

08

*La medición de la productividad y las
fuentes del crecimiento económico*

5^{ta}
edición

Técnicas de
medición
económica

Metodología y aplicaciones en Colombia

Técnicas de medición económica

Eduardo Lora
&
Sergio Ivan Prada

Asistente de investigación y edición:
Ana Melissa Pérez

Diseño y diagramación:
Sandra Marcela Moreno Bolaños

2016

Quinta edición: versión impresa y en línea

Cómo citar este libro:

Recurso en línea:

Lora, Eduardo; Prada, Sergio. Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia [en línea]. Quinta Edición. <http://www.icesi.edu.co/medicion-economica-Colombia-Eduardo-Lora-Sergio-Prada>[Consulta: día mes año].

Versión impresa:

Lora, Eduardo & Prada, Sergio (5ta Ed.)(2016). Técnicas de Medición Económica, Metodología y Aplicaciones en Colombia. Cali, Colombia: Universidad Icesi

ISBN:978-958-8936-14-7

Universidad Icesi



Introducción al libro

El propósito de este libro es estudiar de manera integrada las bases conceptuales y la metodología de las estadísticas que usan los economistas y otros científicos sociales para describir y analizar los fenómenos económicos y sociales. Las estadísticas que se estudian en este texto han sido seleccionadas por su utilidad y aplicación corriente. El libro no está dirigido a especialistas, su nivel es introductorio y su enfoque eminentemente práctico. Esta edición electrónica es gratuita y con ello aspira a llegar a un público más amplio. De ahí su estructura modular y los numerosos recursos didácticos y de consulta que contiene.

Estructura del libro

El libro está compuesto por 17 capítulos, de los cuales éste es el Capítulo 08: "La medición de la productividad y las fuentes del crecimiento económico". El esquema de la página 5 presenta la estructura del libro, que se explica a continuación. En los primeros cuatro capítulos se estudian los indicadores sociales más importantes en las áreas de demografía, mercado laboral, salud, educación, distribución de ingreso, pobreza y desarrollo humano. Los tres capítulos siguientes estudian los métodos de construcción y las aplicaciones más frecuentes de los indicadores económicos. Se empieza con un capítulo sobre índices de precios y cantidades, se estudian después los principales agregados macroeconómicos y se dedica luego un capítulo a los indicadores de coyuntura que se utilizan en Colombia para medirle el pulso a la actividad económica. Los capítulos restantes se dedican al estudio y manejo de diversos modelos de descripción económica. El análisis se aborda a partir de sistemas muy simplificados de cuentas nacionales, pasando después a los que se utilizan en la práctica en Colombia, para detenerse luego en algunas de sus aplicaciones y extensiones. Se concede una gran importancia al uso de las matrices de insumo-producto, no sólo por constituir la columna vertebral de los sistemas actuales de cuentas nacionales, sino también por sus inmensas posibilidades en numerosas áreas del análisis económico. La metodología y la interpretación de las estadísticas financieras y monetarias, de balanza de pagos y fiscales ocupan los tres últimos capítulos del libro.

Conocimientos requeridos

El lector debe tener en cuenta que algunos capítulos se construyen a partir de los temas desarrollados en capítulos anteriores, como se indica en el diagrama. Las flechas indican qué capítulos se necesitan para

abordar los demás capítulos. Los únicos que no tienen ningún prerrequisito son el Capítulo 1 (indicadores de población), el Capítulo 5 (índices de precios y cantidades) y el Capítulo 6 (conceptos de agregación económica).

Para abordar la mayoría de los capítulos se necesita un conocimiento muy elemental de álgebra y comprender el concepto y la notación de sumatoria (Σ). Éste es el nivel básico de conocimientos matemáticos a que se refiere el diagrama. El Capítulo 8 (medición de la productividad y fuentes de crecimiento económico) y el 17 (contabilidad de finanzas públicas) requieren conocimientos intermedios de matemáticas, debido a que utilizan nociones básicas de cálculo diferencial. Únicamente dos capítulos requieren nociones básicas de álgebra lineal (es a lo que nos referimos con conocimientos avanzados de matemáticas): el Capítulo 13 (matriz insumo-producto) y el Capítulo 14 (aplicaciones de la matriz insumo-producto). El recuadro inicial de cada capítulo le recuerda al lector los prerrequisitos y el nivel de matemáticas en cada caso.

Enfoque y recursos didácticos

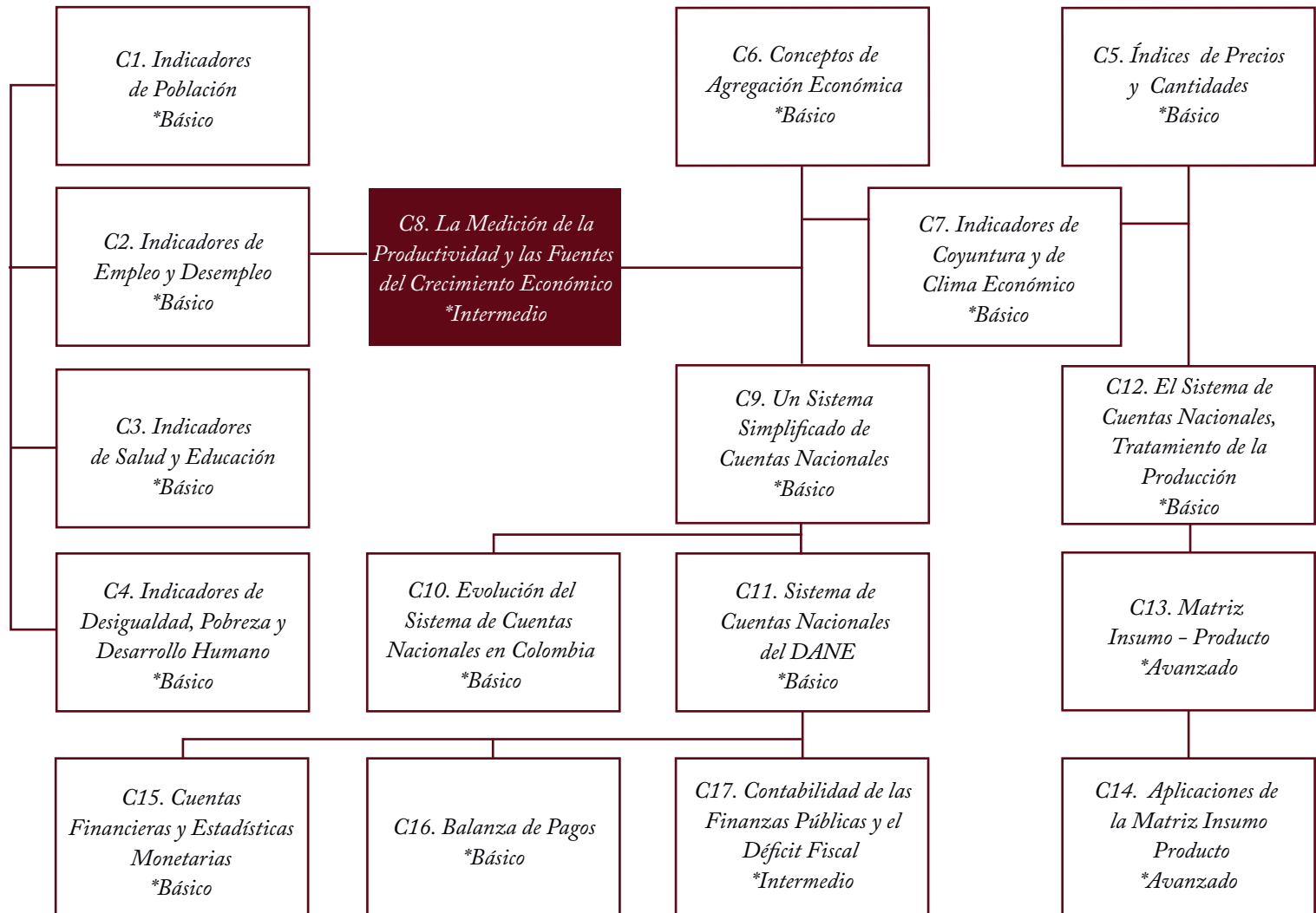
Cada capítulo incluye pequeños bocadillos en el margen izquierdo que resumen las ideas más importantes, y un cuadro al final que lista los conceptos clave que el estudiante debe dominar al terminar. Las ecuaciones que es preciso entender y manejar a la perfección están señaladas con el símbolo \otimes . Con el ánimo de inducir al estudiante a utilizar las estadísticas a lo largo de cada capítulo aparecen ejemplos sencillos, y al final se incluyen ejercicios y preguntas adicionales. Separadamente, para cada capítulo hay una hoja de Excel que contiene las soluciones a todos los ejercicios. El recurso didáctico que los profesores encontrarán más útil son las presentaciones en Power Point capítulo por capítulo.

Utilidad

Esperamos que esta versión electrónica del libro sea útil para todas aquellas personas interesadas en entender las estadísticas económicas y sociales más allá de los espacios académicos: periodistas, columnistas, políticos, líderes empresariales y sindicales, dirigente de gremios o funcionarios públicos. Entre mayor sea la comprensión de las estadísticas, mayor será la calidad del debate público sobre los problemas y políticas económicos y sociales.

