tecnología de Producción y la Estructura Financiera

Siguiendo la metodología de Mendoza (1991), se asume un modelo de equilibrio general en el que se produce un bien internacionalmente transable de acuerdo a la siguiente tecnología de producción:

$$G(K_t, L_t, K_{t+1}) = \exp(e_t)K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - \left(\frac{\phi}{2}\right)(K_{t+1} - K_t)^2 \tag{9}$$

donde $0 < \alpha < 1$ y $\phi > 0$. Se define L_t y K_t como el stock de trabajo y capital en t, respectivamente. En esta expresión, el término $K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$ es una función de producción Cobb-Douglas que representa el producto interno bruto (PIB), e_t es un choque exógeno que sigue un proceso estocástico que será descrito posteriormente, y $(\phi/2)(K_{t+1} - K_t)^2$ es el costo de ajuste del stock de capital como función de la inversión neta. Intuitivamente puede justificarse la existencia de los costos de ajuste del capital en tanto que si a los agentes en una economía les resulta costoso ajustar o cambiar su capital período a período, se pueden evitar los excesos en la inversión dada la volatilidad de la tasa de interés real.

Dado que el PIB es un bien transable, e_t captura el efecto de las fluctuaciones en los términos de intercambio, tal como lo asegura Greenwood (1983). Al respecto, McCallum (1989) señala que es importante tener en cuenta las perturbaciones en los términos de intercambio en tanto que éstas constituyen choques reales que son más fáciles de medir que los mismos cambios en la productividad, además de que su rol en las fluctuaciones económicas es comunmente aceptado.

La ecuación de movimiento del capital doméstico está dada por

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{10}$$

donde I_t es la inversión bruta y $\delta \in [0,1]$ es la tasa de depreciación.

Los agentes en esta economía tienen también acceso a un mercado internacional perfectamente competitivo de capitales en el cual los activos financieros extranjeros, A_t, por los que ellos pagan o cargan una tasa de interés real r^* son intercambiados con el resto del mundo. El valor de estos activos corresponde a

$$A_{t+1} = TB_t + A_t[1 + r^* \exp(n_t)] \tag{11}$$

donde TB_t es la balanza comercial y n_t es una perturbación aleatoria que afecta la tasa de interés real mundial.
Como Mendoza (1991) lo afirma, se debe resaltar que implícitamente esta estructura financiera asume que los extranjeros no poseen capital doméstico, aunque para los agentes domésticos sea posible pedir prestado al mercado mundial de capitales para financiar proyectos de inversión.

La restricción de recursos agregada para esta economía implica que la suma del consumo (C_t), la inversión, y la balanza comercial no puede exceder producto interno bruto neto con costos de ajuste:

$$C_t + I_t + TB_t \leq \exp(e_t)K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha} - (\frac{\phi}{2})(K_{t+1} - K_t)^2 \tag{12}$$

Con esta configuración de los costos de ajuste, el costo de cambio del stock de capital en un monto fijo aumenta con la velocidad del ajuste deseado, incentivando a los agentes a llevar a cabo los cambios en sus planes de inversión de manera gradual. Esto le permite al modelo producir fluctuaciones en el precio relativo de la inversión y los bienes de consumo, la cual está dada por la siguiente tasa marginal de sustitución técnica:

$$q_t = TMST_{I_t,C_t} = 1 + \phi(I_t - \delta K_t)$$

4.2. Las Preferencias de los Agentes

La economía está compuesta por individuos idénticos, que viven infinitamente y que determinan su consumo C_t y su oferta laboral L_t, de manera intertemporal, con el fin de maximizar su utilidad cardinal estacionaria:

$$E\left[\sum_{t=0}^{\infty}\left\{(C_t - G(L_t)) \times \exp\left(-\sum_{\pi=0}^{t-1} v(C_\pi - G(L_\pi))\right)\right\}\right] \tag{13}$$

