Secuencia Didáctica Fundamentada en el Juego: Una Estrategia para Potenciar el Aprendizaje de la Probabilidad en Estudiantes de Grado Quinto de Educación Básica Primaria

Tesis presentada para optar al título de Magíster en Educación

Amparo Santamaría Zúñiga

Director de Tesis

José Darwin Lenis Mejía

Magíster en Educación y Desarrollo Humano

Universidad Icesi

Escuela de Ciencias de la Educación

Maestría en Educación

Santiago de Cali

2018

Secuencia Didáctica Fundamentada en el Juego: Una Estrategia para Potenciar el Aprendizaje de la Probabilidad en Estudiantes de Grado Quinto de Educación Básica Primaria

Amparo Santamaría Zúñiga

Universidad Icesi

Maestría en Educación

Notas del autor

Amparo Santamaría Zúñiga, Escuela de Ciencias de la Educación, Universidad Icesi

Esta tesis ha sido financiada por el Ministerio de Educación Nacional

La correspondencia relacionada con este trabajo de grado debe ser dirigido a Amparo Santamaría Zúñiga, Escuela de Ciencias de la Educación, Universidad Icesi, Cl. 18 #122-135, Cali, Valle del Cauca

Contacto: amsazu1973@hotmail.com

Nota de aceptación

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, febrero de 2018

Agradecimientos

Al Ministerio de Educación Nacional por brindarme la oportunidad, a través del programa Becas para la Excelencia Docente, de continuar cualificándome a nivel profesional.

A los profesores de la universidad Icesi quienes con su profesionalismo y sabiduría guiaron y apoyaron mi formación académica.

Al asesor de trabajo de grado, profesor José Darwin Lenis Mejía, quien siempre estuvo dispuesto a orientarme y a compartir sus conocimientos.

A la universidad Icesi porque en sus instalaciones se hicieron realidad mis sueños de cursar los estudios de maestría.

A la Institución Educativa San Antonio del municipio de Jamundí por los espacios concedidos para la implementación del presente trabajo de investigación.

Dedicatoria

A Dios por ser mi guía y mi fortaleza en los momentos de desfallecimiento y por darme una vida plena de oportunidades.

A mis padres y hermanos por infundir en mí la lucha y el deseo de superación. Especialmente a mis padres, Uberney y Amparo, por ser los pilares fundamentales en mi vida.

A mis hijos Nicolás y Nicolle, y a mi esposo Fredy por su comprensión, amor y apoyo incondicional. Porque son mi mayor motivación para seguir adelante.

Resumen

El presente trabajo de investigación consiste en la implementación de una Secuencia Didáctica (que en adelante se denominará SD) fundamentada en el juego, enfocada a fortalecer el desarrollo de competencias matemáticas específicamente en el aprendizaje de la probabilidad, en estudiantes de grado 5º de la institución educativa San Antonio del municipio de Jamundí-Valle del Cauca.

Para ello, se retoman las ideas de los autores Benítez y Sánchez (1997), citados por Rivas, 2009), quienes en sus investigaciones con estudiantes de diversos grados de escolaridad, determinaron unos niveles de razonamiento probabilístico. Trabajo que luego fue retomado por De las Fuentes (2008, citado por Rivas, 2009) en su tesis de maestría con estudiantes de secundaria, quien sugirió realizar investigaciones similares en otros niveles educativos.

La investigación se lleva a cabo en tres momentos, se inicia con la aplicación de un pre-test con el propósito de diagnosticar en qué niveles del razonamiento probabilístico se encuentran los estudiantes. Seguidamente se diseña e implementa una secuencia didáctica basada en el aprendizaje de nociones y procedimientos probabilísticos a partir de juegos aleatorios. Una vez implementada la secuencia se aplica un pos-test, cuyo fin es evaluar los logros alcanzados y en qué niveles del razonamiento probabilístico se encuentran ahora los estudiantes. Para finalmente realizar un análisis comparativo que permitió determinar la pertinencia de esta propuesta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje del concepto de probabilidad en los estudiantes de grado quinto.

Palabras clave: Secuencia Didáctica, competencias matemáticas, aprendizaje, probabilidad, niveles de razonamiento probabilístico, juegos aleatorios.

Abstract

The present research work consists of the implementation of a Didactic Sequence (hereinafter referred to as SD) based on the game, focused on strengthening the development of mathematical competences and more specifically the learning of probability in 5th grade students of the educational institution San Antonio of the municipality of Jamundí-Valle del Cauca.

For this, the ideas of the authors Benítez and Sánchez (1997) are retaken, who in their investigations with students of different degrees of schooling, determined probabilistic levels of reasoning. Work that was later taken up by De las Fuentes (2008) in his master's thesis with high school students, who suggested similar research at other educational levels.

The investigation is carried out in three moments, it starts with the application of a pre-test with the purpose of diagnosing in which levels of the probabilistic reasoning the students are. Next, a didactic sequence based on the learning of probabilistic notions and procedures from random games is designed and implemented. Once the sequence is implemented, a post-test is applied, whose purpose is to evaluate the achievements and at what levels of probabilistic reasoning the students are now. To finally perform a comparative analysis that allowed to determine the relevance of this didactic proposal for the strengthening of the learning of the concept of probability in the fifth grade students.

Keywords: Didactic sequence, mathematical competences, learning, probability, levels of probabilistic reasoning, random games.