*Eduardo Lora & Sergio Iván Prada
Boston (EE.UU.) y Cali, agosto de 2016.*

Contenido



Contenido

08

LA MEDICIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD Y LAS FUENTES DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO

8.1 El producto per cápita

8.2 Indicadores de productividad y dotación factorial

8.2.1 La productividad del trabajo

8.2.2 La relación capital-producto

8.3 Contabilidad del crecimiento económico y la productividad

8.3.1 Descomposición del crecimiento por las fuentes de demanda agregada

8.3.2 Descomposición del crecimiento por acumulación de factores y productividad

8.3.3 Descomposición del crecimiento de la productividad laboral

8.4 La brecha del producto

Contenido

8.5 Apéndice: tasas de crecimiento y elasticidades

8.5.1 Tasas de crecimiento de productos y cocientes

8.5.2 Tasa de crecimiento de sumas

8.5.3 Elasticidades

Conceptos clave

Preguntas y ejercicios

Soluciones a ejercicios seleccionados ()*

Bibliografía y fuentes y métodos

Capítulo
8***LA MEDICIÓN DE LA PRODUCTIVIDAD Y LAS FUENTES DEL CRECIMIENTO ECONÓMICO***

El éxito económico de un país se mide, primero que todo, por su crecimiento económico. El crecimiento suele ser el objetivo número uno de las políticas económicas de cualquier país en desarrollo. Paradójicamente, sin embargo, sólo en la década del noventa la investigación económica empírica empezó a prestar la debida atención a los temas del crecimiento, en buena medida gracias al surgimiento de nuevas teorías sobre el tema. En este capítulo se estudian los indicadores y métodos más utilizados para medir la productividad y las fuentes del crecimiento económico, que son la materia prima básica que utilizan los estudios empíricos sobre crecimiento. A diferencia del capítulo de indicadores de coyuntura (Capítulo 7), donde el horizonte de análisis eran períodos cortos de meses o a lo sumo unos pocos años, los conceptos e indicadores que se estudian en este capítulo tienen más significado en el “mediano plazo”, es decir quinquenios y decenios. En la teoría del crecimiento económico el “largo plazo” es un período remoto e indefinido en el cual tienden a converger los ingresos de los países cuyas características estructurales son semejantes. Como, en palabras de John Maynard Keynes, “en el largo plazo todos estaremos muertos”, este libro prefiere no ocuparse de ese futuro remoto.

En la primera sección del capítulo se discute el significado del *producto per cápita* y su tasa de crecimiento como medidas para comparar los niveles de desarrollo y de crecimiento económico de los países en el mediano plazo. La segunda sección se detiene en la construcción e interpretación de algunos indicadores simples que sirven para medir el nivel tecnológico y de productividad. La última sección del capítulo se ocupa de las técnicas de “contabilidad” o descomposición de las fuentes del crecimiento. Los ejercicios numéricos que se proponen al final de este capítulo exploran algunas de las posibilidades prácticas de las técnicas de medición de la productividad y las fuentes del crecimiento. Debido a que su solución requiere destreza en el manejo de tasas de crecimiento y elasticidades, como parte de este capítulo se ha agregado un apéndice matemático sobre el tema.

8.1 El producto per cápita

La tasa de crecimiento del producto per cápita es la diferencia entre el crecimiento del PIB y el crecimiento de la población total.

El *producto per cápita* es la medida más utilizada para comparar los niveles de desarrollo económico de los distintos países o de un país a través del tiempo:

$$\checkmark \quad \text{PIB}_{p.c.} = \frac{\text{PIB}}{PT}$$

donde el producto se mide por el *PIB* a valores de mercado en precios constantes (y de paridad de poder de compra si se trata de comparar distintos países)¹ y *PT* es la población total. Calculando tasas exponenciales, o instantáneas de crecimiento,² la tasa de crecimiento del *PIB per cápita*, π , es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento del producto, r , y la de la población, n ,

$$\checkmark \quad \pi = r - n$$

Ejemplo 8.1

Cálculo de la tasa de crecimiento del PIB per cápita

Suponga que entre 2010 y 2015 el *PIB* pasa de 100 a 150 billones de pesos (constantes del año 2000), mientras que la población pasa de 40 a 50 millones de personas. ¿Cuál fue la tasa de crecimiento del *PIB per cápita*?

Hay varias formas de llegar al mismo resultado. La primera es calcular el *PIB per cápita* inicial y final y deducir la tasa de crecimiento a partir de la relación entre ambos:

$$\text{PIB}_{p.c.2010} = \frac{100 \times 10^{12}}{40 \times 10^6} = 2.5 \times 10^6$$

$$\text{PIB}_{p.c.2015} = \frac{150 \times 10^{12}}{50 \times 10^6} = 3 \times 10^6$$

$$\pi = \left(\frac{3}{2.5} \right)^{\left(\frac{1}{5} \right)} - 1 = 0.037137$$

¹ Véase el Capítulo 5.

² Véase el Apéndice de este capítulo para una explicación más detallada.

Un segundo método consiste en calcular directamente las tasas de crecimiento del *PIB* total y de la población y sacar la diferencia:

$$r = \left(\frac{150}{100} \right)^{\left(\frac{1}{5}\right)} - 1 = 0.084472$$

$$n = \left(\frac{50}{40} \right)^{\left(\frac{1}{5}\right)} - 1 = 0.04564$$

$$\pi = 0.084472 - 0.04564 = 0.038832$$

Obsérvese que el resultado no es exactamente el mismo: la razón es que estamos usando tasas de crecimiento geométricas. Esto no ocurriría si hubiéramos usado tasas de crecimiento logarítmicas:

$$\pi = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{3}{2.5} \right) = 0.036464$$

$$\pi = \frac{1}{5} \left(\ln \left(\frac{150}{100} \right) - \ln \left(\frac{50}{40} \right) \right) = 0.036464$$

El producto per cápita se elevará siempre que el *PIB* crezca más de prisa que la población total, indicando que la economía ha mejorado su capacidad de atender las necesidades económicas de la población o, si se quiere, de proveer la base económica para el bienestar de la población. Sin embargo, es importante señalar varias razones por las que el *PIB* per cápita es una medida deficiente del bienestar de la población. En primer lugar, el *PIB* no comprende algunas actividades que no pueden valorarse a través del mercado, tales como los servicios de las amas de casa o los servicios que los individuos se prestan a sí mismos. Esta limitación es importante cuando se comparan países con estructuras sociales muy diferentes.

En segundo lugar, no tiene en cuenta que muchas actividades productivas tienen efectos indeseables, como la contaminación o el ruido, que reducen el bienestar. En tercer lugar, tampoco tiene en cuenta que las necesidades que tienen los individuos en condiciones sociales o naturales distintas pueden ser muy diferentes (y lo mismo puede decirse del esfuerzo para obtener un mismo nivel de producto). Y, por

último, por tratarse de una medida promedio, el *PIB* per cápita no tiene en cuenta la distribución y por tanto no es una medida representativa para quienes se apartan de ese promedio. Por consiguiente, el *PIB* per cápita es un mejor indicador de bienestar cuando se comparan momentos diferentes de un mismo país o región (siempre que no se hayan presentado cambios de importancia en la distribución del ingreso, la disponibilidad de recursos o las necesidades), que cuando se comparan países o regiones entre sí.

Por consiguiente, más que como un indicador de bienestar, el *PIB* per cápita debe verse como una medida de los resultados del esfuerzo económico, o del desarrollo económico, entendido como la capacidad de generar bienes y servicios. No obstante, como se observó en el Capítulo 6, no es la medida ideal, ya que por ser “bruta” incluye la depreciación del capital que no es un esfuerzo productivo atribuible al período corriente, y por ser calculada en valores de mercado, y no a costo de factores, incluye impuestos indirectos que no reflejan esfuerzo productivo. A pesar de estas deficiencias, es la medida que más se usa en la práctica por estar disponible y porque puede ser calculada con mayor precisión que otras medidas alternativas. Además, cuando se hacen comparaciones a través del tiempo o entre países, los problemas relacionados con la valoración a precios de mercado desaparecen, pues tales comparaciones deben hacerse siempre en precios comparables (sean éstos precios constantes en la moneda del país, o precios constantes de paridad de compra internacional, cuando se trata de comparaciones internacionales).³

El PIB per cápita colombiano es el ingreso promedio de todos los colombianos, no el ingreso del colombiano promedio.

Puesto que hay una identidad entre producto e ingreso, el *PIB* per cápita se usa también como una medida del ingreso promedio por persona. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que este uso no es estrictamente correcto porque, como vimos en el Capítulo 6, no todo el *PIB* constituye ingreso para las personas. (Habría que deducir los impuestos indirectos netos de subsidios, la depreciación del capital fijo, los ingresos netos de factores del resto del mundo, las ganancias retenidas por las empresas y las percibidas por las empresas estatales, y habría que sumar los intereses de la deuda pública y las transferencias netas recibidas por las personas). En otras palabras, sería mejor usar el ingreso personal per cápita (o el ingreso personal disponible per cápita, si además se deducen los impuestos directos). Además, cuando se quieren hacer comparaciones a través del tiempo, lo que interesaría medir sería la capacidad de compra del ingreso per cápita, para lo cual habría que utilizar como deflactor no el índice de precios de toda la producción, sino el índice de precios del consumo o de la demanda (como se analiza en el Capítulo 5). A pesar de estas limitaciones, el crecimiento del *PIB* per cápita es una medida muy buena del crecimiento del ingreso per cápita en períodos largos, porque todos estos elementos de ajuste que hemos mencionado tienden a mantenerse constantes en el mediano plazo (por ejemplo, la depreciación o los impuestos netos

³ Estos problemas se discuten en los Capítulos 6 y 13.

son proporciones aproximadamente constantes del *PIB* a lo largo del tiempo y los índices de precios de la producción y del gasto tienden a moverse muy de cerca en el mediano plazo).

