SOLUCIÓN INTERACTIVA DE JUEGOS REPETIDOS APLICANDO EL MODELO DE HOTELLING

AUTORES

CHRISTOPHER DÍAZ
DIEGO FERNANDO JARAMILLO

DIRECTORES DEL PROYECTO
NATALIA GONZALEZ
ANDRÉS MUÑOZ

UNIVERSIDAD ICESI
FACULTAD DE CIENCIAS ADMINISTRATIVAS Y ECONÓMICAS
ECONOMÍA Y NEGOCIOS INTERNACIONALES
SANTIAGO DE CALI

2017

Tabla de contenido

Lista de figuras

Lista de Tablas

1 Resumen

En el presente documento tiene como objetivo testear el modelo de Hotelling cuando los agentes se pueden mover de su ubicación inicial. El modelo intentará predecir el comportamiento de los agentes y mostrará el tipo de equilibrio que se alcanzara, el cual puede ser cooperativo y ninguno de los dos agentes se moverá; o puede ser competitivo y los agentes se moverán, robando mercado. Para ello, se mostrará el modelo de Hotelling, los supuestos empleados y la optimización de los agentes con sus respectivas funciones de reacción.

Palabras Claves: Teoría de juegos, equilibrio de Cournot, organización industrial, juegos repetidos, modelo de Hotelling.

Abstract

This document aims to test the Hotelling's model when agents can move from their initial location. The model will try to predict the agents behavior and the equilibrium reach, wich can be cooperative and neither of two agents will move; or can be competitive and the agents will move, stealing market . We will show the model of Hotelling, the assumptions used and the optimization of the agents with their respective reaction functions.

Key Words: Theory of games, Cournot equilibrium, industrial organization, repeated games, Hotelling model.

2 Introducción

En el trascurso del tiempo, los dueños de empresas toman diferentes decisiones, como puede ser el caso de escoger el lugar donde se ubica la empresa, el precio que se va cobrar o como va a llegar a los diferentes clientes. En el caso de la ubicación existen diferentes razones por las cuales un empresario decide moverse de ubicación. Para ejemplificar esto, veamos la situación de un tendero de barrio, donde la ubicación de su lugar de trabajo, es su misma casa, la cual, supongamos, se encuentre en una esquina de una cuadra y su competidor se encuentra en la otra esquina. En esta cuadra se reparten uniformemente los consumidores, donde desde la mitad de la cuadra hasta la tienda, serán los clientes del tendero y la otra mitad serán los clientes de la competencia. Lo que va decidir el tendero es trasladar la tienda a la mitad de la cuadra, para poder tener como clientes fijos a las personas que están de la esquina hasta la tienda y competir con los clientes que se encuentra entre la tienda y la competencia, lo que significara que se intenta robar parte de los clientes de la competencia.

Este comportamiento de las empresas, como el descrito en el ejemplo, ha sido estudiado por diferentes economistas, los cuales han encontrado modelos, donde se llega a entender por qué las empresas hacen lo que hacen. Uno de estos ha sido Harold Hotelling, el cual en 1929 debatió las conclusiones del modelo del Betrand. el ultimo afirmaba que, en un mercado competitivo, donde existen 2 empresas que produce el mismo bien sin diferenciación, si una de estas empresas disminuye el precio, lo realiza para intentar quitarle el mercado vía precios a la otra. dando a entender que las empresas van a competir por precio, hasta llegar a un punto donde estos precios sean iguales a los costos marginales de cada empresa.

Según Hotelling esto necesariamente no es cierto, debido a que el argumentaba que cada empresa tiene una posición monopólica. Lo anterior se explica debido a que unas empresas se acercan más a las inclinaciones de un segmento de consumidores que cualquier otra empresa. Estas inclinaciones pueden ser varias y no necesariamente debe ser un diferenciador del bien, tal como puede ser la distancia entre el consumidor y la empresa. A partir de lo anterior Hotelling llegó a unas conclusiones, donde la primera es que además del precio, los consumidores deciden a cuál de estas empresas comprar a través de unas inclinaciones, los cuales se pueden reportar como unos costos adicionales que asumen los consumidores.

La otra conclusión que encontró Hotelling es la que nos ayuda entender la situación descrita en el ejemplo de tendero y es que, al existir costos adicionales, por parte de la diferencia de inclinación para los consumidores, las empresas van a intentar disminuir estos costos disminuyendo estas diferencias. Lo anterior lo realizan para poder capturar mayor mercado, lo cual desencadena en más beneficios para las empresas.