Tabla Contenido

Introducción 1
Capitulo I 4
Presentación del problema 4
Planteamiento del problema 4
Pregunta de Investigación 8
Idea de Investigación 9
Hipótesis 9
Objetivos 9
Objetivo General 9
Objetivos Específicos. 9
Justificación 10
Capítulo II 11
Marco Teórico 11
Teorías del Aprendizaje 11
Teoría Constructivista del Aprendizaje. 11
Teoría del aprendizaje de Vigotsky. 12
Teoría del aprendizaje de Piaget. 13
Aprendizaje Significativo 16
Estrategias de Aprendizaje 17
El juego en el aprendizaje 19
Enfoque por Competencias 21
Competencia Matemática. 23
Concepción de Didáctica 26
Didáctica de las Matemáticas. 26
Teoría de las Situaciones Didácticas 28
Situación de Acción. 29
Situación de Formulación. 29
Situación de Validación. 30
Situación de Institucionalización. 30
Concepto de Secuencia Didáctica 31

Análisis Epistemológico de la Probabilidad 32
Fenomenología de la probabilidad. 34
Sistemas de representación de la probabilidad. 35
Niveles de razonamiento probabilístico 37
La Probabilidad en los Referentes Nacionales 39
Estándares Básicos de Competencia (EBC). 39
Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). 41
Capitulo III 43
Diseño Metodológico 43
Contexto de la investigación 43
Sujetos de investigación 43
Tipo de investigación 44
Fases de la investigación 45
Instrumentos 46
Pre-test. 46
Secuencia Didáctica. 47
Pos-test. 47
Capítulo IV 48
Análisis de Resultados 48
Análisis del pre-test 48
Presentación de la actividad. 48
Condiciones de la aplicación. 49
Análisis cualitativo. 49
Análisis de la Secuencia Didáctica 60
Presentación de la actividad. 60
Condiciones de la aplicación. 61
Análisis Cualitativo. 63
Análisis del pos-test 75
Presentación de la actividad. 75
Condiciones de aplicación. 76
Análisis Cualitativo. 76

Análisis comparativo entre el pre-test y el pos-test 90
Capítulo V 92
Conclusiones 92
Recomendaciones 94
Referencias 96
Anexos 100
Anexo 1: Pre-test pensamiento aleatorio-probabilidad 100
Anexo 2 - Secuencia Didáctica 104
Anexo 3: Pos-test pensamiento aleatorio-probabilidad 122

Lista de Tablas

Tabla 1. Representaciones semióticas de la probabilidad……………………………………..36

Tabla 2. Características y codificación de la población participante en la investigación…….....44

Tabla 3. Fases de la investigación……………………………………………………………..45

Tabla 4. Clasificación de las argumentaciones dadas por los estudiantes en el pre-test, según los niveles de razonamiento probabilístico………………………………………………………..51

Tabla 5. Condensado de respuestas obtenidas en el pre-test por opción………………………..52

Tabla 6. Clasificación de las argumentaciones dadas por los estudiantes en el pos-test, según los niveles de razonamiento probabilístico………………………………………………………78

Tabla 7. Condensado de respuestas obtenidas en el pos-test por opción………………………..79

Tabla 8. Condensado de respuestas obtenidas en el pre-test por opción………………………...87

Lista de Gráficos

Gráfico 1. Resultados pruebas Saber en matemáticas grado 5º I. E. San Antonio-2016……………………………………………………………………………………………….5

Gráfico 2. Fortalezas y debilidades en las competencias y componentes evaluados en matemáticas-grado 5º I. E. San Antonio -2016……………………………………..………….6

Gráfico 3. Coherencia horizontal y vertical en los Estándares Básicos de Competencia del grado 5º referentes a la probabilidad…………………………………………………………………40

Gráfico 4. Clasificación de las respuestas formuladas por los estudiantes en el pre-test en la escala del pensamiento probabilístico…………………………………………………………50

Gráfico 5. Tablero de juego "Carrera de Velocidad"-Guía de Aprendizaje No.4……………….71

Gráfico 6. Clasificación de las respuestas formuladas por los estudiantes en el pos-test en la escala del pensamiento probabilístico…………………………………………………………77

Gráfico 7. Comparativo entre los resultados obtenidos en el pre-test y pos-test, con respecto a los niveles de pensamiento probabilístico………………………………………………………...90

Introducción

Nuestra sociedad experimenta, día a día y en todos sus ámbitos, constantes cambios y transformaciones, dado el acelerado progreso de la ciencia y la tecnología; fenómeno éste que demanda sujetos cada vez más críticos, más reflexivos, más participativos, líderes, con mayor habilidad y capacidad para resolver problemas del contexto en el cual se desenvuelven, en otras palabras, sujetos con competencias para ayudar a transformar positivamente la sociedad en la cual interactúan.

Particularmente, las competencias matemáticas favorecen la resolución de problemas en cualquier contexto y ámbito de la vida; pero, desafortunadamente, la experiencia ha demostrado que el aprendizaje de esta área representa grandes dificultades para la mayoría de los estudiantes.

Y es en el pensamiento aleatorio, más específicamente en el tema de la probabilidad, en donde se hace más agudo este fenómeno, pues se ha evidenciado que este es uno de los objetos matemáticos que poco se trabaja en el aula o se hace de forma muy superficial; o lo que es peor aún, se trabajan conceptos erróneos. En las pruebas externas Saber, Supérate y Aprendamos, que aplica el Estado, los niños se ven enfrentados a preguntas de componente aleatorio, las cuales son respondidas, en la mayoría de los casos, al azar o por descarte más no porque tengan pleno conocimiento en estos temas de la aleatoriedad.

Ante este panorama, se plantea como propósito principal de la presente investigación, la implementación de una secuencia didáctica fundamentada en el juego, con el fin de promover el desarrollo del razonamiento probabilístico en los estudiantes de grado 5º de la institución educativa San Antonio del municipio de Jamundí.