En conclusión, el *PIB* per cápita es la medida más utilizada para medir el desarrollo económico, entendiendo por tal cosa la capacidad de generación de bienes y servicios por persona y, por asociación, la capacidad de generación de ingresos por persona. La tasa de crecimiento del *PIB* per cápita es una buena medida del ritmo al que mejora el nivel de desarrollo y el ingreso de la población en períodos largos, pero no necesariamente en períodos cortos. Como veremos en la sección siguiente el *PIB* per cápita no es una buena medida de productividad porque no toda la población se dedica a actividades productivas.

Para medir el desarrollo económico en forma comparativa con otros países, el *PIB* per cápita puede expresarse como una proporción del *PIB* per cápita de otro país. Para que esta comparación tenga sentido, debe hacerse en precios constantes de paridad de compra internacional (véase el Capítulo 5). Con frecuencia se utiliza a Estados Unidos como comparador, puesto que siendo el país tecnológicamente más avanzado el *PIB per cápita relativo* así calculado indica la brecha frente a la frontera tecnológica mundial. Como esa frontera se desplaza, el *PIB* per cápita relativo a través del tiempo muestra si el país en cuestión está acercándose o alejándose de dicha frontera. La velocidad a la que se acerca a esa frontera es la *tasa de convergencia*, que es igual a la diferencia entre las tasas de mediano plazo de crecimiento del producto per cápita del país y de Estados Unidos.

8.2 Indicadores de productividad y dotación factorial

8.2.1. La productividad del trabajo

El indicador más simple de productividad es la relación entre el *PIB* y el número de trabajadores, *L*, o *productividad media del trabajo*:

$$\text{✓} \quad Q = \frac{PIB}{L}$$

Puesto que esta medida es una relación entre un *flujo* –una magnitud por período de tiempo– y un *stock* o acervo –una magnitud existente en un momento dado–, su valor depende de la longitud del período considerado. Por supuesto, la productividad del trabajo es varias veces mayor por año que por mes. Usualmente, el período de medición de la productividad laboral es anual.

La productividad laboral puede expresarse con respecto al número de personas efectivamente ocupadas o con respecto a la fuerza de trabajo, es decir incluyendo también a los desempleados. Qué opción se tome influye, por supuesto, en la interpretación de los resultados, pero mantendremos en lo sucesivo la expresión genérica por brevedad (y por consiguiente, nos referiremos a L indistintamente como el número de trabajadores ocupados o como la fuerza de trabajo). Esta es una medida muy burda de productividad laboral, que puede ser refinada en diversos sentidos. Por ejemplo, puede tenerse en cuenta el número de horas de trabajo de cada individuo para obtener una medida de productividad laboral por hora. También pueden tenerse en cuenta las diferencias en los niveles de educación de los trabajadores aplicando algún ajuste que refleje, por ejemplo, que un trabajador que tiene educación universitaria equivale a más de un trabajador sin educación. La productividad laboral también puede ser calculada a distintos niveles de agregación sectorial o por regiones. En la sección siguiente exploraremos algunas de estas posibilidades.

Es importante tener presente que la productividad laboral no mide estrictamente el aporte que cada trabajador hace al producto total, porque ignora la existencia de otros factores productivos que también contribuyen a la producción. Por consiguiente, no debe confundirse con la productividad marginal del trabajo, que es una aproximación mejor a ese concepto de aporte al producto. Eso explica también por qué la productividad laboral y el salario son cosas distintas, siendo usualmente mayor la productividad laboral que el salario.

Es importante entender, además, la relación entre el PIB per cápita y la productividad media del trabajo. Obsérvese que:

$$PIB_{p.c.} = \frac{PIB}{PT} = \frac{PIB}{L} \frac{L}{PET} \frac{PET}{PT}$$

por consiguiente:

$$\textcircled{\checkmark} \quad PIB_{p.c.} = Q \times TO \times TET$$

Si L se refiere a trabajadores efectivamente ocupados, TO es la tasa de ocupación (de la población en edad de trabajar, como en el Capítulo 2), y TET es la proporción de la población total que está en edad de trabajar (proporción que está asociada al concepto de tasa de dependencia que se introdujo en el Capítulo 1). De esta manera, el PIB per cápita es el resultado combinado de la productividad media del trabajo, la tasa de ocupación y la estructura de edades de la población. A través del tiempo esto implica que:

$$\pi = q + o + e$$

es decir que el crecimiento del producto per cápita, π , es el resultado del crecimiento de la productividad laboral, q , el crecimiento de la tasa de ocupación de la población en edad de trabajar, o , y el crecimiento de la participación de la población en edad de trabajar en la población total, e (nótese que e es también igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar y la tasa de crecimiento de la población total).

Esto explica por qué el producto per cápita no es una medida de productividad. También explica por qué el crecimiento del producto per cápita sólo en parte se debe al aumento de la productividad laboral. En efecto, en las economías en desarrollo, ni la tasa de ocupación ni la composición por edades de la población son constantes a través del tiempo. En las etapas tempranas de desarrollo la tasa de ocupación cae, y luego aumenta en forma continua. Esta forma de U se debe a que con el proceso de urbanización que acompaña a las primeras etapas del desarrollo se reduce la participación laboral de la mujer, pero luego aumenta en la medida en que se eleva la educación femenina y se reduce la fertilidad, permitiendo a las mujeres incorporarse más a la vida laboral. Por su parte, la participación de la población en edad de trabajar en la población total tiende a caer también en las primeras etapas al bajar la mortalidad infantil, pero luego aumenta gradualmente a medida que avanza el proceso de transición demográfica (aunque al final de ese proceso vuelve a caer cuando aumenta la población mayor).

El crecimiento del PIB per cápita refleja sobre todo el comportamiento de la productividad laboral, pero está afectado también por los cambios en la tasa de ocupación.

Ejemplo 8.2

Cálculo de la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo

Suponga nuevamente que entre 2010 y 2015 el PIB pasó de 100 a 150 billones de pesos (constantes del año 2000) y que la población en edad de trabajar aumentó de 40 a 50 millones de personas. Tenga ahora en cuenta que la población en edad de trabajar pasó del 60% al 65% de la población total, y que la tasa de ocupación se redujo de 75% a 72%. ¿A qué tasa cambió la productividad del trabajo?

La tasa de crecimiento de la productividad del trabajo es, a partir de la última ecuación

$$\pi = q - o - e$$

Por consiguiente

$$q = \frac{1}{5} \left(\ln\left(\frac{3}{2.5}\right) - \ln\left(\frac{0.72}{0.75}\right) - \ln\left(\frac{0.65}{0.60}\right) \right)$$

$$q = 0.02862$$

Observe que esta tasa es menor de la de crecimiento del producto per cápita. ¿Entiende por qué?

Deduzca cómo calcular la tasa de crecimiento de la productividad laboral a partir del *PIB* y la población ocupada y haga los cálculos para comprobar que obtiene el mismo resultado.

8.2.2 La relación capital-producto

Como se ha mencionado, la productividad media del trabajo no mide el aporte de cada trabajador al producto total, porque otros factores productivos también contribuyen a la generación del producto. De la misma forma y haciendo la misma advertencia, podría hablarse de la productividad media del capital como la relación entre el *PIB* y el acervo de capital. Esta relación, sin embargo, se usa más en sentido opuesto, es decir como el cociente entre el acervo del capital existente en la economía, *K*, y el nivel de producción, *PIB*,

$$\text{Ⓢ} \quad K = \frac{K}{PIB}$$

La *relación capital-producto* puede interpretarse de dos formas. Primero, como una medida que permite saber qué cantidad de producto puede obtenerse con un acervo de capital. Esta interpretación requiere tener en cuenta el nivel de utilización del capital, de manera que la obtención de una cantidad de producto por debajo del potencial significa que el capital no es utilizado a plena capacidad (en forma análoga a lo que ocurre con el desempleo cuando se trata de la productividad laboral). La interpretación alternativa, de relevancia para análisis prospectivos, es considerar la relación capital-producto como un indicador de la cantidad de capital requerido para obtener un cierto nivel de producción. Para este propósito, tiene más sentido utilizar la *relación marginal capital-producto* que compara el incremento en el acervo de capital con el aumento en la producción en un período:

$$\textcircled{\checkmark} \quad K' = \frac{\Delta K}{\Delta \text{PIB}}$$

donde ΔK , que simboliza la nueva formación de capital es, por definición, lo mismo que la inversión neta de la economía en el período. (Por supuesto, si la relación capital-producto puede suponerse constante a través del tiempo, entonces será igual a la *relación marginal capital-producto*). Con esta segunda interpretación la *relación capital-producto* era un concepto clave en los ejercicios de planificación económica de décadas pasadas, pero ha entrado en desuso porque ha quedado demostrado que no hay una forma confiable de medir los requerimientos de capital por unidad de producto a nivel agregado.

La relación marginal capital-producto es una medida de la cantidad de capital adicional que se requiere para generar una unidad adicional de producto.

La medición del acervo de capital presenta algunas dificultades. Como el capital existente en un momento dado es la acumulación de bienes producidos en diferentes períodos pasados, pero a precios diferentes en cada período, no sería correcto calcular su valor actual simplemente como la suma del valor de los bienes de capital producidos en el pasado. Es preciso, por tanto, eliminar las variaciones de los precios utilizando los métodos explicados en el Capítulo 5. Se debe deducir, además, el desgaste físico del capital en cada período en el pasado y la obsolescencia del capital remanente, cálculos que son difíciles en la práctica (de hecho, en las cuentas nacionales de Colombia no se calcula la depreciación del capital, como veremos en otros capítulos). Un método que se usa comúnmente consiste en aplicar una tasa fija de depreciación al *stock* de capital del período pasado y agregarle la inversión bruta, obteniendo así un estimado del *stock* del período siguiente, y así sucesivamente.