Pero de este caso descrito al principio surgen una serie de interrogantes, que se salen de la conclusión de Hotelling, por ejemplo, si el tendero decide moverse ¿Cuáles son los costos que debería asumir? Siendo estos costos son distintos a cero ¿el monto de este costo, afectara su decisión? En términos de beneficios ¿si una firma decide moverse primero al final va a recibir mayores beneficios que la otra? Todas estas preguntas son los que se van a intentar resolver en este documento, donde primero se realizara un análisis del modelo de hotelling y como se puede modificarlo, seguido se mostrara los resultados obtenidos a partir de modelaciones en un paquete estadístico, que en este caso es el software R. por último se analizará los resultados y se dará una conclusión de este análisis.

Modelo de Hotelling

El modelo de Hotelling establece que los consumidores y vendedores están ubicados en una linea recta de longitud L. El punto donde están ubicados los vendedores es A y B, siendo ”a” la distancia que hay desde el inicio del intervalo a la ubicación de A, y ”b” la distancia desde B hasta el fin del intervalo. Mientras que la distancia entre A y B esta dividida por un punto de indiferencia, desde el cual X es la distancia a A y Y la distancia a B. Por lo que $L = a + x + y + b$ (ver Figura 1).

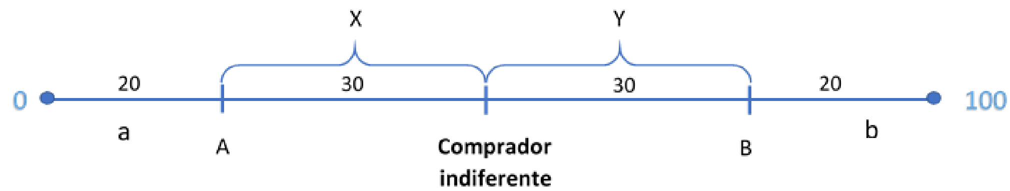

Figura 1: Hotelling’s Model

Si esta línea recta es una playa de 100 metros. Existen dos vendedores de perros calientes, el vendedor A y el vendedor B. El primero se ubica a 20 metros de izquierda a derecha, y el segundo a 80 metros. Por lo tanto, la distancia entre ambos vendedores es de 60 metros.

En esta playa existe un comprador a cada metro de distancia, y cada uno compra un solo perro caliente. Cada comprador se enfrenta, además del precio del perro, un costo de transporte. Por lo que entre más lejos este el cliente, más le cuesta conseguir el bien.

Por lo tanto, un cliente evalúa el costo de transporte más el precio del producto para decidir a qué vendedor comprarle. Así sucesivamente hasta que llegamos a un punto de indiferencia, donde el comprador es indiferente sobre a quién comprarle el perro caliente. Este punto de indiferencia se moverá con el precio que coloquen ambos vendedores.

En nuestro modelo, supusimos que el precio de ambos vendedores es igual, bajo esas condiciones los vendedores se reparten la distancia intermedia equitativamente y tienen asegurada la distancia ”a” y ”b”. Como sus precios son iguales, el único mecanismo que los vendedores tienen disponible para vender más, es acercarse al otro vendedor. Porque así aseguran una mayor distancia ”a” y ”x”.

3 Definición formal del modelo

Se empieza definiendo a los consumidores del modelo, y su distribución a lo largo del espacio. La masa de consumidores esta definida en el intervalo [0,1].

Masa de consumidores S: $\int_0^1 1dz = |_0^1 = 1 - 0 = 1$

Los consumidores están distribuidos uniformemente en el intervalo. Ademas, estos compran en cada momento de tiempo una unidad del producto a uno de los vendedores. El criterio de decisión esta dado por la valoración W que tienen del bien, comparada con el precio de los vendedores y el costo de transporte.

$$U(x) = \begin{cases} \text{Si compran a A}: W - CX - P_A \\ \text{Si compran a B}: W - CY - P_B \end{cases}$$

Cabe resaltar que cada una de las firmas es ubicada aleatoriamente en el intervalo y vende el mismo bien. Donde "C" corresponde al costo de transporte por unidad de distancia recorrida, P_i=precio del vendedor $(i = A, B)$. Se asumirán que el precio de los dos vendedores son iguales, y se normalizaran los precios y costos de transporte a 1. W=Excedente bruto del consumidor (máxima disposición a pagar), W es lo suficientemente grande para abastecer el mercado. "X" es la distancia existente entre el comprador y el vendedor A, así mismo "Y" es la distancia al vendedor B.