De la expresión anterior pueden diferenciarse las funciones de utilidad instantánea e intertemporal:

$$u(C_t - G(L_t)) = \frac{\left[C_t - \frac{L_t^\omega}{\omega}\right]^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \qquad \gamma > 1, \quad \omega > 1 \tag{14}$$

$$v(C_\pi - G(L_\pi)) = \beta \ln\left(1 + C_t - \frac{L_t^\omega}{\omega}\right) \qquad \beta > 0 \tag{15}$$

donde π denota la probabilidad de transición intertemporal. Más adelante se detallará sobre esta probabilidad.
Siempre que $\beta \leq \gamma$, estas dos funciones satisfacen las siguientes condiciones:

$$u(.) < 0 \qquad u'(.) > 0 \qquad u'(0) = \infty \tag{16}$$

$$\ln(-u(.)) \quad \text{convexa}$$

$$v(.) > 0 \qquad v'(.) > 0 \qquad v''(.) < 0$$

$$u(.)\exp(v(.)) \quad \text{no creciente}$$

Por un lado, la forma funcional de estas preferencias cuenta con una tasa de descuento endógena, $\exp[v(.)]$, que aumenta con el nivel del consumo pasado. En esta economía, los agentes que deseen reasignar su consumo enfrentan intertemporalmente no sólo el efecto de un cambio instantáneo en su utilidad marginal, sino también un "efecto de impaciencia" por el cual un aumento en el consumo actual reduce el peso subjetivo asignado a todos los futuros beneficios del consumo. De acuerdo con Greenwood y Gomme (1990), a medida que la tasa de descuento varíe, es probable que el efecto de impaciencia altere la elasticidad intertemporal del consumo.

Por otro lado, la forma funcional de estas preferencias está definida en términos de un bien compuesto dado por el consumo menos la desutilidad del trabajo. Por esta razón, la tasa marginal de sustitución entre el consumo y el trabajo depende solo de éste último, y por tanto el empleo se vuelve independiente de la dinámica del consumo. Esta simplificación facilita la simulación y calibración numérica, permitiendo que el modelo se centre explícitamente en la interacción de los activos extranjeros y el capital nacional como modos alternativos de ahorro, a costa de eliminar el efecto renta sobre la oferta de trabajo.

4.3. El Problema Dinámico: Una Solución al Modelo CER

La naturaleza temporal de la utilidad cardinal estacionaria, junto con la estructura estocástica simplificada descrita más adelante, implica que las reglas óptimas de decisión que caracterizan el equilibrio estocástico para esta economía pueden obtenerse resolviendo la siguiente ecuación funcional:

$$V(K_t, A_t, \lambda_t^s) = \max\{\frac{\left(C_t - \frac{\hat{L}_t^{\omega}}{\omega}\right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \exp\left[-\beta \ln\left(1 + C_t - \frac{\hat{L}_t^{\omega}}{\omega}\right)\right] \tag{17}$$

$$\times \left[\sum_{r=1}^{4} \pi_{s,r} V(K_t + 1, A_t + 1, \lambda_{t+1}^s)\right]\}$$

con respecto a C_t, K_{t+1}, y A_{t+1} y sujeto a

$$C_t = \exp(e_t) K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - (\frac{\phi}{2})(K_{t+1} - K_t)^2 - K_{t+1} + K_t(1-\delta) + [1 + r^* \exp(n_t)]A_t - A_{t+1}$$

$$\hat{L}_t = arg \max_{(L_t)} \left\{\exp(e_t) K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - \frac{\hat{L}_t^{\omega}}{\omega}\right\} \qquad K_t \geq 0, \quad L_t \geq 0, \quad C_t \geq 0.$$

La estructura estocástica del problema se simplifica asumiendo que las perturbaciones siguen un proceso de Markov. La tasa de interés y los choques de productividad tienen dos posibles realizaciones cada uno, de manera que en cada periodo la economía experimenta uno de cuatro posibles estados de la naturaleza de λ_t:

$$\lambda_t \in \Lambda = \{(e^1, n^1), (e^1, n^2), (e^2, n^1), (e^2, n^2)\} \tag{18}$$

La probabilidad de pasar del estado actual $\lambda_t^s = (n_t^x, e_t^i)$ al estado $\lambda_{t+1}^s = (n_{t+1}^x, e_{t+1}^i)$ en el siguiente período se denota como π_{sr}, para $x, i = 1, 2$ y $s, r = 1, 4$. Estas probabilidades de transición están dadas por la regla de "persistencia":

$$\pi_{sr} = (1-\theta)\Pi_r \theta p_{s,r} \tag{19}$$

En esta expresión, θ es un parámetro que regula la persistencia de e y n, Π_r es la probabilidad de largo plazo del estado λ_r, y $p_{sr} = 1$ si $s = r$ y 0 en caso contrario. Estas probabilidades de transición satisfacen las propiedades de que $0 \leq \pi_{sr} \leq 1$ y $\pi_{s1} + \pi_{s2} + \pi_{s3} + \pi_{s4} = 1$ para $s, r = 1, 4$.