La relación capital-producto y la productividad por trabajador están relacionadas entre sí por medio de la *relación capital-trabajo*, como puede verse en la siguiente expresión:

$$\textcircled{\checkmark} \quad \frac{K}{L} = \frac{K}{\text{PIB}} \frac{\text{PIB}}{L}$$

Este coeficiente es un indicador tecnológico de la dotación media de capital por trabajador y puede interpretarse también como una medida de los requerimientos promedio de capital por trabajador (con las mismas salvedades mencionadas con respecto a la relación capital-producto).

8.3 Contabilidad del crecimiento económico y la productividad

Por contabilidad del crecimiento económico puede entenderse cualquier método de descomposición de los elementos que contribuyen directamente al crecimiento del *PIB*. En esta sección se presentan las bases matemáticas de algunos de los métodos más utilizados. Para facilitar la lectura se sugiere familiarizarse primero con el Apéndice de este capítulo.

8.3.1 Descomposición del crecimiento por las fuentes de demanda agregada

Para empezar, se puede tener una contabilidad del crecimiento a partir de los componentes o *fuentes de la demanda agregada*. Se puede partir de:

$$Y = C + I + G + X - M$$

entonces:

$$\Delta Y = \Delta C + \Delta I + \Delta G + \Delta X - \Delta M$$

dividiendo ambos lados por Y , y multiplicando y dividiendo cada elemento del lado derecho por su valor inicial:

$$\frac{\Delta Y}{Y_0} = \frac{\Delta C}{C_0} \times \frac{C_0}{Y_0} + \frac{\Delta I}{I_0} \times \frac{I_0}{Y_0} + \frac{\Delta G}{G_0} \times \frac{G_0}{Y_0} + \frac{\Delta X}{X_0} \times \frac{X_0}{Y_0} + \frac{\Delta M}{M_0} \times \frac{M_0}{Y_0}$$

La contribución de cada fuente de demanda agregada al crecimiento económico total es el producto del crecimiento de dicha fuente por su participación en la demanda agregada total.

lo que también puede escribirse como:

$$\checkmark \quad \dot{Y} = \dot{C} \times c_0 + \dot{I} \times i_0 + \dot{G} \times g_0 + \dot{X} \times x_0 - \dot{M} \times m_0$$

donde el símbolo $\dot{\cdot}$ encima de una variable representa tasa de variación, y las letras en minúscula son las participaciones (iniciales) de los componentes de demanda en el *PIB*.

En esta descomposición, la contribución de cada fuente de demanda agregada al crecimiento total es el producto del crecimiento de dicha fuente por su participación en la demanda agregada total. Es importante notar, sin embargo, que se trata de una mera descomposición contable, no de una *explicación causal* del crecimiento. Por ejemplo, sería un error creer que aumentando el gasto público, G puede conseguirse aumentar el PIB en igual cantidad. Ello sólo ocurriría si no cambia ningún otro componente de la demanda al cambiar el gasto público y si no hay restricciones que impidan el aumento del producto. En general, ése no es el caso, y es posible que el PIB crezca más o menos, e incluso que caiga, cuando aumenta el gasto del gobierno. Por supuesto, este es uno de los temas centrales de la macroeconomía, pero no es el objeto de este libro. La descomposición con base en la demanda es, en todo caso, la base de algunas teorías macroeconómicas muy elementales (*véanse* los ejercicios al final de este capítulo).

8.3.2 Descomposición del crecimiento por acumulación de factores y productividad

Un método de descomposición de las fuentes del crecimiento mucho más utilizado en la actualidad es el que se basa no en las fuentes de demanda, sino en los factores productivos. Este método tiene más contenido teórico (es decir, más supuestos de comportamiento de la economía) que la descomposición anterior. La razón es que para conocer la contribución de cada factor productivo hay que suponer que la producción agregada responde a una función de producción (lo que, por supuesto, es una simplificación de la realidad). La *función de producción* que suele suponerse es la *Cobb-Douglas*, debido en parte a la facilidad con que puede manipularse matemáticamente, y en parte a que una de sus propiedades se creía que reflejaba relativamente bien la realidad (en un momento veremos cuál es esa propiedad):

$$\textcircled{\checkmark} \quad Y = AK^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

donde K representa el acervo de capital, L la fuerza de trabajo o el número de ocupados, y A es un parámetro de eficiencia que refleja la productividad con la que se usan esos factores productivos, es decir es una medida de la *productividad total de los factores*, PTF . La conveniencia matemática de esta expresión resulta de que cuando se toman logaritmos naturales a ambos lados, tal que:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L$$

y luego se deriva totalmente (es decir, se toman los cambios respecto al tiempo),

$$\delta \ln Y = \delta \ln A + \alpha \delta \ln K + (1 - \alpha) \delta \ln L$$

entonces se obtiene una expresión muy simple que dice que el crecimiento económico g (que, medido en tasa de crecimiento continuo es lo mismo que δ) resulta del crecimiento de la productividad total de los factores, a , más el promedio ponderado del crecimiento de los dos factores productivos:

$$\text{✓} \quad g = a + \alpha \dot{K} + (1 - \alpha) \dot{L}$$

El crecimiento económico puede descomponerse en la contribución de capital, la contribución del trabajo y el crecimiento de la productividad total de factores.

La propiedad interesante desde el punto de vista económico es que los coeficientes de ponderación α y $(1 - \alpha)$ representan la participación en el ingreso del capital y el trabajo, respectivamente (véanse los ejercicios). En una función Cobb-Douglas, esos coeficientes de ponderación son constantes. Pues bien, resulta que, históricamente, la participación del trabajo (o del capital) en el ingreso era bastante estable en el tiempo (en los países desarrollados para los que se tenía buena información), constituyendo un “hecho estilizado” aceptado por los economistas. Sin embargo desde la década de 1970 la participación del trabajo en el ingreso ha caído fuertemente en casi todo los países desarrollados, poniendo en cuestión la validez de la función Cobb-Douglas.⁴ Aun así, la descomposición de las fuentes del crecimiento que acabamos de explicar continúa utilizándose universalmente.

Ejemplo 8.3

Descomposición de las fuentes de crecimiento

Suponiendo que la participación del trabajo en el producto es 40%, descomponga el crecimiento promedio anual según sus fuentes sabiendo que entre 2005 y 2015 el PIB creció 30%, la fuerza de trabajo 18% y el capital 35%.

Aplicando la última ecuación, esto implica que

$$0.30 = a + 0.6 \times 0.35 + 0.4 \times 0.18$$

⁴ Véase Piketty, Thomas. El Capital en el Siglo XXI. RBA Libros, 2015.

De donde se deduce que el aporte de la productividad (a) fue 0.018, el del capital 0.21 y el del trabajo 0.072. Puesto que nos piden tasas anuales y fueron 10 años, utilizando tasas continuas (es decir, tomando logaritmos naturales de 1+variación entre los dos períodos y dividiendo por 10), obtenemos lo siguiente:

$$0.026236 = 0.001784 + 0.019062 + 0.006953$$

Por consiguiente, el crecimiento anual de 2.62% se descompone en 0.18% debido a la productividad, 1.91% debido al capital y 0.70% debido al trabajo. (Sugerencia: reproduzca los cálculos en una hoja de Excel y hágalos de nuevo con tasas de crecimiento geométricas).

La productividad total de los factores suele calcularse por residuo.

Obsérvese ahora algo curioso, pero fundamental. Si el crecimiento del producto fuera distribuido completamente en aumentos del ingreso para el capital y el trabajo de acuerdo con sus ponderaciones relativas y el aumento en sus cantidades, no quedaría sobrando nada. Pero nuestra última expresión y el Ejemplo 8.3 dicen que sí puede quedar sobrando algo: *el crecimiento de la productividad total de los factores, a* . A este sobrante se le conoce con el nombre de residuo de Solow, por Robert Solow, el creador de la contabilidad del crecimiento a partir de los factores de producción⁵.

Una limitación del método sencillo de descomposición que hemos presentado es que no diferencia entre tipos de mano de obra. La productividad de un trabajador altamente calificado debe ser mayor que la de un trabajador analfabeto, y eso debería reflejarse en la forma de hacer las cuentas. Una forma simple de resolver el problema es introducir un factor H que mide el número promedio de años de educación de la fuerza de trabajo (o el capital humano por persona), de forma que el producto de la economía sería:

$$\text{Ⓢ} \quad Y = AK^\alpha + (L \times H)^{(1-\alpha)}$$

Y la descomposición del crecimiento sería ahora el resultado del aumento de la productividad, el aumento del capital físico, el aumento de la oferta laboral y el aumento de la educación de la mano de obra:

$$\text{Ⓢ} \quad g = a + \alpha \dot{K} + (1 - \alpha) \dot{L} + (1 - \alpha) \dot{H}$$

⁵ Robert M. Solow, "A Contribution to the Theory of Economic Growth", Quarterly Journal of Economics, febrero 1956: 65-94.