3.1 Demanda

Para derivar la demanda necesitamos hallar el consumidor que es indiferente entre A y B, esto es:

$$
\begin{aligned}
\mu^i(X) &= \mu^i(Y) \\
W - P_A - CX &= W - P_B - CY \\
P_A + CX &= P_B + CY \\
CX &= P_B - P_A + CY \\
X &= Y + \frac{P_B - P_A}{C} \\
X &= L - a - b - X + \frac{P_B - P_A}{C} \\
2X &= L - a - b + \frac{P_B - P_A}{C} \\
X &= \frac{1}{2}(L - a - b + \frac{P_B - P_A}{C}) \\
Y &= \frac{1}{2}(L - a - b + \frac{P_A - P_B}{C})
\end{aligned}
$$

Como $P_A = P_B$ entonces el consumidor i que es indiferente, estará ubicado en la mitad de las distancias A y B. Por lo que X=Y.

Punto de indiferencia:

$$
X = Y = \frac{1}{2}(L - a - b) \tag{1}
$$

3.2 Oferta

Los agentes A y B compiten entre ellos para maximizar su ganancia. Cuando se suponen los precios iguales, estos entonces, solo podrán competir por cantidades. Dado que cada comprador compra una unidad del bien en un instante de tiempo y estos están distribuidos de forma uniforme, las cantidades vendidas serán iguales a las distancias (x, y, a, b). Entre mayor sea la distancia a y X del agente A, mayor cantidades vende, lo mismo para el agente B.

Los beneficios de los agentes depende directamente de su posición, ya que esto determina los consumidores que le van a comprar. Las posiciones iniciales de los agentes no esta decidida por ellos, es exogena. La decisión de los agentes es escoger si moverse de su posición inicial para acaparar mas clientes, donde existe un costo por trasladarse T que limita su posibilidad de moverse libremente.

El modelo de Hotelling incluye ademas el supuesto de que no hay costos de producción, este supuesto es viable porque los beneficios por cuasi-monopolio que gozan los agentes, sigue existiendo aún con costos de producción. La maximizan de beneficios entonces es:

$$\begin{aligned}
\pi_A &= P_A Q_A \\
\pi_A &= a + X = A + \frac{1}{2}(L - A - (1-B)) - A'C \\
\pi_B &= b + Y = (1-B) + \frac{1}{2}(L - A - (1-B)) - B'C
\end{aligned}$$

donde A y B son las posiciones de los agentes correspondientes, C representa el costo de moverse para los agentes, A' y B' representa un movimiento de 0,1 desde sus posiciones iniciales para cada agente. Si los agentes no se mueven A' y B' serán iguales a cero. Estos son los beneficios de los agentes para el juego repetido.

3.3 Criterio de decisión

Los agentes buscarán maximizar sus beneficios, moverse para acercarse al otro jugador implica aumentar los beneficios obtenidos al robarle mercado. Sin embargo el costo de trasladarse disminuye estos beneficios. Por lo que los agentes deben decidir entonces si moverse o no, dependiendo de si los beneficios obtenidos son superiores a los costos de trasladarse. Es decir:

A se moverá si y solo si se cumple: $\sum_{t=1}^{n} \pi^{A}_{\neg moverse} < \sum_{t=1}^{n} \pi^{A}_{Moverse}$

3.4 Variación del Modelo

La primera versión del modelo, es cuando el juego es único. Este modelo sencillo sirve para observar de forma fácil, cómo la posición inicial de los agentes (variable exogena) determina sustancialmente el comportamiento de los agentes dado un costo de trasladarse.

Cada que la posición inicial A y B cambian, nuevas matrices de pago aparecen. Los jugadores entonces deciden si les conviene moverse o no según el beneficio obtenido menos el costo por moverse. Ya que es un juego único, y los beneficios futuros son únicos, si el costo de trasladarse es alto, la estrategia optima de los agentes siempre serán quedarse en el mismo sitio.

Para continuar con los juegos repetidos, nos apoyamos con el paper de Sebastian Kranz (2012), implementando código en R para juegos repetidos (Ver Anexo).

4 Resultados y Análisis

Antes de comenzar a analizar los resultados obtenidos en la simulación, hay que aclarar, que para este modelo utilizamos 5 casos distintos, esto debido a que el costo de trasladarse es exógeno, es decir no es una variable que podamos predecir. Por ese motivo escogimos aleatoriamente 5 posibles valores que puede tomar el costo, el cual afectará a la forma en que juegan las empresas. en la primera situación el costo tomó un valor de 0.1, en el segundo caso toma un valor de 1, en el tercer caso toma un valor de 0.6, en el cuarto caso toma un valor de 0.2, y en el quinto caso un valor de 0.5; todo estos casos se va a discutir individualmente sus resultados a continuación.