MENDOZA (1991) afirma que esta estructura estocástica se simplifica aún más considerando de manera arbitraria las siguientes condiciones de simetría: $\Pi(e^1, n^1) = \Pi(e^2, n^2) = \Pi(e^1, n^2) = \Pi(e^2, n^1) = 0{,}5 - \Pi$, $e^1 = -e^2 = e$, y $n^1 = -n^2 = n$. Estas condiciones facilitan el análisis numérico al restringir el conjunto de parámetros que se especifican y relacionándolos explícitamente a los momentos estadísticos que caracterizan a los choques. En particular, las desviaciones estándar asintóticas de los choques a los términos de intercambio y a la tasa de interés están dadas por $\sigma_e = e$ y $\sigma_n = n$, respectivamente; su autocorrelación serial de primer orden está dada por $\rho_e = \rho_n = \rho = 4\Pi - 1$; y su coeficiente de correlación contemporánea es $\rho_{e,n} = \theta$. Por lo tanto, los procesos estocásticos de las dos perturbaciones se determinan completamente mediante la asignación de valores a los parámetros e, n, Π, y θ.

4.4. Valores de los Parámetros y Calibración

Para resolver el modelo, deben asignarse valores a los parámetros σ_e, σ_n, ρ, $\rho_{e,n}$, α, r^*, γ, δ, ω, β, y ϕ que caracterizan los choques estocásticos, las pareferencias de los agentes y la tecnología para esta economía. El modelo es parametrizado con valores que son consistentes con algunas de las regularidades empíricas que reflejan estudios anteriores sobre pequeñas economías abiertas.

Los valores de los parámetros σ_e y ρ se fijan para imitar la variabilidad y la autocorrelación de primer orden del PIB, y σ_n y $\rho_{e,n}$ se fijan de acuerdo a diferentes valores con el fin de explorar la sensibilidad del modelo a las perturbaciones nacionales e internacionales. Por su parte, los valores de los parámetros α (participación del caital en el producto), r^* (tasa de interés real mundial), γ (coeficiente de aversión relativo al riesgo), δ (tasa de depreciación), ω (1 más el inverso de la elasticidad de sustitución intertemporal de la oferta de trabajo), y β (elasticidad del consumo de la tasa de preferencia temporal) son seleccionado usando los datos actuales y las restricciones impuestas por la estructura del modelo, y también considerando algunas estimaciones de cierta literatura empírica relevante. Estos parámetros se fijan como sigue:

$$\alpha = 0{,}32 \qquad r^* = 0{,}04 \qquad \gamma = 1{,}001 \quad \text{ó} \quad 2 \tag{20}$$

$$\delta = 0{,}1 \qquad \omega = 1{,}455 \qquad \beta = 0{,}11$$

El valor de α es igual a 1 menos el promedio del ratio entre los ingresos laborales y los ingresos totales, según los precios de los factores. La tasa de interés mundial, r^*, es fijada de acuerdo a los valores que sugieren Kydland y Prescott (1982) y Prescott (1986) para la tasa de interés real de la economía de Estados Unidos. El parámetro γ toma dos valores diferentes en un intento de evitar la controversia en torno a las estimaciones puntuales, teniendo en cuenta las sugerencias de PRESCOTT (1986). El valor que se le asigna a la tasa de depreciación es el comúnmente usado en la literatura de los ciclos económicos reales. El valor de γ está en el largo de las estimaciones de Heckman y MaCurdy (1980) y MaCurdy (1981) obtenidas para la elasticidad de sustitución intertemporal del trabajo. El valor que se fijó permite al modelo imitar muy de cerca los resultados de la variabilidad del trabajo de acuerdo a la evidencia empírica. Dados los otros parámetros, β es determinado por la condición del estado estacionario que iguala la tasa de preferencia temporal (o factor de descuento) con $1/(1 + r^*)$.
El valor del parámetro que captura el costo de ajuste del capital, ϕ, depende en principio de si la simulación considera o no los costos de ajuste. Dado que los costos de ajuste se introducen para moderar la variabilidad de la acumulación de capital, siempre que $\phi \neq 0$ el parámetro se fija para imitar el porcentaje de la desviación estándar de la inversión. El rango a considerar es $0{,}023 \leq \phi \leq 0{,}028$, consistente con los hallazgos de Craine (1975) para la economía de EEUU.