8.3.3 Descomposición del crecimiento de la productividad laboral

Una forma alternativa de expresar la función Cobb-Douglas es

$$Y = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha L$$

De donde se sigue que la productividad por trabajador es

$$\textcircled{\surd} \quad \frac{Y}{L} = A \left(\frac{K}{L} \right)^\alpha$$

Por consiguiente el crecimiento de la productividad laboral (q) puede verse como el resultado del crecimiento en la productividad total de los factores (a) y el crecimiento de la relación capital-trabajo multiplicado por el parámetro α :

$$\textcircled{\surd} \quad q = a + \left(\frac{\dot{K}}{L} \right) \alpha$$

Otro método de descomposición de la productividad laboral que es importante entender se basa en el origen sectorial de la producción. Considérese una economía compuesta por un sector productivo tradicional (T) y uno moderno (M). La productividad laboral promedio en esa economía es, por definición, el promedio ponderado de las productividades laborales de los dos sectores, donde las ponderaciones t y m son la participación de la fuerza laboral de cada sector en la fuerza laboral total:

$$\frac{Y}{L} = t \left(\frac{Y}{L} \right)_t + m \left(\frac{Y}{L} \right)_m$$

Por consiguiente, el cambio de la productividad laboral de esta economía será:

$$\Delta \left(\frac{Y}{L} \right) = \Delta t \left(\frac{Y}{L} \right)_t + t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t + \Delta t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t + \Delta m \left(\frac{Y}{L} \right)_m + m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m + \Delta m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m$$

Puesto que $\Delta t = -\Delta m$ (ya que la participación que gana un sector la pierde el otro), podemos reescribir lo anterior como:

$$\textcircled{\ast} \quad \Delta \left(\frac{Y}{L} \right) = \Delta m \left[\left(\frac{Y}{L} \right)_m - \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right] + \left[m \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m + t \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right] + \Delta m \left[\Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_m - \Delta \left(\frac{Y}{L} \right)_t \right]$$

Así, el cambio en la productividad laboral total es el resultado de tres sumandos, que miden, respectivamente, la reasignación de la fuerza de trabajo del sector tradicional hacia el sector moderno, los aumentos de productividad dentro de cada uno de los dos sectores y la interacción entre la reasignación laboral y los aumentos de productividad.

Este análisis puede generalizarse a más sectores. En las economías de muy bajo nivel de desarrollo los aumentos en la productividad promedio del trabajo ocurren, en su mayor parte, por reasignación entre sectores (el primer sumando), mientras que en las economías más maduras se originan en aumentos de productividad dentro de los sectores (el segundo sumando). En ambos casos, el tercer sumando es de menor importancia.

8.4 La brecha del producto

Por lo general, la economía va y viene entre momentos donde la actividad productiva es dinámica (auges) y épocas donde la producción se desacelera o cae (recesiones). Este comportamiento en forma de péndulo se conoce como el ciclo económico. La mayoría de las decisiones de política macroeconómica dependen del momento del ciclo en el que se encuentra la economía. Las decisiones que se toman durante una época de auge son muy diferentes a las que se toman en momentos de recesión. Por esta razón es muy importante contar con varias medidas del ciclo económico. La brecha del producto es una de estas medidas.

Tal como hemos visto a lo largo de este capítulo, la teoría económica permite afirmar que la producción agregada de un país proviene del aprovechamiento de los factores de producción (trabajo y capital). Entre mayor sea la cantidad y calidad de los factores de producción y la eficiencia con que se usen, mayor es la producción agregada que podría llegar a alcanzar una economía. Esta es la explicación económica detrás de la descomposición del crecimiento por acumulación de factores y productividad. Sin embargo, la teoría económica también indica que puede existir una diferencia entre la cantidad de factores de producción disponibles y el uso efectivo de ellos en los procesos de producción. Esto es particularmente claro en el caso del capital y dicha brecha se verá reflejada en el nivel de producción agregada del país.

Para entender mejor la diferencia entre la cantidad de factores de producción disponibles y el uso efectivo de los factores, piense en una mina de carbón. La cantidad de carbón que puede extraer esta mina depende del número de excavadoras y el número de empleados que tenga a su disposición. En condiciones económicas normales, la mina opera con un único turno de producción y las excavadoras funcionan durante ocho horas al día. Ahora, imagine que la economía entra en una fase de auge económico y la mina está interesada en aumentar su producción de carbón. Para hacerlo, puede implementar un segundo turno de trabajo para que las excavadoras funcionen durante 16 horas al día. Por el contrario, piense ahora que la economía entra en una fase de recesión económica que obliga a la mina a reducir su producción. Es posible que el turno de trabajo se reduzca a únicamente cuatro horas diarias. Nótese que en todo momento el número de excavadoras a disposición de la mina era el mismo. La diferencia en cada caso es el número de horas durante las cuales las excavadoras son utilizadas. Este ejemplo ilustra cómo el nivel de producción depende tanto de la cantidad de factores de producción disponibles (número de excavadoras), como del uso efectivo de los mismos (número y longitud de los turnos de trabajo).

La importancia de ambos conceptos permite pensar en una descomposición de la producción agregada en dos partes: una fracción que está determinada por la cantidad de factores de producción disponibles y otra que depende del uso efectivo de tales factores. La primera de estas fracciones se denomina *producto potencial* y la segunda se llama *producto cíclico*, es decir:

$$\text{Ⓢ} \quad Y = Y^{\text{POTENCIAL}} + Y^{\text{CÍCLICO}}$$

$Y^{\text{POTENCIAL}}$ es el valor del producto agregado que se obtiene si los factores de producción se utilizan bajo circunstancias económicas normales. En cambio, $Y^{\text{CÍCLICO}}$ es el efecto sobre el producto agregado debido a la sobreutilización o subutilización de los factores de producción. Esto quiere decir que el uso efectivo de los factores de producción depende del momento del ciclo económico en cual se encuentra la economía.

Durante auge económicos, los factores de producción son sobreutilizados y el efecto del producto cíclico es positivo. Nótese que en tales circunstancias, el producto agregado es mayor que el producto potencial ($Y > Y^{POTENCIAL}$). En cambio, cuando la economía atraviesa una época de desaceleración o recesión económica, los factores de producción son subutilizados y el efecto del producto cíclico es negativo. Por lo tanto, durante dichas épocas el producto agregado es menor que el producto potencial ($Y < Y^{POTENCIAL}$).

La brecha del producto mide la distancia entre el producto agregado observado y el producto agregado potencial. Por definición,

La brecha del producto es la distancia relativa entre el PIB observado y el PIB potencial.

$$\textcircled{\checkmark} \text{ Brecha} = \frac{1 - Y^{POTENCIAL}}{Y^{POTENCIAL}} \times 100 = \frac{Y^{CÍCLICO}}{Y^{POTENCIAL}} \times 100$$

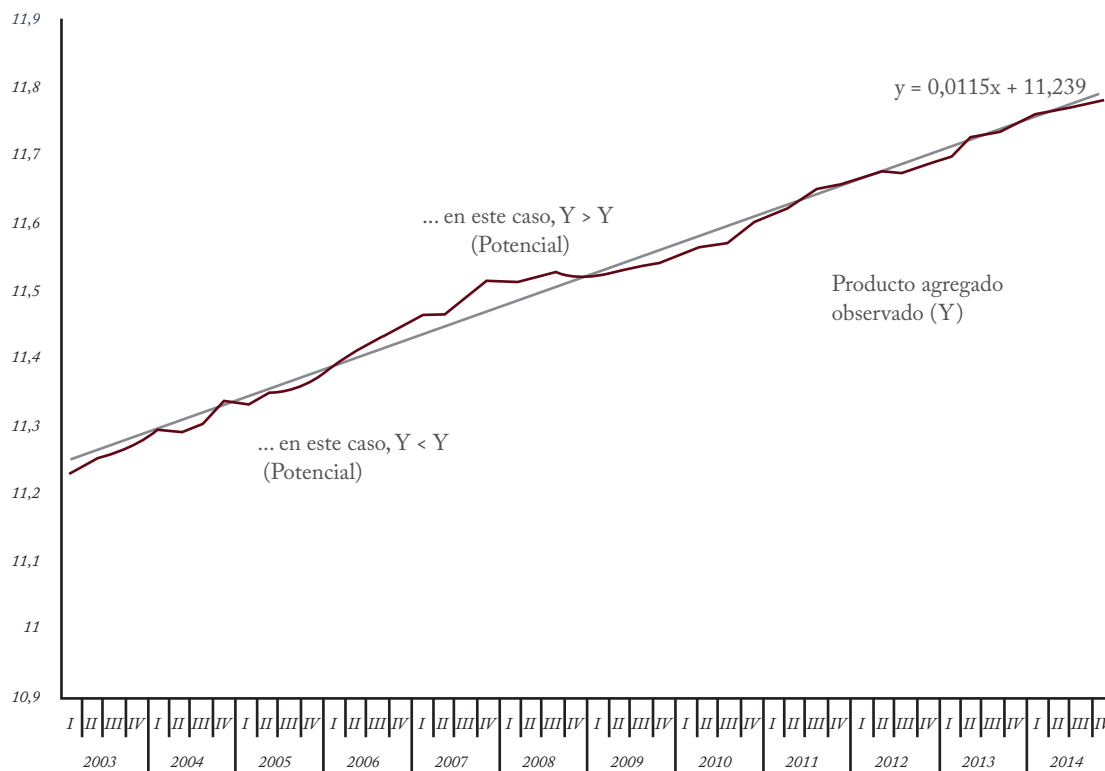
es decir, la *brecha del producto* corresponde al producto cíclico medido como proporción del producto potencial. Dado que el producto cíclico puede ser positivo o negativo, la brecha del producto también puede tomar cualquier de estos dos signos.