Notación:

UE: Máximo pago conjunto. (Beneficios conjuntos al cooperar).
V: Suma de los castigos por traicionarse.
Delta: Factor de descuento entre beneficios presentes y futuros. Determina cuando un plan de acción (cooperar o no) es óptimo.
L: En la matriz de pagos es "No moverse".
M: En la matriz de pagos es "moverse".

Primer Caso:

En el primer caso tenemos un costo de trasladarse de 0,1. Este costo genera que la matriz de pagos de los agentes se convierta en un dilema del prisionero. En este juego los agentes deben decidir si No Moverse "L", o Moverse "M". La razón por la que terminen en un dilema del prisionero, es porque como el costo de trasladarse es tan bajo. ambos agentes tienen incentivos de moverse y robarle clientes al otro. Pero si ambos se mueven, terminan en una situación peor que si no se movieran. La razón de que los pagos sean asimétricos, se debe a la posición aleatoria inicial de cada agente.

El factor de descuento delta de 0,8 nos indica, en este caso específico, la poca disposición a cooperar de los agentes. Solo para un delta mayor que 0.8 los agentes deciden cooperar y no moverse, para maximizar las ganancias conjuntas en 1.

En la primera simulación, los valores aleatorios generados fueron:
A= 0.2 (Posición inicial del Agente A)
B= 0.6 (Posición inicial del Agente B)
C= 0.1 (Costo de trasladarse)

Tabla 1: Caso 1. Matriz de estructura de acción optima con pagos y delta critico.

ruta optima	delta	L	Ue	V	v1	v2	r	UV	opt
(M,M) (M,M) (M,M)	0	0	0,98	0,98	0,39	0,59	Inf	0	1
(L,M) (M,M) (M,M)	0,8	0,04	0,99	0,98	0,39	0,59	0,3	0,01	0
(L,L) (M,M) (M,M)	0,8	0,08	1	0,98	0,39	0,59	0,3	0,02	1

Tabla 2: Caso 1. Matriz de pagos.

		Agente 2	
		L	M
Agente 1	L	0.40 , 0.60	0.35 , 0.64
	M	0.44 , 0.55	0.39 , 0.59

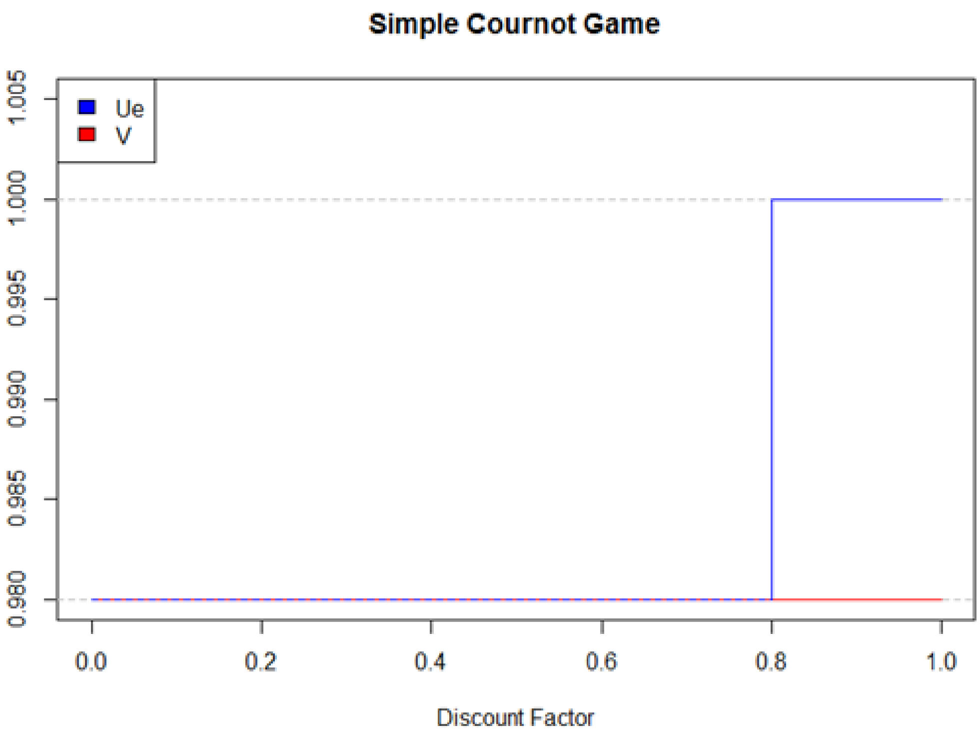

Figura 2: Gráfico caso 1

En nuestro modelo se tiene un factor de descuento (línea horizontal) que representa la probabilidad de que los vendedores coludan y no se roben los clientes, quedándose quietos.