A continuación se describe cada uno de los capítulos que componen este documento, con el fin de dar una idea general del contenido del mismo.

En el primer capítulo se define el problema de investigación haciendo referencia al bajo rendimiento de los estudiantes en el área de matemáticas en pruebas nacionales estandarizadas. Se plantea también la pregunta de investigación y los objetivos (generales y específicos) que son los que orientan las acciones emprendidas en este trabajo. De igual forma, se presenta una justificación en la que se manifiesta la pertinencia de este trabajo como aporte a la didáctica que permite mejores aprendizajes en los estudiantes.

En el segundo capítulo se presentan los referentes teóricos que sustentan el presente trabajo de investigación, entre ellos: didáctica de las matemáticas, teoría de las situaciones didácticas, secuencia didáctica, competencias matemáticas, aprendizaje significativo, el juego en el aprendizaje, análisis epistemológico de la probabilidad, sistemas de representación de la probabilidad y niveles de razonamiento probabilístico.

En el tercer capítulo se explican los tres momentos o etapas a través de los cuales se llevó a cabo la investigación. Básicamente estos momentos corresponden al diseño y aplicación de un pre-test, una SD constituida por cuatro guías de trabajo y finalmente un pos-test. También se describen la metodología de trabajo y las condiciones en las que se desarrollaron las actividades en el aula.

En el cuarto capítulo se presenta un análisis de la información obtenida a partir de la implementación de los diferentes instrumentos didácticos: pre-test, guías didácticas y pos-test. El presente estudio se realiza desde un enfoque cualitativo, aunque se presentan algunas tablas con los datos obtenidos tanto en el pre-test como en el pos-test, con el fin de hacer un análisis comparativo de resultados, que permite determinar el impacto de las actividades desarrolladas para el aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones, dando respuesta a la pregunta de investigación y determinando el alcance de los objetivos planteados al inicio de la investigación. Del análisis de los resultados y de las conclusiones se derivan una serie de recomendaciones para el proceso enseñanza-aprendizaje de la probabilidad.

Capítulo I

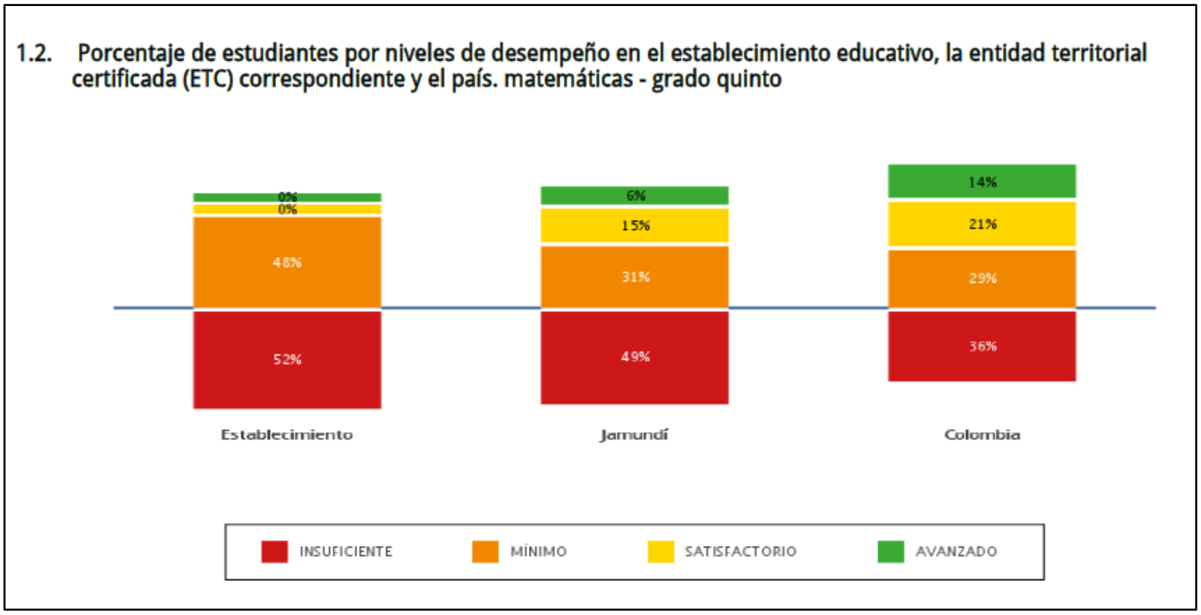
Presentación del problema

Planteamiento del problema

La calidad de la educación en Colombia se mide a través de evaluaciones nacionales (SABER 3º, 5º, 9º; Saber 11º, Saber Pro) e internacionales (PISA), aplicadas a los estudiantes. Según informe de la OCDE, basado en los resultados de las Pruebas Pisa de 2012, Colombia se sitúa entre los diez países con mayores índices de bajo rendimiento escolar entre 64 analizados; específicamente en tres áreas: matemáticas, lectura y ciencias. Según este informe, casi cuatro millones de alumnos de 15 naciones que pertenecen a la OCDE tienen bajo rendimiento en matemáticas (Revista Semana, 2016).

Aunque en las pruebas del 2015 Colombia mejoró en sus resultados, obteniendo en lectura 22 puntos más, en ciencias 17 puntos más y en matemáticas 14 puntos más, aún sigue estando rezagada en comparación con el promedio del resto de países que hacen parte de la OCDE (El Tiempo, 2016). Y tal como se puede apreciar, es en el área de matemáticas en donde se obtuvo menor avance.