El principal reto metodológico para calcular la brecha del producto consiste en obtener una medida del producto potencial. El producto agregado observado (Y) corresponde al producto interno bruto a precios constantes del sistema de cuentas nacionales. Sin embargo, tanto el producto cíclico como el producto potencial son variables económicas que no se pueden medir de forma directa. Por lo tanto, es necesario estimar por medio de algún procedimiento econométrico el producto potencial. Una vez estimado, el producto cíclico se calcula como el residuo entre el producto observado y el potencial.

Una forma elemental de calcular el producto potencial consiste en estimar una línea de tendencia del *PIB* (en logaritmos), como se presenta en el Gráfico 8.1. El uso de logaritmos permite interpretar la pendiente de la línea de tendencia como la tasa de crecimiento *trimestral* promedio del período: 1,15%. Nótese que esta es la tasa trimestral de crecimiento porque los datos son trimestrales.

Gráfico 8.1

*Producto agregado observado y potencial para Colombia
Billones de pesos constantes de 2005 (en logaritmos)*



Ejemplo 8.4*Cálculo del producto cíclico y brecha del producto*

A continuación aparecen el producto observado y el producto potencial de Colombia para los primeros trimestres entre 2000 y 2011 (utilizando la misma información del Gráfico 8.1, expresada en billones de pesos constantes de 2005, no en logaritmos).

<i>Año-Trimestre</i>	<i>Producto observado</i>	<i>Producto potencial</i>
2003-I	75,431	76,918
2004-I	80,090	80,539
2005-I	83,438	84,331
2006-I	87,933	88,300
2007-I	94,927	92,457
2008-I	97,595	96,809
2009-I	100,821	101,367
2010-I	104,419	106,138
2011-I	110,357	111,135
2012-I	116,823	116,367
2013-I	120,122	121,844
2014-I	127,782	127,580

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales Trimestrales.

Con la información anterior, se puede calcular el producto cíclico aplicando la fórmula:

$$Y^{\text{CÍCLICO}} = Y - Y^{\text{POTENCIAL}}$$

Y, a partir de ahí, se puede calcular la brecha del producto con la ecuación:

$$\text{Brecha} = \frac{Y^{\text{CÍCLICO}}}{Y^{\text{POTENCIAL}}} \times 100$$

Los resultados son:

<i>Año-Trimestre</i>	<i>Producto observado</i>	<i>Producto potencial</i>	<i>Producto cíclico</i>	<i>Brecha del producto</i>
2003-I	75,431	76,918	-1,487	-1.9%
2004-I	80,090	80,539	-449	-0.6%
2005-I	83,438	84,331	-893	-1.1%
2006-I	87,933	88,300	-367	-0.4%
2007-I	94,927	92,457	2,470	2.7%
2008-I	97,595	96,809	786	0.8%
2009-I	100,821	101,367	-546	-0.5%
2010-I	104,419	106,138	-1,719	-1.6%
2011-I	110,357	111,135	-778	-0.7%
2012-I	116,823	116,367	456	0.4%
2013-I	120,122	121,844	-1,722	-1.4%
2014-I	127,782	127,580	202	0.2%

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales Trimestrales.

8.5 Apéndice: tasas de crecimiento y elasticidades

En este apéndice se ofrecen algunas reglas prácticas para el manejo de tasas de crecimiento en expresiones que contienen más de una variable. Una demostración formal supera el alcance de este libro. Se remite al lector interesado en un tratamiento más riguroso a cualquiera de los libros de texto de matemáticas citados en la bibliografía al final del capítulo.

8.5.1 Tasas de crecimiento de productos y cocientes

Para resolver muchos problemas económicos es conveniente contar con un método de cálculo de la *tasa de crecimiento de un producto o un cociente* a partir de las tasas de crecimiento de las variables involucradas. Supóngase que el *PIB* ha sido definido (tautológicamente) como el producto de la productividad media por hombre, Q por el número de trabajadores, L ,

$$PIB = Q \cdot L$$

Se trata de determinar la tasa de crecimiento del *PIB* a partir de las tasas de crecimiento de *Q* y *L*. El procedimiento general que se sigue para deducir el método de cálculo es el siguiente:

1. Se deriva totalmente la expresión,

$$\delta PIB = L\delta Q + Q\delta L$$

2. Se divide cada lado de esta ecuación por el respectivo lado de la ecuación original

$$\frac{\partial PIB}{PIB} = \frac{L\partial Q}{QL} + \frac{Q\partial L}{QL}$$

3. Se simplifican los términos del lado derecho y se tiene así el resultado buscado:

$$\textcircled{\surd} \quad \frac{\partial PIB}{PIB} = \frac{\partial Q}{Q} + \frac{\partial L}{L}$$

La tasa de crecimiento de un producto es, por tanto, la suma de las tasas de crecimiento de los factores (nótese que como no estamos usando subíndices de tiempo, aquí y en lo sucesivo las variables en niveles, que aparecen en este caso en el denominador, se refieren al período inicial). Este método sólo es estrictamente exacto cuando las diferencias son de un tamaño infinitesimal y, en consecuencia, corresponden a las derivadas de las variables. Con diferencias de tamaños finitos, se tendría que

$$\Delta PIB = L\Delta Q + Q\Delta L + \Delta Q\Delta L$$

De donde se deduce que

$$\textcircled{\surd} \quad \frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta Q}{Q} \frac{\Delta L}{L}$$

Por consiguiente, el error resultaría del hecho de que se debería tener en cuenta un tercer término equivalente al producto de las tasas de crecimiento de las dos variables explicativas.

Si se consideran diferencias infinitesimales puede llegarse también al resultado de más arriba por un método alternativo:

1. Se toman logaritmos de la expresión inicial

$$\ln PIB = \ln Q + \ln L$$

2. Se deriva totalmente

$$\partial \ln PIB = \partial \ln Q + \partial \ln L$$

Este resultado es igual al anterior para diferencias infinitesimales, toda vez que, en general, una derivada logarítmica es equivalente a una tasa de crecimiento.

$$\textcircled{\checkmark} \quad \partial \ln PIB = \partial \ln Q + \partial \ln L$$

Las tasas de crecimiento para variaciones infinitesimales se conocen con el nombre de “continuas” o *instantáneas*,⁶ puesto que realmente corresponden al crecimiento de una variable que cambia de manera continua a través del tiempo y no en forma periódica o en diferencias. Esto hace que las tasas de crecimiento logarítmicas sean ligeramente inferiores a las calculadas para períodos discretos, aunque la diferencia no es significativa cuando se trabaja con tasas próximas a cero y períodos cortos, como a menudo es el caso en análisis económicos. Si se tiene una tasa de crecimiento *discreto*, puede convertirse a una tasa de crecimiento continuo mediante

$$\textcircled{\checkmark} \quad g = \ln (1 + r)$$

Donde g es la tasa continua y r la tasa periódica o geométrica.

⁶ En demografía se les llama también “exponenciales, y así las hemos llamado en el Capítulo 1.

Supóngase ahora que se tiene una variable que se define como un cociente entre otras dos variables, por ejemplo, la productividad por hombre, Q

$$Q = \frac{PIB}{L}$$

Siguiendo cualquiera de los dos métodos anteriores se establece que

$$\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial PIB}{PIB} - \frac{\partial L}{L}$$

lo que, utilizando la simbología ya introducida en este capítulo, puede escribirse como

$$\textcircled{\checkmark} \quad q = g - e$$

Se deducen así dos reglas prácticas y una advertencia:

1. La tasa de crecimiento de un producto es la suma de las tasas de crecimiento de los factores.
2. La tasa de crecimiento de un cociente es la diferencia entre las tasas de crecimiento del numerador menos la del denominador. Éstas son las dos reglas.
3. La advertencia es que tales reglas sólo son estrictamente correctas para tasas de crecimiento continuo, las cuales son ligeramente inferiores a las tasas de crecimiento discreto. Para pasar de éstas a aquéllas se calcula el logaritmo natural de 1 más la tasa discreta, es decir: $g = \ln(1 + r)$.

8.5.2 Tasa de crecimiento de sumas

El primero de los dos métodos presentado en la sección anterior sirve para deducir la *tasa de crecimiento de una suma* a partir de las tasas de crecimiento de sus componentes. Considérese, por ejemplo, que el PIB es la suma de consumo e inversión

$$PIB = C + I$$

Diferénciese totalmente y divídase cada lado por el PIB inicial

$$\frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{\Delta C}{PIB} + \frac{\Delta I}{PIB}$$

Multiplíquese y divídase cada uno de los términos de la derecha por su respectivo valor inicial

$$\textcircled{\checkmark} \quad \frac{\Delta \text{PIB}}{\text{PIB}} = \frac{C}{\text{PIB}} \frac{\Delta C}{C} + \frac{I}{\text{PIB}} \frac{\Delta I}{I}$$

Se tiene así otra regla práctica: la tasa de crecimiento de una suma es el promedio ponderado de las tasas de crecimiento de los sumandos, donde las ponderaciones son las participaciones de los sumandos en el total. (Esta regla ya había sido aplicada en los Capítulos 1 y 2). El mismo método se usa en expresiones con sumandos negativos, conservándose el signo original.

La última expresión se refiere a diferencias, es decir, a cambios discretos, no a crecimientos continuos. Sin embargo, es igualmente válida en este caso (basta con remplazar por $\hat{\delta}$ en todos los términos).