La línea azul representa la utilidad conjunta, la línea roja el costo en perdida de eficiencia por no cooperar (perdida de dinero de ambos al acercarse más y más, asumiendo unos costos de trasladarse cada vez mayores).

El factor de descuento se mueve en la misma dirección que los costos de trasladarse; entre mayor costo, mayor es el factor de descuento (mayor probabilidad de coludir). Como es un juego repetido, que los vendedores juegan día a día si acercarse o no. Es por eso que la line roja y azul están juntas al inicio y luego se separan (paciencia para seguir cooperando).

Segundo Caso:

En el segundo caso el costo de trasladarse es 1. este costo genera que a la hora de crear la matriz de pagos se observe que solo exista un resultado óptimo entre No Moverse “L”, o Moverse “M”, el cual es no moverse para ninguna de las 2 firmas. Esto ocurre debido a que el costo de trasladarse es tan alto, que el beneficio adicional que recibe la firma por moverse es menor a el costo de trasladarse, provocando que de ninguna forma las firmas se van a mover para asi poder al menos mantener constantes sus pagos.

En este caso, el mínimo factor de descuento delta hasta el cual los agentes cooperarán es 0,33. Para factores de descuento mayores a 0,33 los agentes no cooperarán, debido a que el castigo “V” por no cooperar es menor que los beneficios percibidos.

Se puede observar que el factor de descuento delta en el caso 1 se interpreta al contrario que el delta del segundo caso. Esto sucede debido a la composición del modelo de Kranz, ya que el modelo toma como ruta óptima el equilibrio de Nash, haciendo que la gráfica del caso 1 opuesta al caso 2, y por tal motivo el delta también se interpreta al contrario.

En esta simulación las variables aleatorias generadas son:
A= 0.2
B= 0.9
C= 1

Tabla 3: Caso 2. Matriz de estructura de acción optima con pagos y delta critico.

ruta optima	delta	L	Ue	V	v1	v2	r	UV	opt
(L,L) (L,L) (L,L)	0	0	1	1	0,55	0,45	Inf	0	1
(L,L) (L,L) (M,L)	0,5	0,05	1	0,95	0,55	0,4	1	0,05	0
(L,L) (L,M) (M,L)	0,333	0,05	1	0,9	0,5	0,4	2	0,1	1

Tabla 4: Caso 2. Matriz de pagos.