5. Resultados

Los resultados de la tabla 1 son con base en la metodología propuesta anteriormente, y en valores de los parámetros consistentes con la revisión de literatura. Aquí se exponen resutados de las calibraciones para una pequeña economía abierta que sigue los lineamientos del modelo de ciclos económicos reales. Para el modelo base de contraste, se supone entonces una pequeña economía cerrada en la que existen costos de ajuste del capital, y una tasa de depreciación consistente con el valor comúnmente usado en la literatura de ciclos económicos reales, con el cual el modelo genera el mismo ratio IEN/PIB, tal como se observa en los resultados.

Para el primer caso de simulación, como en la mayoría de modelos de economías cerradas, si bien existe un costo de ajuste al capital que permanece constante, las perturbaciones exógenas sólo afectan productividad doméstica.
En los modelos de ciclos económicos reales para economías cerradas la inversión no es volátil dado que las decisiones de ahorro e inversión son exactamente las mismas. Por esta razón, la inversión responde al deseo de los individuos de suavizar y sustituir el consumo a lo largo del tiempo. En contraste, si se supone el ambiente de en una pequeña economía abierta como la en consideración, el suavizamiento del consumo se da a través de la cuenta corriente, mientras que la sustitución de éste no sucede dado que la tasa de interés se determina exógenamente, y por

tanto el precio del capital se sitúa en la tasa de interés real, r^*.

Cuadro 1: Momentos Estadísticos de la Simulación de los Modelos

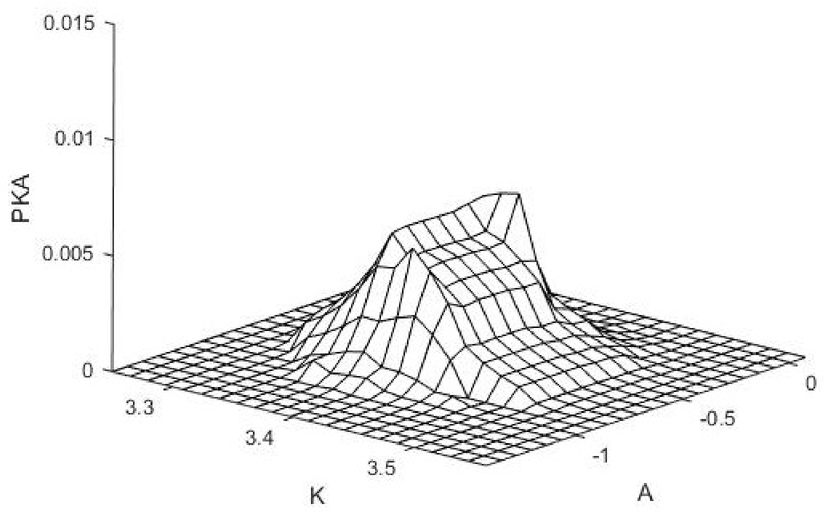
	Benchmark Model			Simulación I			Simulación II		
	$\delta = 0{,}1$, $\phi = 0{,}028$			$\delta = 0{,}0999$, $\phi = 0{,}028$			$\delta = 0{,}1$, $\phi = 0{,}025$		
Variable $(x =)$	Stock EE	μ_x	σ_x	Stock EE	μ_x	σ_x	Stock EE	μ_x	σ_x
PIB	1.49	1.49	2.68	1.49	1.49	2.67	1.49	1.49	2.70
Consumo	1.12	1.12	2.29	1.12	1.12	2.29	1.12	1.12	2.29
Capital	3.40	3.40	4.35	3.40	3.40	4.40	3.40	3.40	4.40
Trabajo	1.01	1.01	0.53	1.01	1.01	0.54	1.00	1.00	0.54
IEN	-0.59	-0.59	20.67	-0.60	-0.61	20.58	-0.59	-0.59	20.61
IEN/PIB	-0.40	-0.40	-	-0.40	-0.40	-	-0.40	-0.40	-

La inversión para este modelo de economía abierta se simula como la Inversión Extranjera Neta (IEN).
Para cada variable x, σ_x es el porcentaje de desviación estándar.