Hay que tener en cuenta que, bien sea con variaciones discretas o continuas, las ponderaciones que deben emplearse son las que resultan del valor de las variables en el período con respecto al cual se calculan los crecimientos. De otra forma, el método no es estrictamente válido.⁷

8.5.3 Elasticidades

El uso más importante de las tasas de crecimiento en el análisis económico es en el cálculo de elasticidades. Una elasticidad es simplemente el cociente entre las tasas de crecimiento de dos variables. Así, la elasticidad-ingreso de la demanda de alimentos es el cociente entre la tasa de crecimiento de la cantidad demandada de alimentos y la tasa de crecimiento del ingreso de los demandantes. Si el crecimiento se mide en forma discreta en el tiempo se tendrá

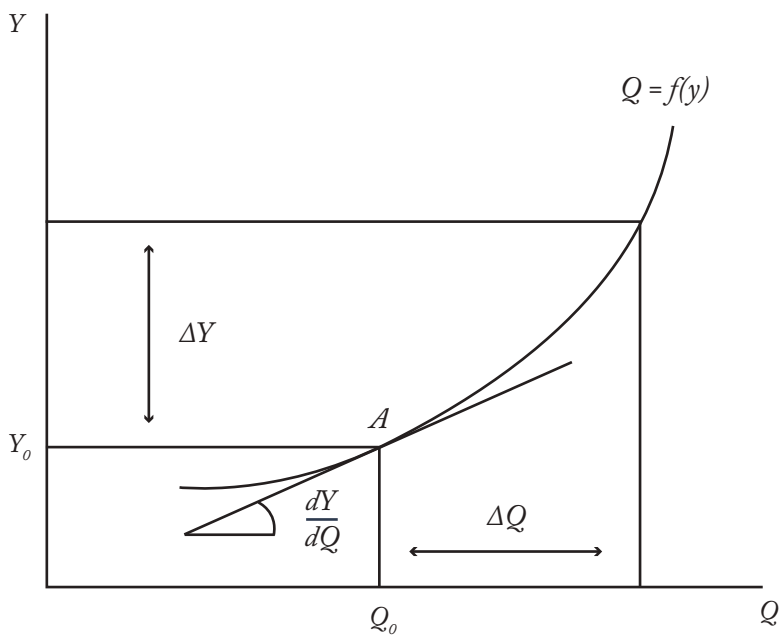
$$\textcircled{\checkmark} \quad e_{Y,Q} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q_0}}{\frac{\Delta Y}{Y_0}}$$

⁷ Véanse los Ejercicios 8.2 y 8.6.

Esta forma de elasticidad se denomina usualmente *elasticidad de arco*, porque en un gráfico que relaciona las dos variables, la elasticidad se obtiene a partir del arco que forman las observaciones de las dos variables antes y después del cambio (véase el Gráfico 8.2).

Gráfico 8.2

Elasticidad de arco y elasticidad puntual en una función de demanda



Cuando se toma crecimiento continuo, la elasticidad es el cociente de las derivadas de los logaritmos y se le denomina *elasticidad puntual o instantánea*, porque en un gráfico similar al anterior puede obtenerse a partir de la pendiente y los valores en un punto (véase el mismo gráfico).

$$\textcircled{\checkmark} \quad e'_{Y,Q} = \frac{\partial \ln Q}{\partial \ln Y}$$

Finalmente, es conveniente saber que la tasa de crecimiento de una variable dependiente es igual a la suma de los productos de las elasticidades parciales de esa variable con respecto a las independientes por las tasas de crecimiento de las variables independientes. Supóngase que la demanda de alimentos es función del ingreso de los demandantes y el precio de los alimentos

$$Q = f(Y, P)$$

Entonces, si se diferencia totalmente

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial Y} dY + \frac{\partial Q}{\partial P} dP$$

Y se divide por Q todos los términos, y se multiplican y dividen los términos de la derecha por su respectiva variable independiente:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}}{\frac{\partial Y}{Y}} + \frac{\frac{\partial Q}{\partial P}}{\frac{\partial P}{P}}$$

o mediante una simbología más compacta:

$$\dot{Q} = e_Y \dot{Y} + e_P \dot{P}$$

donde el símbolo e representa *elasticidades parciales* y el punto encima de una variable significa que se trata de su tasa de crecimiento.

La medición de la productividad y las fuentes del crecimiento económico

Conceptos clave

Indicadores de desarrollo económico

- Producto per cápita, o *PIB* per cápita
- PIB* per cápita relativo
- Tasa de convergencia

Indicadores de productividad y dotación factorial

- Productividad media del trabajo
- Relación capital-producto
- Relación marginal capital-producto
- Relación capital-trabajo

Contabilidad del crecimiento y la productividad

- Por fuentes de demanda
- Por acumulación de factores y productividad
 - Función de producción Cobb-Douglas
 - Productividad total de los factores, *PTF*
 - Residuo de Solow o crecimiento de la *PTF*
- Descomposición sectorial del aumento de la productividad laboral
 - Por productividad dentro de los sectores
 - Por reasignación laboral entre sectores

La medición de la productividad y las fuentes del crecimiento económico

Conceptos clave

Medición del ciclo económico

- Producto observado
- Producto potencial
- Producto cíclico
- Brecha del producto

Recursos matemáticos

- Descomposición de tasas de crecimiento de productos y cocientes
- Descomposición de tasas de crecimiento de sumas
- Elasticidades
 - De arco
 - Puntuales
 - Parciales

Preguntas y ejercicios

- 8.1* ¿Cuál es la tasa continua de crecimiento del producto si la productividad del trabajo crece a una tasa continua del 2% anual y el empleo aumenta a la tasa, también continua, del 1,5% anual? ¿Cuál sería su respuesta si las anteriores tasas fueran geométricas?
- 8.2* Suponga que la economía está compuesta por dos sectores que en el momento tienen el mismo tamaño en términos de valor agregado. ¿Cuál es la tasa de crecimiento del *PIB* si uno de los sectores crece a razón del 20% anual y el otro a razón del 5%? ¿Obtendría el mismo resultado para el segundo año?
- 8.3* ¿Cuál es la elasticidad del valor agregado de cada uno de los dos sectores con respecto al *PIB* en el primer año? ¿Y en el segundo? Muestre que la suma ponderada de las elasticidades de los dos sectores es igual a uno. ¿Por qué tiene éste que ser el caso?
- 8.4 Suponga ahora que a partir del segundo año el crecimiento del *PIB* permanece constante y que las elasticidades del segundo año no se modifican. ¿Cuál será la participación de cada sector cinco años más tarde, es decir, en el séptimo año?
- 8.5 A partir de la siguiente información descomponga el crecimiento económico anual promedio para el período completo 2000-2014 según las fuentes de demanda agregada (miles de millones de pesos constantes de 2005):

	2000	2014 ^p
<i>Producto interno bruto (PIB=C+G+I+X-M)</i>	284,761	531,376
<i>Consumo de hogares (C)</i>	194,531	352,251
<i>Consumo final del gobierno (G)</i>	46,999	91,167
<i>Formación bruta de capital (I)</i>	41,287	157,355
<i>Exportaciones totales (X)</i>	45,822	83,538
<i>Importaciones totales (M)</i>	43,878	152,935

Fuente: DANE, Cuentas Nacionales. El consumo de los hogares incluye el ajuste estadístico para conseguir la igualdad del *PIB* con sus componentes.

Preguntas y ejercicios

8.6*

A partir de la expresión presentada en el texto

$$\dot{Y} = \dot{C} \times c + \dot{I} \times i + \dot{G} \times g + \dot{X} \times x - \dot{M} \times m$$

supóngase que por cada peso de ingreso total el consumo aumenta siempre 0.7 y que para lograr un peso de producción adicional siempre es preciso importar 0.2. Supóngase que los demás componentes de la demanda son exógenos (es decir, no dependen de Y ni de ninguna otra variable del modelo). ¿Cuánto sería el crecimiento económico si estos componentes exógenos de la demanda aumentaran todos 10%? ¿En cuántos pesos aumenta Y por cada peso que aumentan estos componentes exógenos?

8.7

Demuestre que si cada factor recibe por remuneración su productividad marginal, la función de producción Cobb-Douglas implica que α es la participación del capital en el ingreso (y $1-\alpha$ es la participación del trabajo).

8.8

A partir de la siguiente información calcule la contribución del capital, el trabajo y la productividad al crecimiento económico colombiano en las décadas de 1970, 1980 y 1990, suponiendo que la participación del trabajo en el ingreso es 65%.

Tasas de crecimiento

	<i>Producto</i>	<i>Trabajo</i>	<i>Capital</i>
<i>1961-1970</i>	<i>5.26%</i>	<i>3.19%</i>	<i>4.06%</i>
<i>1971-1980</i>	<i>5.51%</i>	<i>3.23%</i>	<i>4.94%</i>
<i>1981-1990</i>	<i>3.38%</i>	<i>2.82%</i>	<i>4.36%</i>
<i>1991-2000</i>	<i>2.68%</i>	<i>2.36%</i>	<i>4.09%</i>

Fuente: Norman Loayza, Pablo Fajnzylber y César Calderón. Economic Growth in Latin America and the Caribbean: Stylized Facts, Explanations and Forecasts, Banco Mundial, Washington, D.C., junio 2002.

Preguntas y ejercicios

- 8.9 Tégase en cuenta ahora que la educación promedio de la fuerza de trabajo tuvo las siguientes tasas de crecimiento y respóndase nuevamente la pregunta anterior:

Educación

<i>1961-1970</i>	<i>-0.36%</i>
<i>1971-1980</i>	<i>2.37%</i>
<i>1981-1990</i>	<i>0.58%</i>
<i>1991-2000</i>	<i>0.90%</i>

Fuente: Norman Loayza, Pablo Fajnzlyber y César Calderón. *Economic Growth in Latin America and the Caribbean: Stylized Facts, Explanations and Forecasts*, Banco Mundial, Washington, D.C., junio 2002.