		Agente 2	
		L	M
Agente 1	L	0.55 , 0.45	0.50 , 0.40
	M	0.50 , 0.40	0.45 , 0.35

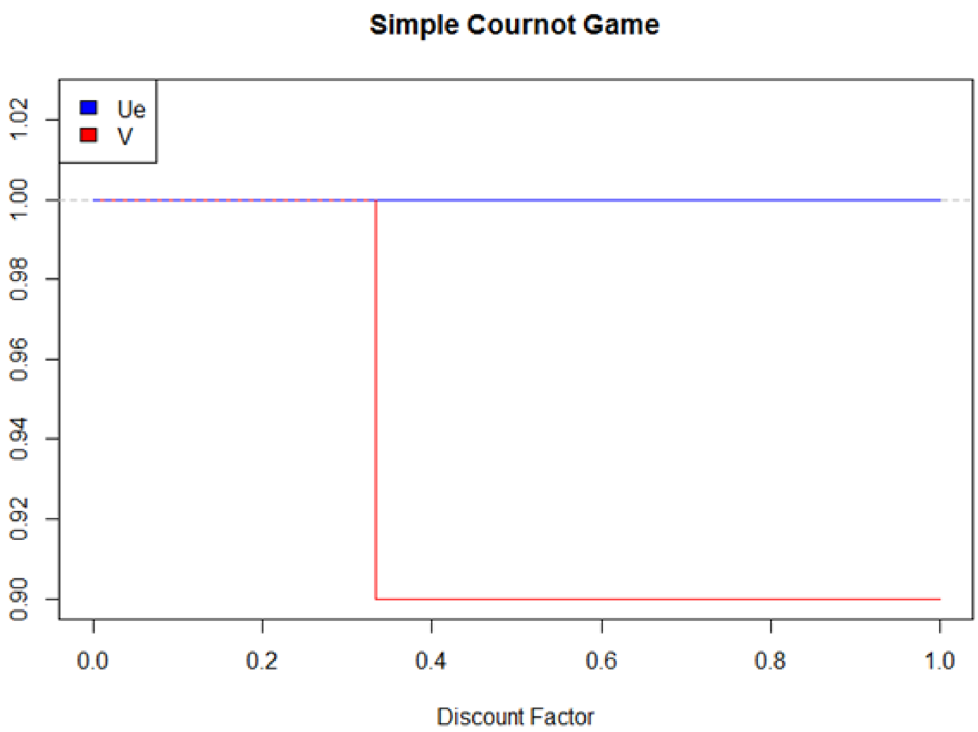

Figura 3: Gráfico caso 2

Tercer Caso:

En este caso, el costo de trasladarse en esta situación es de 0.6. en este caso, sucede casi lo mismo que en el segundo caso, en donde los costos de trasladarse son tan alto que para las firmas es más conveniente quedarse quietos en el lugar donde están a moverse. la única diferencia que se puede encontrar entre los 2 es que a diferencia del segundo caso, la diferencias entre el beneficio de moverse y el costo no son tan altas, esto lo podemos ver reflejado en el delta, que a continuación lo vamos a analizar.

Se puede observar que el factor de descuento delta en este caso tiene la misma interpretación que el del caso anterior. Pero este delta es mucho más bajo, indicando menor disposición a cooperar. Esto sucede porque el costo de trasladarse es suficientemente bajo como para que moverse se vuelva atractivo.

En la tercer simulación los parámetros fueron:

A= 0.2
B= 1
C= 0.6

Tabla 5: Caso 3. Matriz de estructura de acción optima con pagos y delta critico.

ruta optima	**delta**	**L**	**Ue**	**V**	**v1**	**v2**	**r**	**UV**	**opt**
(L,L) (L,L) (L,L)	0	0	1	1	0,6	0,4	Inf	0	1
(L,L) (L,M) (M,L)	0,091	0,01	1	0,9	0,55	0,35	10	0,1	1

Tabla 6: Caso 3. Matriz de pagos.

		Agente 2	
		L	M
Agente 1	L	0.60 , 0.40	0.55 , 0.39
	M	0.59 , 0.35	0.54 , 0.34

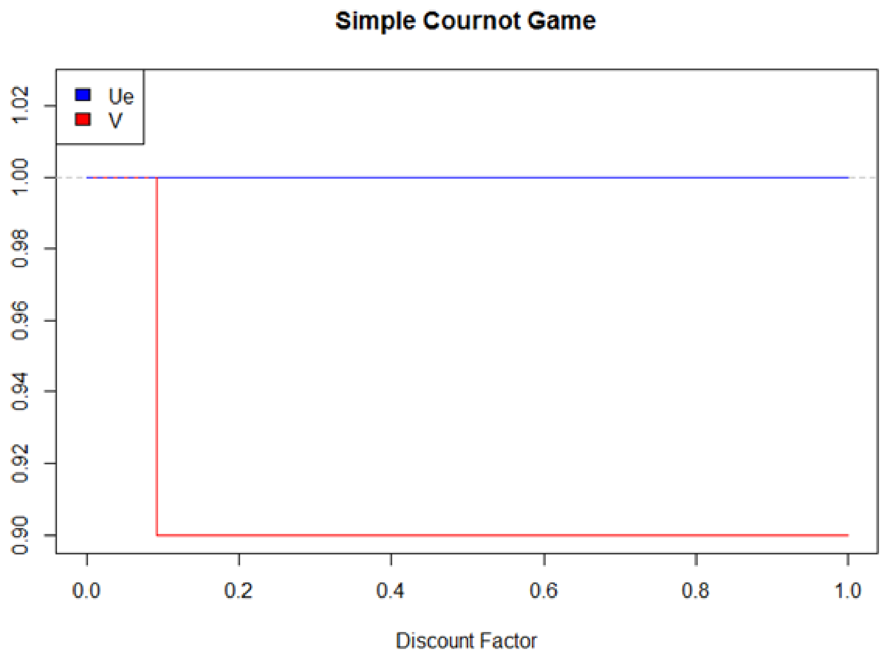

Figura 4: Gráfico caso 3

Cuarto Caso:

En el cuarto de estos casos, lo que sucede es que el costo de trasladarse es igual a 0.2. al igual que en el primer caso, lo que sucede es que la matriz de pago va tomar forma de una matriz del dilema del prisionero, es decir que sus costos de trasladarse son tan bajos que ambas firmas van a tener incentivos para trasladarse, pero si ambas firmas se mueven a la misma vez, la situación en que queda va ser mucho peor que la posición inicial en la cual estaban ambas firmas.