En cuanto a los resultados de las pruebas SABER 2016 (Icfes), en el área de matemáticas en el grado quinto de la Institución Educativa San Antonio, revelan que a nivel nacional el 36% de estudiantes está en el nivel insuficiente, 29% en mínimo, 21% en satisfactorio, 14% en avanzado. A nivel de entidad territorial, los resultados son: 49% en insuficiente, 31% en mínimo, 15% en satisfactorio y 6% en avanzado. Mientras que los resultados institucionales son: 42% en insuficiente, 58% en mínimo, 0% en satisfactorio y 0% en avanzado. Así lo revela el siguiente gráfico:



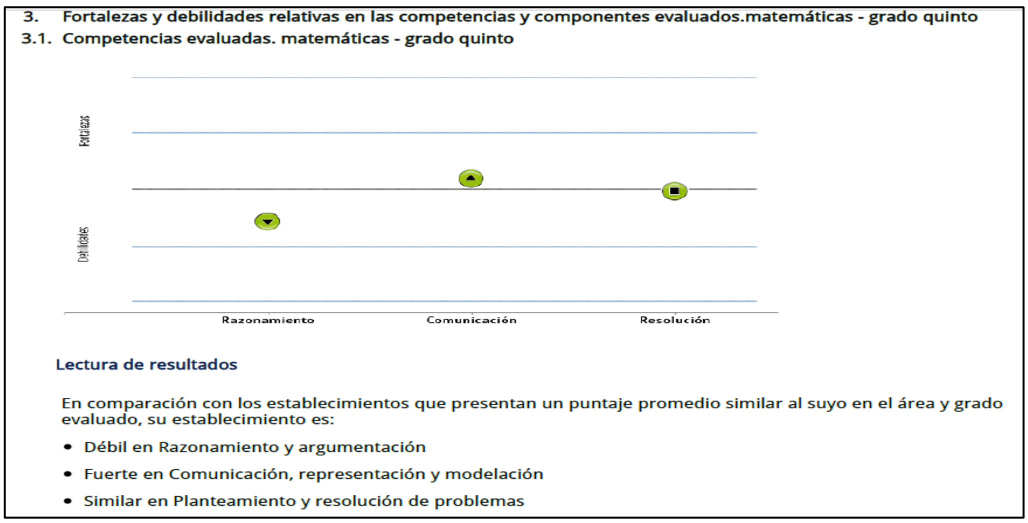
Nota. *Tomado de ICFES Saber 3º, 5º, 7º y 9º 2016*

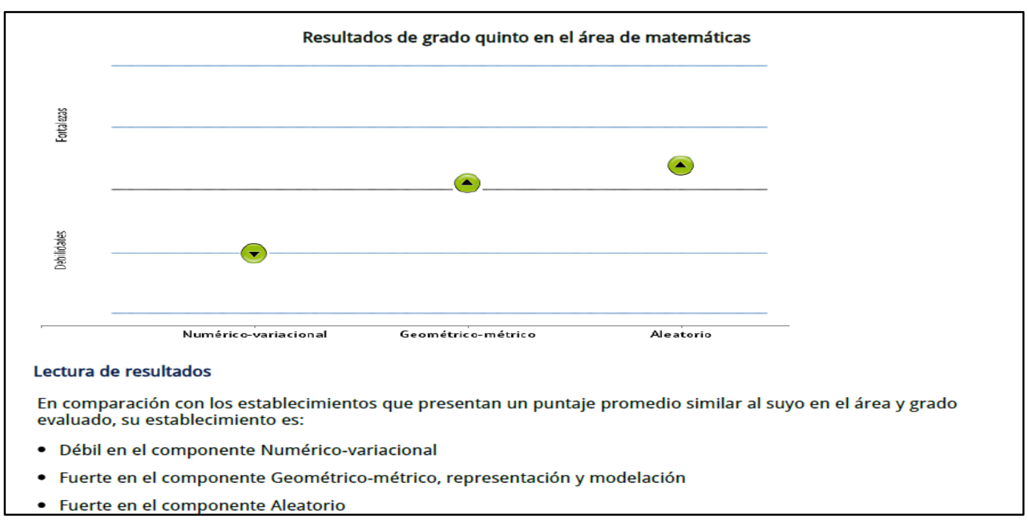
Gráfico 1. *Resultados pruebas Saber en matemáticas grado 5º I. E. San Antonio-2016*

Por lo anterior, se puede concluir que el porcentaje de estudiantes en nivel insuficiente en la IESA es superior al municipal y al nacional, y el porcentaje de estudiantes en nivel avanzado en lo institucional es inferior con respecto al municipal y al nacional; lo cual incide en los resultados del Índice Sintético de Calidad Educativa de la institución, herramienta con la que se está midiendo la calidad de la educación en nuestro país.

Más específicamente aún, en cuanto a las competencias y componentes evaluados en el área de matemáticas, en los cuales se compara a la Institución con otros establecimientos educativos con puntajes promedio similares, teniendo en cuenta la siguiente escala: Fuerte (si está por encima del promedio), Débil (si está por debajo del promedio) y Similar (si iguala el promedio); los estudiantes de grado 5º de la IESA presentan los siguientes resultados: débil en Razonamiento y argumentación, fuerte en Comunicación, representación y modelación, y similar en Planteamiento y resolución de problemas. Mientras que, en cuanto a los componentes evaluados se encuentran así: Débil en el componente numérico-variacional y fuerte en los componentes geométrico-métrico y aleatorio. Cabe aclarar que el pensamiento aleatorio abarca la estadística descriptiva e inferencial, la combinatoria y la probabilidad. Tanto en las pruebas Saber cómo en las de Supérate y Aprendamos, las preguntas del componente aleatorio tienen un alto porcentaje de estadística descriptiva tanto en el cuerpo de la pregunta como en las opciones de respuesta, lo cual está generando el resultado fuerte en este componente; pues en el aula el trabajo del pensamiento aleatorio se enfoca mucho en las tablas de datos y gráficos de barras, dejando de lado o para el final la probabilidad.