El contraste de los resultados de la simulación I con respecto al benchmark model, en el que la evolución de las perturbaciones de productividad se conoce con certeza (se conocen los costos de ajuste del capital), ofrece una clara ilustración de las fuerzas que rigen el comportamiento de la inversión tras una disminución de la tasa de depreciación. Sin incertidumbre, las personas invierten de manera óptima igualando los rendimientos marginales pagados sobre el capital y los activos extranjeros exactamente en cada período:

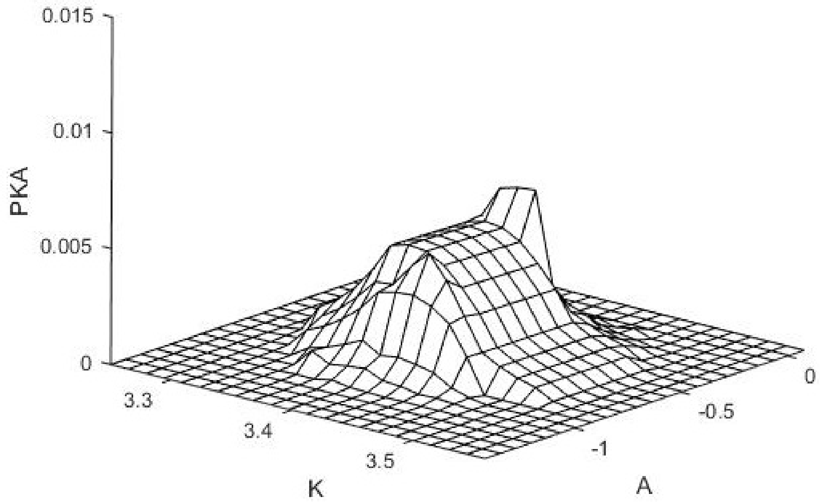
$$\exp{(e_{t+1})} F_K(K_{t+1}, \hat{L}_{t+1}) - \delta = r^* \qquad (21)$$

Figura 3: Densidad de la probabilidad marginal para el capital y los activos extranjeros en el Base Model.



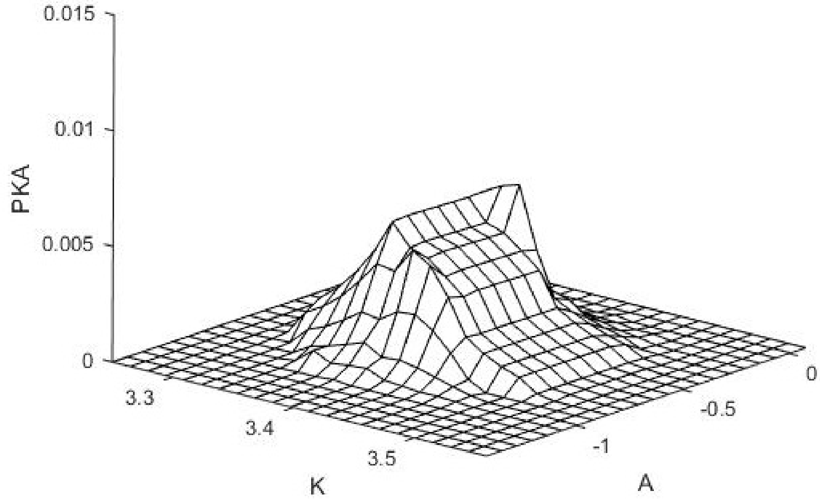
Ciertamente esto puede explicar la invariabilidad del consumo tras la reducción de la tasa de depreciación,tal y como se muestra en el cuadro 1, donde la desviación estándar del consumo tras la reducción en la tasa de depreciación permanece constante. Adicional a esto, la disminución de 9 puntos porcentuales en la desviación estándar de la inversión trajo consigo una reducción del stock de la inversión en el estado estacionario. La intuición detrás de esto es que cuando el capital se deprecia con una menor tasa, básicamente se puede acumular más y por ende debe invertir menos, tal como lo muestra el stock de inversión en el estado estacionario. Estos resultados son consistentes con la evidencia empírica y no con lo que predice el modelo básico de ciclos económicos reales en el sentido de que al ser constante la tasa de ahorro, implicaría que el consumo y la inversión son igual de volátiles, pero este resultado no es coherente con lo que muestra este modelo en el que la inversión es mucho más volátil que el consumo.

Figura 4: Densidad de la probabilidad marginal para el capital y los activos extranjeros en la simulación I



Por otro lado, de acuerdo con Mendoza (1991), analizar la extensión del benchmark model en un entorno en el que es menos costoso ajustar el capital físico cumple el objetivo de introducir fricciones en el mecanismo de inversión, sin introducir imperfecciones en los mercados financieros o la imposición de controles sobre los flujos financieros internacionales. Este objetivo es congruente con la evidencia de Dooley et al. (1987), la cual sugiere que, a pesar de que los mercados financieros pueden estar totalmente integrados, el capital físico puede no ser perfectamente móvil.