Con lo que respecta al delta en este caso, va a tener la misma interpretación que tiene el delta del primer caso, la única diferencia entre ambos casos es que, en el cuarto caso, el delta va a ser mucho menor, va a tomar el valor de 0.6, lo que va a indicar una menor disposición de no cooperar entre las dos firmas. lo anterior es debido a que el costo de trasladarse es mayor al del caso 1, lo que significa que la diferencia entre el beneficio de trasladarse y el costo va ser mucho menor, lo que provoca que las firmas se piensen mejor si deciden no cooperar.

En la cuarta simulación los parámetros generados aleatoriamente tomaron el valor de:

A= 0.2
B= 1
C= 0.2

Tabla 7: Caso 4. Matriz de estructura de acción optima con pagos y delta critico.

ruta optima	delta	L	Ue	V	v1	v2	r	UV	opt
(M,M) (M,M) (M,M)	0	0	0,96	0,96	0,58	0,38	Inf	0	1
(L,M) (M,M) (M,M)	0,6	0,03	0,98	0,96	0,58	0,38	0,7	0,02	0
(L,L) (M,M) (M,M)	0,6	0,06	1	0,96	0,58	0,38	0,7	0,04	1

Tabla 8: Caso 4. Matriz de pagos.

		Agente 2	
		L	M
Agente 1	L	0.60 , 0.40	0.55 , 0.43
	M	0.63 , 0.35	0.58 , 0.38

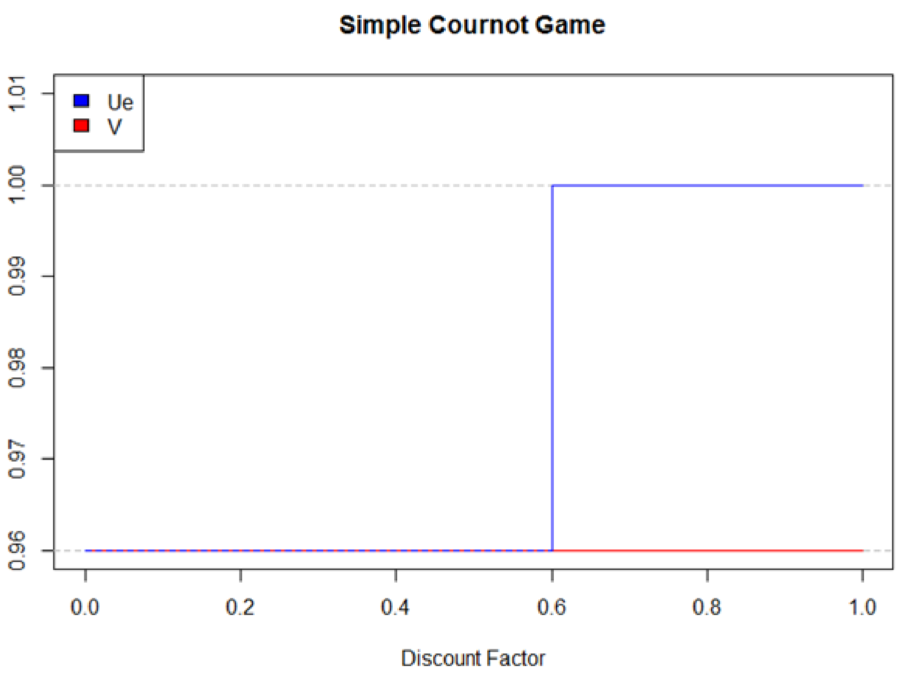

Figura 5: Gráfico caso 4

Quinto Caso:

En el quinto caso, el costo de trasladarse obtiene un valor que genera indiferencia para ambos agentes. En este costo de 0.5, los agentes obtienen las mismas ganancias netas tanto si se quedan en la posición en la que están como si se mueven. No existe valor delta para el cual exista una diferencia entre cooperar o no, y no hay forma de predecir cómo se comportan los agentes, ya que cualquier movimiento es óptimo.

En la quinta simulación, los parámetros utilizados son:
A= 0.3
B= 0.9
C= 0.5

Tabla 9: Caso 5. Matriz de estructura de acción optima con pagos y delta critico.

ruta optima	**delta**	**L**	**Ue**	**V**	**v1**	**v2**	**r**	**UV**	**opt**
(L,L) (L,M) (M,L)	0	0	1	0,9	0,55	0,35	Inf	0,1	1

Tabla 10: Caso 5. Matriz de pagos.