- 8.10 ¿Cómo ajustaría los cálculos del ejercicio anterior para tener en cuenta que el trabajo no se utiliza plenamente? Por ejemplo, suponga que la tasa de desempleo estuvo constante en 10% hasta 1990 y que durante los noventa aumentó un punto porcentual por año. ¿Cuál fue entonces la contribución de la productividad (el residuo) en los noventa? ¿Cambia con esto el cálculo de décadas anteriores?

Explique cómo ajustaría los cálculos anteriores para tener en cuenta: (a) los cambios en la utilización de la capacidad instalada, y (b) el número de horas trabajadas por persona. Sugiera otros ajustes que podrían hacerse para tener medidas más exactas de los cambios en la productividad total de los factores.

- 8.11 Considere la siguiente información sobre una economía de muy bajo nivel de desarrollo en 1995, que ha tenido dos décadas de crecimiento sostenido:

Preguntas y ejercicios

	1995	2015
<i>Fuerza de trabajo (millones de personas)</i>		
<i>Sector tradicional</i>	200	180
<i>Sector moderno</i>	100	220
<i>Productividad laboral per cápita (millones de pesos constantes)</i>		
<i>Sector tradicional</i>	4	6
<i>Sector moderno</i>	12	15
<i>Relación capital/trabajo (millones de pesos constantes de capital por trabajador)</i>		
<i>Sector tradicional</i>	0.5	1
<i>Sector moderno</i>	4	6

Calcule lo siguiente:

- (a) Tasa de crecimiento anual de esta economía
- (b) Tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo
- (c) Tasa de crecimiento de la productividad laboral total, del sector tradicional y el moderno
- (d) Descomposición de la productividad laboral (por reasignación, dentro de los sectores y efecto interacción).

8.12

Aplique la siguiente expresión a la información del ejercicio anterior,

$$q = a + \left(\frac{\dot{K}}{L} \right) \alpha$$

para obtener la contribución de la productividad total de los factores al crecimiento (suponga que la remuneración al trabajo ha tenido una participación estable en el ingreso del 60%). Explique el resultado.

8.13

Compruebe que puede llegar al mismo resultado a partir de la ecuación del residuo de Solow,

$$a = g - \alpha \dot{K} - (1 - \alpha) \dot{L}$$

Preguntas y ejercicios

- 8.14 Calcule cuál sería la remuneración por trabajador en 1995 y en 2015. Interprete el resultado.
- 8.15 Deduzca una expresión para descomponer los aumentos de la productividad laboral total para tres o más sectores en (a) por reasignación del empleo entre sectores, (b) por aumento de la productividad dentro de los sectores, y (c) por interacción entre los efectos anteriores.
- 8.16 Regrese al Ejemplo 8.4 presentado en el texto.
- (a) Con los cálculos allí obtenidos, ¿en qué momento se tuvo el menor uso de los recursos potenciales de la economía, y el mayor?
- (b) Calcule ahora usted con un método sencillo el *PIB* potencial a partir de los datos del producto observado incluidos en el ejemplo. (Sugerencia: pase los datos a logaritmos y calcule la tasa promedia de crecimiento de la serie en logaritmos).
- (c) Habrá observado que sus cálculos del *PIB* potencial son diferentes de los presentados en el ejercicio. Explique a qué puede deberse esto.
- (d) Calcule ahora el producto cíclico y la brecha del producto, y compare sus resultados con los obtenidos originalmente en el ejercicio. Intente responder nuevamente la pregunta a) y explique por qué su nueva respuesta es diferente de la inicial.

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

- 8.1R Siguiendo la simbología utilizada en el texto:

$$\begin{aligned} g &= q + e \\ &= 0.02 + 0.015 \\ &= 0.035 \end{aligned}$$

Si las tasas son geométricas deben convertirse a logarítmicas. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} g &= 0.0198 + 0.0149 \\ &= 0.0347 \end{aligned}$$

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

8.2R

El promedio de los dos crecimientos, o sea, 12,5%. En el segundo año deben cambiarse las ponderaciones; así, para el sector a

$$\frac{VA_{a1}}{PIB_1} = \frac{VA_{a0} (1 + 0.2)}{PIB_0 (1 + 0.125)}, \text{ como } \frac{VA_{a0}}{PIB_0} = 0.5$$

$$= 0.533$$

De igual forma, para el sector b

$$\frac{VA_{b1}}{PIB_1} = \frac{VA_{b0} (1 + 0.05)}{PIB_0 (1 + 0.125)}, \text{ como } \frac{VA_{b0}}{PIB_0} = 0.5$$

$$= 0.467$$

Con las nuevas ponderaciones el crecimiento del PIB sería

$$r_2 = 0.533(0.2) + 0.467(0.05)$$

$$= 0.13$$

8.3R

Llamando r_{xi} a las tasas de crecimiento del sector x en el período i se tienen las siguientes elasticidades:

$$e_{a1} = \frac{r_{a1}}{r_1} = 1.6$$

$$e_{b1} = \frac{r_{b1}}{r_1} = 0.4$$

$$e_{a2} = \frac{r_{a2}}{r_2} = 1.5385$$

$$e_{b2} = \frac{r_{b2}}{r_2} = 0.3846$$

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

Puede comprobarse que la suma ponderada de las elasticidades es igual a uno. Esto puede demostrarse así:

$$PIB = VA_a + VA_b, \text{ luego}$$

$\Delta PIB = \Delta VA_a + \Delta VA_b$, dividiendo por PIB y multiplicando y dividiendo cada uno de los términos de la derecha por su respectivo VA :

$$\frac{\Delta PIB}{PIB} = \frac{\Delta VA_a}{VA_a} \frac{VA_a}{PIB} + \frac{\Delta VA_b}{VA_b} \frac{VA_b}{PIB}$$

pasando el término de la izquierda a dividir se tiene el resultado buscado:

$$1 = \frac{\frac{\Delta VA_a}{VA_a} \frac{VA_a}{PIB}}{\frac{\Delta PIB}{PIB}} + \frac{\frac{\Delta VA_b}{VA_b} \frac{VA_b}{PIB}}{\frac{\Delta PIB}{PIB}}$$

$$1 = e_a \frac{VA_a}{PIB} + e_b \frac{VA_b}{PIB}$$

8.6R

Llamando E a los tres componentes exógenos, la expresión queda así (el valor de 0,5 se deduce de que la suma de las participaciones de los componentes debe ser 1):

$$Y = \dot{C} \times 0.7 + E \times 0.5 - \dot{M} \times 0.2$$

Soluciones a ejercicios seleccionados (*)

Nótese que si el consumo y las importaciones son proporciones fijas del producto, las tasas de crecimiento de esas tres variables deben ser iguales, por tanto

$$\dot{Y} = (1 - 0.7 + 0.2) \dot{E} = \dot{E} \times 0.5$$

Esto quiere decir que la tasa de crecimiento de Y , y del conjunto de los componentes exógenos E , es la misma. Por consiguiente, el crecimiento será 10%. Esta simetría no depende de los coeficientes que usemos, como se invita a comprobarlo. Por tanto, si las participaciones de los componentes endógenos de la demanda están dadas, la economía crecerá igual que sus componentes exógenos. En nuestro caso, como los componentes exógenos representan el 50% de la demanda agregada, eso quiere decir que por cada peso de aumento de esos componentes el *PIB* aumentará dos pesos, lo cual implica un multiplicador de 2.

Bibliografía

Fuentes y métodos

- » Barro, Robert y Xavier Sala-i-Martin. *Economic Growth*: Second Edition. MIT Press, 2003. Uno de los libros de texto más populares sobre crecimiento económico a nivel intermedio.
- » Chiang, Alpha C. *Métodos fundamentales de economía matemática*, Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1986.
- » De la Fuente, Ángel. *Mathematical Methods and Models for Economists*. Cambridge University Press, Nueva York, 2000.
- » Escobar, Diego. *Introducción a la economía matemática*, Editorial Iberoamericana, Bogotá, 1999.
- » Romer, David. *Advanced Macroeconomics*. Nueva York: McGraw-Hill. Segunda edición, 2001.
- » Simon, Carl y Lawrence Blume, *Mathematics for Economists*, Nueva York y Londres: Norton, 1994.

Aplicaciones y fuentes de información

- » Clavijo, S. “Productividad laboral, multifactorial y la tasa de cambio real en Colombia”, en *Ensayos sobre política económica*, No. 17, junio de 1990. Contiene series anuales del acervo de capital, el empleo y la productividad laboral desde 1950. Analiza los determinantes del cambio de la productividad.
- » Loayza, Norman, Pablo Fajnzylber y César Calderón. “Economic Growth in Latin America and the Caribbean. Stylized Facts, Explanations and Forecasts”. World Bank, junio 2002. El más completo y detallado estudio reciente sobre las fuentes y los determinantes del crecimiento económico con base en información desde la década del sesenta para 32 países de América Latina y el Caribe.

Bibliografía

Aplicaciones y fuentes de información

- » Madison, Angus. *La economía mundial 1820-1992. Análisis y estadísticas*. París: OECD, 1977. Es la fuente más utilizada de información histórica sobre crecimiento económico de los países.
- » Rodríguez, Norberto, José Luis Torres y Andrés Velasco. “La estimación de un indicador de brecha del producto a partir de encuestas y datos reales”. *Serie Borradores de Economía*, Banco de la República, abril 2006.

Recurso fotográfico

- » Fotografía portada tomada de:
<https://www.shutterstock.com/>