A continuación se pueden observar tales resultados:





Nota. *Tomado de ICFES Saber 3º, 5º, 7º y 9º 2016*

Gráfico 2. *Fortalezas y debilidades en las competencias y componentes evaluados en matemáticas-grado 5º I. E. San Antonio-2016.*

En una descripción más detallada que nos da el documento Informe por Colegio 2016, que emite el ICFES, basado en los resultados de las pruebas Saber 3º, 5º y 9º, se puede observar que en cada una de las competencias matemáticas que se evalúa se encuentra un porcentaje considerable de estudiantes que No responden acertadamente las preguntas correspondientes a un aprendizaje determinado del componente aleatorio. Veamos:

Competencia: Comunicación

El 21% de los estudiantes no expresa grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias o razones.

Competencia: Razonamiento

El 35% de los estudiantes no conjetura ni argumenta acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

Competencia: Resolución

El 28% de los estudiantes no resuelve ni formula problemas que requieren el uso de la fracción como parte de un todo, como cociente y como razón.

Aunque en el componente aleatorio se muestran fuertes y los porcentajes de estudiantes para el mejoramiento en aprendizajes referidos a la probabilidad están por debajo del 50%, se encuentra cierta debilidad al argumentar sus respuestas, así éstas hayan sido correctas.

Los Estándares Básicos de Competencias de matemáticas reconocen que las matemáticas son mucho más que un sistema teórico, ya que en sí mismas constituyen una importante herramienta práctica para enfrentar y comprender diferentes situaciones. Por esta razón, la educación en dicha área debe conceder un gran valor a la formación de los conceptos, pero sobre todo de las destrezas necesarias para la resolución de problemas en diferentes contextos, y para comunicarse por medio del lenguaje matemático.

> Ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales (resolución de problemas, modelación, comunicación, razonamiento y ejercitación) en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia y se concreta en el pensamiento lógico y en los cinco pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional) (MEN, 2006).

Después de todo lo expuesto anteriormente y asumiendo la necesidad de mejorar los aprendizajes de los estudiantes de grado quinto, sus resultados en las pruebas estandarizadas y por ende la calidad de la educación; con el presente trabajo de investigación para la Maestría en Educación, se pretende impactar y fortalecer el aprendizaje de los estudiantes de grado 5º de la Institución Educativa San Antonio, a través de la implementación de una secuencia didáctica de matemáticas enfocada en el componente aleatorio, específicamente en el tema de la probabilidad, ya que es uno de los objetos matemáticos que, aunque se encuentra contemplado en el currículo, se descuida un poco su enseñanza y se deja relegado para el final.

Pregunta de Investigación

¿Cómo una secuencia didáctica fundamentada en el juego potencia el aprendizaje de la probabilidad, en el campo del pensamiento aleatorio, en estudiantes de grado 5º de educación básica primaria?

Idea de Investigación

Aplicación de una secuencia didáctica fundamentada en el juego para potenciar el aprendizaje de la probabilidad, en el campo del pensamiento aleatorio, en estudiantes de grado 5º de educación básica primaria.

Hipótesis

A través de una secuencia didáctica fundamentada en el juego, el aprendizaje de la probabilidad cobra mayor importancia y significatividad para el estudiante por el componente motivacional que contiene.

Objetivos

Objetivo general

Determinar el aporte de una secuencia didáctica fundamentada en el juego para el fortalecimiento y desarrollo del pensamiento aleatorio, en el campo de la probabilidad, en estudiantes de grado 5º de educación básica primaria de la Institución Educativa San Antonio de Jamundí.

Objetivos específicos

1. Analizar las dificultades que presentan los estudiantes de grado 5º de EBP en el razonamiento probabilístico para desarrollar pensamiento aleatorio.
2. Aplicar una Secuencia Didáctica que permita fortalecer la apropiación de saberes en el campo de la probabilidad en estudiantes de grado 5º de educación básica primaria.
3. Evaluar la apropiación de saberes sobre probabilidad, en el pensamiento aleatorio, a partir de la aplicación de una Secuencia Didáctica.

Justificación

Para nadie es un secreto que el aprendizaje de las matemáticas ha representado, a lo largo de toda la historia, un gran problema. Los resultados de pruebas estandarizadas nacionales e internacionales nos ratifican que en la actualidad persiste dicho problema. No obstante, se trata de una disciplina indispensable y necesaria en la vida personal, profesional y social de todo individuo. Todo ser humano debe ser matemáticamente competente para desenvolverse con efectividad en el contexto en el que interactúa.

El aprendizaje de la probabilidad no es la excepción, también enfrenta dicha problemática, más aún cuando se trata de esa parte olvidada y poco desarrollada de las matemáticas. El razonamiento probabilístico es fundamental para el ser humano por cuanto le permite tomar decisiones importantes en su vida cotidiana.

Es por esto, que se hace necesaria la transformación de las prácticas educativas en el aula. Se requieren unas prácticas que lleven al estudiante a desarrollar competencias matemáticas, a desarrollar un aprendizaje verdaderamente significativo, a través de situaciones cercanas a él.

Considerando lo anterior, el presente trabajo cobra especial relevancia, ya que a través de la implementación de una SD fundamentada en el juego, se busca afianzar los aprendizajes de la probabilidad en los estudiantes de grado quinto de la I E San Antonio. A la vez que se compartirá con la docente de este grado una estrategia metodológica y didáctica diferenciada para la enseñanza de dicho objeto matemático.