		Agente 2	
		L	M
Agente 1	L	0.60 , 0.40	0.55 , 0.40
	M	0.60 , 0.35	0.55 , 0.35

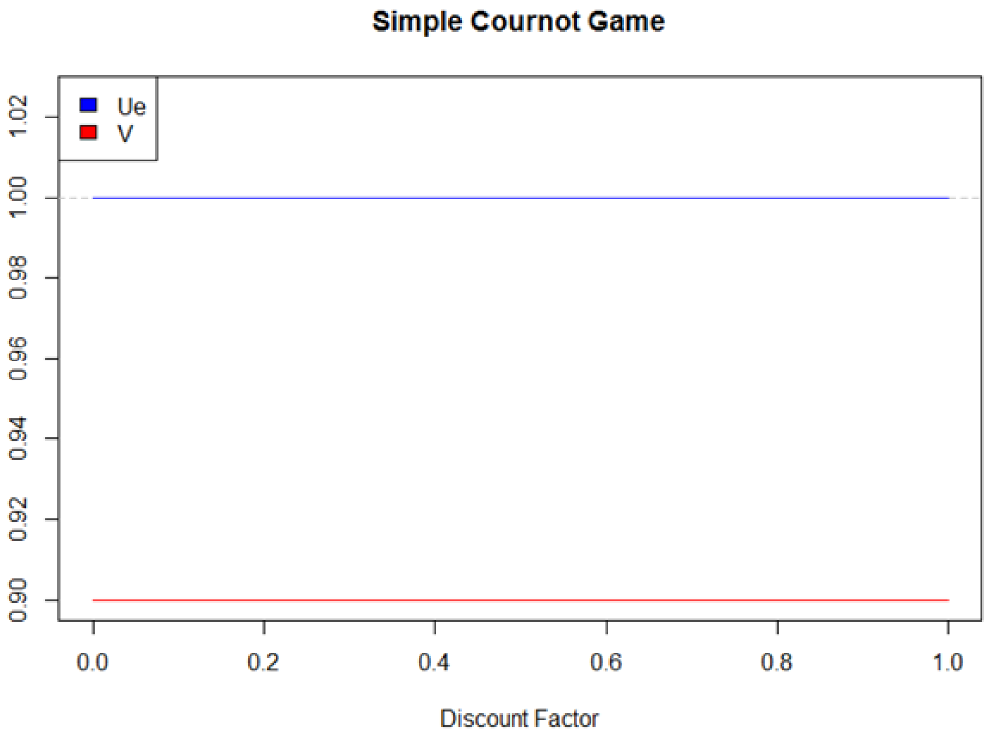

Figura 6: Gráfico caso 5

5 Conclusiones

Manteniendo *Ceteris Paribus* los precios, los agentes pueden robarle mercado a sus competidores acercándose a ellos. Pero Ubicarse cerca de otro agente puede ser costoso, por lo que dependiendo de este costo, los agentes decidirán si moverse o no al hacer un análisis costo/beneficio. Si el costo de moverse es mayor a los beneficios esperados, no se moverán. Teniendo en cuenta además la asimetría del mercado (dada por la ubicación inicial aleatoria), solo los agentes que sean capaces de asumir el costo, y además de que esto se traduzca en beneficios adicionales, se moverán. Esto genera una mayor desigualdad en los ingresos, puesto que si un agente ya tenía altos ingresos, se aprovechara de la incapacidad del otro de moverse y le robara mercado.

Otra conclusión obtenida, es que la capacidad de los agentes de cooperar depende del costo de trasladarse. Entre mayor costo, menor incentivo a traicionarse; y entre menor costo, mayores son los incentivos a traicionarse. Por lo que existe una relación positiva entre el costo y la disposición a cooperar. La relación entre el costo y el delta es, inversa cuando el costo está por debajo del punto de indiferencia, y positiva cuando está por encima del punto de indiferencia. Además, solo en el caso que el costo sea tal que las firmas sean indiferentes entre moverse a no moverse, no se puede predecir su comportamiento, es decir, si decide si cooperar o no cooperar.

6 Bibliografía

[1] Harold Hotelling. Stability in Competition. *The Economic Journal*, 39(153):41–57, 1929.

[2] Sebastian Kranz. Interactively Solving Repeated Games : A Toolbox Version 0.2. 2012.

[3] Xavier Vives. On the Efficiency of Bertrand and Cournot Equilibria with Product Differentation. *Journal of Economic Theory*, 36(1):166–175, 1985.