Figura 5: Densidad de la probabilidad marginal para el capital y los activos extranjeros en la simulación II



Un resultado consistente con lo que muestra la figura 5, y el porcentaje de la desviación estándar para el capital en la simulación II es que pequeños costos de ajuste hacen los individuos puedan alterar el stock de capital más rápido. Esto es así en tanto que cuanto menor sea el costo de ajustar el capital período a período, más volátil será el capital dado que los agentes van a preferir suavizar su consumo a como dé lugar (no se presenta volatilidad en el consumo).

Retomando lo anteriormente dicho, la incorporación de costos de ajuste del capital permite que varíe el precio relativo de los bienes de inversión y consumo, determinado por la tasa marginal de sutitución entre ambos. De manera que si los ajustes en el capital son mínimos alrededor del equilibrio estacionario (según los resultados del cuadro 1 son el mismo para el consumo y la inversión), el valor esperado de q_t es casi 1.

6. Conclusiones

Este proyecto trató de extender la teoría de los ciclos económicos reales a través del método de calibración en MATLAB, tomando como punto de partida unos ejercicios básicos en MATLAB y el modelo básico de crecimiento estocástico. Para este caso, se estudió el comportamiento de las variables de la demanda y la oferta agregada.
El modelo fue parametrizado y simulado bajo dos escenarios distintos: 1) una reducción en la tasa de depreciación del capital, ; y 2) una disminución en los costos de ajuste del capital. Ambas simulaciones mostraron resultados consistentes con la evidencia empírica y hechos estilizados. Por ejemplo, tras una reducción en los costos de ajuste, el modelo exagera la variabilidad en la inversión porque alterar el capital período a período es muy fácil (menos costoso). Por otro lado, se verifica empíricamente que cuando el capital se deprecia con una menor tasa, básicamente se puede acumular más y por ende debe invertir menos, tal como lo muestra el stock de inversión en el estado estacionario.

Finalmente, con esta economía artificial y los métodos numéricos que se emplearon se puede explorar cuantitativamente los efectos de políticas económicas tales como la consideración de políticas para reducir el desempleo (a través de controles y racionamientos al capital con objetivos redistributivos), políticas encaminadas a atenuar la incertidumbre en la economía, entre otras, que bien han sido objeto de estudio en los últimos años. Para esto, solo es necesario aproximar los parámetros del modelo a valores que simulen estas situaciones, siendo consistentes con la evidencia empírica de trabajos anteriores.

Referencias

Adda, J. y Cooper, R. (2003). Dynamic Economics : Quantitative Methods and Applications.

Borrell, G. (2013). Introducción informal a Matlab y Octave.

Craine, R. (1975). Investment, Adjustment Costs, and Uncertainty. International Economic Review, 16:648–61.

Dooley, M., Frankel, J., y Mathieson, D. (1987). International Capital Mobility: What Do Savings-Investment Correlations Tell Us? IMF Staff Papers, 34:503–29.

Greenwood, J. (1983). Expectations, the Exchange Rate, and the Current Account. Journal of Monetary Economics, 12:543–69.

Greenwood, J. y Gomme, P. (1990). On the Cyclical Allocation of Risk.

Heckman, J. y MaCurdy, T. (1980). A Life-Cycle Model of Female Labor Supply. Review of Economics Studies, 47:47–74.

Klee, H. y Allen, R. (2002). Simulation of dynamic systems with MATLAB and Simulink.

Kydland, F., Plosser, C., y Rebelo, S. (1988). Production, Growth, and Business Cycles. I. The Basic Neoclassical Model. Journal of Monetary Economics, 21:195–232.

Kydland, F. y Prescott, E. C. (1982). Time to Build and Aggregate Fluctuations. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 50:1345–70.

MaCurdy, T. (1981). An Empirical Investigation of Labor Supply in a Life-Cycle Setting. Journal of Political Economy, 89:1059–85.

McCallum, B. T. (1989). Real Business Cycle Models. En Modern Business Cycle Theory, páginas 16–50. Harvard University Press.

Mendoza, E. (1991). Real Business Cycles in a Small Open Economy. The American Economic Review, 81:797–818.

Prescott, E. C. (1986). Theory Ahead of Business Cycle Measurement. Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, 10(4):9–22.