Capítulo II

Marco Teórico

Teorías del Aprendizaje

Las teorías del aprendizaje son aquellas que describen la manera en que los teóricos han investigado y plantean cómo ocurre el aprendizaje, cómo las personas aprenden nuevas ideas y conceptos.

A su vez, al interior de estas teorías del aprendizaje existen diferentes corrientes, a saber: conductismo, constructivismo, cognitivismo, teorías eclécticas, de cambio conceptual. Así mismo, el enfoque constructivista, en el cual se apoya la presente investigación, tiene aportes del conductismo y del cognitivismo.

Teoría Constructivista del Aprendizaje.

Esta teoría sostiene que el aprendizaje no se descubre, si no que se construye. Desde esta perspectiva, se asemeja el aprendizaje con la construcción de significados a partir de la experiencia, en donde el individuo debe ser un participante activo y redescubrir sus procesos básicos. El aprendizaje humano es una actividad que el sujeto realiza a través de su experiencia con el entorno. Carretero (1997) define el constructivismo como:

> La idea de que el individuo-tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos- no es un simple producto del ambiente ni resultado de sus disposiciones internas, sino una *construcción propia;* que se produce día a día como resultado de la interacción entre esos factores. (p. 24)

A la teoría constructivista han realizado grandes aportes autores como: Piaget, Vigotsky, Ausubel y Bruner. Para el caso del presente trabajo de investigación se tendrá en cuenta a

Vigotsky, quien se centra en cómo el medio social permite una reconstrucción interna y a Piaget, que por el contrario, concibe el aprendizaje como un proceso interno de construcción.

Teoría del aprendizaje de Vigotsky.

Según Vigotsky, el aprendizaje tiene su base en la interacción con otras personas y con el medio, en el cual se desenvuelve el sujeto. Se trata de una teoría sociocultural del aprendizaje en donde los padres, parientes, compañeros, los mismos docentes y la cultura en general (creencias y actitudes) influyen en el desarrollo del aprendizaje del sujeto. Vigotsky señala: "El camino que va del niño al objeto y del objeto al niño pasa a través de otra persona" (Vigotsky 1979, p. 56), lo que quiere decir que reconstruir un objeto de conocimiento implica la interacción con el propio objeto pero además con otras personas. Cuando esto ha ocurrido a nivel social, el conocimiento se internaliza pasando así a un nivel individual:

> En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde a nivel individual; primero entre personas (interpsicológica), y después, en el interior del propio niño (intrapsicológica). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos. (Vigotsky, 1979: 94)

Es decir que, la internalización es un proceso a través del cual los sucesos que ocurren fuera del individuo pasan al plano interior, al plano de la mente.

Por otra parte, Vigotsky rechaza el aprendizaje como una simple acumulación de reflejos o asociación de estímulos y respuestas. Para este autor, la actividad es de gran importancia en el aprendizaje y desarrollo del sujeto; el hombre no se limita a responder a los estímulos si no que actúa sobre ellos transformándolos. Y esta transformación se da justo en lo que él denomina

Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), concepto central en esta teoría socio constructivista, y estrechamente relacionado con los análisis que se hacen sobre las prácticas educativas o el diseño de estrategias escolares, el cual define como:

> La distancia entre el nivel real del desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz. (Vigotsky, 1979: 133)

En otras palabras, este concepto se relaciona con la diferencia entre lo que un niño puede lograr de forma independiente y lo que un niño puede lograr con la orientación y el apoyo de otro experto (un adulto o un par).

Vigotsky concibe la zona de desarrollo próximo como el área donde se debe orientar e instruir de manera más sensible, puesto que permite al sujeto desarrollar habilidades que van a ser la base para el desarrollo de las funciones mentales superiores.

Teoría del aprendizaje de Piaget.

Piaget, en su teoría postula que el desarrollo intelectual está estrechamente relacionado con el desarrollo biológico del individuo. Descubre los estadios de desarrollo cognitivo desde la infancia hasta la adolescencia, cómo las estructuras psicológicas se desarrollan a partir de los reflejos innatos, se organizan durante la infancia en esquemas de conducta, se internalizan durante el segundo año de vida como modelos de pensamiento y se desarrollan durante la infancia y la adolescencia en complejas estructuras intelectuales que caracterizan la vida adulta.

Algunas ideas importantes sobre las cuales se sustenta la teoría de Piaget son:

- El funcionamiento de la inteligencia: como proceso de naturaleza biológica, en el cual se dan dos procesos complementarios: ASIMILACIÓN y ACOMODACIÓN.

Mediante estos dos procesos el individuo va reestructurando cognitivamente su aprendizaje a lo largo del desarrollo, en un proceso de EQUILIBRACIÓN.

- El concepto de esquema: que aparece en relación con el tipo de organización cognitiva. Para Piaget el esquema es una estructura mental determinada que puede ser transferida y generalizada.
- El proceso de equilibración: Para Piaget, este equilibrio entre asimilación y acomodación se da en tres niveles:

1. El equilibrio se establece entre los esquemas del sujeto y los acontecimientos externos.
2. El equilibrio se establece entre los propios esquemas del sujeto.
3. El equilibrio se traduce en una integración jerárquica de esquemas diferenciados.

Pero en el proceso de equilibración surge un nuevo concepto de suma importancia EL CONFLICTO COGNITIVO, que no es otra cosa que cuando se rompe el equilibrio cognitivo por la contradicción entre dos esquemas.

- Las etapas del desarrollo cognitivo: La evolución de la inteligencia supone la aparición progresiva de diferentes etapas que se diferencian entre sí por la construcción de esquemas cualitativamente diferentes.

Las implicaciones del pensamiento piagetiano en el aprendizaje inciden en la concepción constructivista del aprendizaje. Los principios básicos del pensamiento piagetiano sobre el aprendizaje son:

- El principio básico de la metodología piagetiana es la primacía del método del descubrimiento.

- El aprendizaje es un proceso constructivo interno.
- El aprendizaje depende del nivel de desarrollo del sujeto.
- En el desarrollo del aprendizaje son importantes los conflictos cognitivos o contradicciones cognitivas.
- La interacción social favorece el aprendizaje.
- La experiencia física supone una toma de conciencia de la realidad que facilita la solución de problemas e impulsa el aprendizaje.

En consecuencia, son muchas las diferencias pero también las semejanzas entre las dos teorías. Al igual que Piaget, Vigotsky planteaba que los niños nacen con un repertorio básico de habilidades que permiten su desarrollo intelectual, pero mientras Piaget se centraba en los reflejos motores y las capacidades sensoriales, Vigotsky se refiere a las funciones mentales elementales: atención, sensación, percepción, memoria.

Al igual que Piaget, Vigotsky creía que los infantes son criaturas curiosas que participan activamente en su propio proceso de aprendizaje. Sin embargo, Vigotsky hace mayor énfasis en el aporte social al proceso de desarrollo, mientras que Piaget enfatizó más en el descubrimiento por iniciativa propia.

Vigotsky se concentra en la ZDP que "define las funciones que aún no han madurado, pero que se encuentran en ese proceso de maduración", es decir, en cómo el niño puede llegar a ser lo que no es; mientras que Piaget se dedicó a analizar el nivel de desarrollo real (ZDR) del sujeto, es decir, cómo el niño ha llegado a ser lo que es, puesto que esta ZDR "define las funciones que ya han madurado"

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación se retoman de los dos autores algunas ideas que comparten, como son:

- Para ambos la interacción social favorece el aprendizaje.
- Dan importancia a la implicación del adulto o del otro en el trabajo educativo.
- Se interesan en el aprendizaje activo, en la experiencia.
- Adoptan una posición organicista con respecto al tema del aprendizaje.

Aprendizaje Significativo

Ausubel plantea que el aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información, entendiéndose por estructura cognitiva, al conjunto de conceptos, ideas y proposiciones que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización. Es decir que, el aprendizaje del sujeto no comienza de cero, el aprendiz posee ya una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio.

Un aprendizaje es significativo cuando los nuevos conocimientos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación no arbitraria se debe entender que las ideas no se relacionan con cualquier aspecto existente en la estructura cognoscitiva del alumno sino con aspectos específicamente relevantes, a lo que Ausubel llama "subsumidores", como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Ausubel ,1983:18). Sustancial significa que es la sustancia del nuevo conocimiento, de las nuevas ideas, lo que se incorpora a la estructura cognitiva del sujeto que aprende y no las palabras con que se expresan. (Moreira, 1997)

Todo lo anterior significa, que en el proceso enseñanza-aprendizaje es fundamental que el docente conozca y tenga en cuenta lo que el estudiante ya sabe, para que este pueda establecer una relación lógica con la información nueva que debe aprender.

Por el contrario, según Ausubel, cuando no existen subsumidores adecuados, claros, estables, definidos, y el material de aprendizaje es relacionable con la estructura cognitiva del sujeto que aprende de forma arbitraria y literal, el aprendizaje se denomina mecánico o automático. (1983:37)

Tal como lo expresa Moreira (1997:3), "Queda, entonces, claro que en la perspectiva ausubeliana, el conocimiento previo (la estructura cognitiva del aprendiz) es la variable crucial para el aprendizaje significativo"

Estrategias de Aprendizaje

Actualmente es muy común escuchar hablar de "estrategia". Se habla de estrategias políticas, económicas, sociales, deportivas, etc., pero este es un término que ya se usaba para referirse a las tácticas militares. Comúnmente, se consideran dos componentes claves en la definición de estrategia, el primero es el de acciones que se deben realizar y el segundo, un intento de alcanzar una meta o un objetivo a través de dichas acciones.

En el campo de la educación, que es el que interesa en este trabajo, se podría agregar el término " de aprendizaje" a la anterior concepción de estrategia y se obtendría así una primera y sencilla definición de estrategia de aprendizaje como la siguiente: "conjunto de acciones que se realizan para obtener un objetivo de aprendizaje". En este sentido, son muchas las nociones que se han asociado a la concepción de estrategia de aprendizaje, algunas de ellas son: capacidades y habilidades cognitivas, técnicas y métodos de estudio y resolución de problemas, hábitos de trabajo intelectual o procedimientos de aprendizaje.

Según Monereo (2000), desde una concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje, son dos los enfoques que se ocupan del tema de la estrategia. El primero, que hace referencia al modelo de procesamiento de la información, en el cual se consideran las estrategias como “secuencias integradas de procedimientos o actividades que se escogen con el propósito de facilitar la adquisición, el almacenaje y/o la utilización de información o conocimientos”. El segundo enfoque - y con el cual se identifica esta investigación- hace referencia al modelo de aprendizaje situado, que admite la idea de unos sistemas individuales de tratar y gestionar la información, y que considera que el origen y desarrollo de estos sistemas y su uso funcional se deben analizar e interpretar siempre en el seno de situaciones de interacción social.

Desde la perspectiva del primer modelo-procesamiento de la información-: Las estrategias varían según la información sea procesada a un nivel más superficial y fonológico (estrategias de repetición) o más profundo y semántico (estrategias de elaboración y de organización), existiendo, aparte, unas estrategias de apoyo relacionadas con los procesos motivacionales. (p. 29)

Mientras que, desde la posición del segundo modelo -el aprendizaje situado-, “una estrategia sería una acción socialmente mediada y mediatizada por instrumentos como son los procedimientos” (p. 29)

El concepto de aprendizaje se aborda desde un enfoque constructivista, el cual ha sido sustentado por los aportes de diferentes corrientes psicológicas como son: el enfoque psicogenético piagetiano, la psicología sociocultural vigotskyana, la teoría ausubeliana del aprendizaje significativo, entre otras. A pesar de las diferentes posturas de cada una de estas corrientes y sus respectivos autores, todas convergen en el principio de la importancia de la acción, de la actividad del alumno en la construcción de su propio conocimiento.

En este trabajo se asume el enfoque del constructivismo social de Vigotsky, para quien el aprendizaje se produce en un contexto de interacción con adultos, pares, cultura, instituciones. Estos son considerados agentes de desarrollo que impulsan y regulan el comportamiento del sujeto, el cual desarrolla sus habilidades mentales (pensamiento, atención, memoria, voluntad) a través del descubrimiento y el proceso de interiorización, lo que le permite apropiarse de los signos e instrumentos de la cultura, reconstruyendo sus significados. Para Vigotsky, el conocimiento es un proceso de interacción entre el sujeto y el medio, pero el medio entendido como algo social y cultural, no solamente físico.

El juego en el aprendizaje

El término juego viene del latín LUDOS, de lúdica, es el acto de jugar. Y etimológicamente, esta palabra viene de JOCUS, que significa ligereza, pasatiempos, frivolidad.

Autores como Piaget, Vigotsky, Karl Groos, Pugmire-Stoy (1996), Gimeno y Pérez (1989), Guy Jacquin, entre muchos otros, consideran el juego como una actividad libre y espontánea en la que el individuo, a través del lenguaje (oral y simbólico) expresa su personalidad. Se cumplen reglas voluntariamente aceptadas e incondicionalmente seguidas y le permite representar el mundo real y relacionarlo con el imaginario. También consideran que esta representación de la realidad le permite a los niños prepararse para la vida adulta, porque, como lo expresa Groos, 1902 (citado por Tortolero de Banda, 2008), el juego contribuye en el desarrollo de funciones y habilidades que necesita el niño para realizar actividades que desempeñará cuando sea grande. Además, el goce, disfrute, o diversión está presente siempre.

Para Piaget (1956) el juego forma parte de la inteligencia del niño, porque representa la asimilación funcional o reproductiva de la realidad según cada etapa evolutiva del individuo. Este autor se centró principalmente en la cognición sin dedicar demasiada atención a las emociones y las motivaciones de los niños. El tema central de su trabajo es “una inteligencia” o “una lógica” que adopta diferentes formas a medida que la persona se desarrolla.

Por su parte, Vigtsky, desde la teoría socio cultural, destaca que el juego va más allá de las pulsaciones internas individuales y que se trata de una actividad social en la que gracias a la interacción y cooperación con otros niños, se logran adquirir papeles o roles que son complementarios al propio, tomar decisiones, afianzar valores y cumplir normas. Es la teoría que condiciona el desarrollo humano y establece que el juego facilita el paso de unas adquisiciones incipientes e inmaduras a otras afianzadas y permanentes (ZDP). La idea fundamental de su obra radica en que el desarrollo de los seres humanos únicamente puede ser explicado en términos de la interacción social y es precisamente este el elemento fundamental para desarrollar actividades lúdicas, las cuales deben cumplir dos fines: el aprendizaje y el reforzamiento de las relaciones entre los estudiantes y su entorno . Al respecto, Vigotsky (1979) dice: “En el juego lo más importante no es la satisfacción que recibe el niño al jugar, sino utilizar correctamente el sentido objetivo del juego (…) la manera en que ayudamos a los niños a organizar su juego, seleccionamos y dirigimos su actividad lúdica, así podemos estimular y dirigir su reacción creadora”. Esta teoría es quizás la más acertada en cuanto al juego se refiere, ya que sus ideas son las más utilizadas en el ámbito educativo.

El juego, la imaginación y el razonamiento son aspectos propios del ámbito educativo y de la formación integral en el ser humano, de tal forma que si se combina de manera adecuada y pertinente la lúdica en el proceso formativo es posible lograr en el individuo desarrollo de pensamiento, activación del razonamiento, puesta en escena de la creatividad, mejoramiento de la actitud y fortalecimiento de la confianza personal.

Es por ello que, hoy por hoy, en el ámbito educativo, el juego debe ser asumido como una actividad que todo maestro debe estimular, como una condición para ser permisivos en la generación de ideas y también para romper estructuras mentales rígidas y arraigadas. Según

Vargas (2015), a través del juego, que es una actividad amena, interesante y motivadora, es posible desarrollar, de forma activa y creativa, competencias y habilidades como resolver problemas, analizar críticamente la realidad y transformarla, identificar conceptos y descubrir el conocimiento. "El juego, como forma de actividad humana, posee un gran potencial motivacional que puede y debe ser utilizado con fines docentes" (2015)

Enfoque por Competencias

El concepto de competencia no nace en el mundo de la educación, este es un término que ha surgido anteriormente en el ámbito laboral. La sociedad actual enfrenta nuevos retos y necesidades, experimenta cambios fundamentales en diferentes aspectos: social, económico, político, tecnológico, etc., lo cual exige también cambios en la formación de los futuros ciudadanos. Este panorama plantea, pues, nuevos retos a los sistemas educativos, a los procesos de enseñanza-aprendizaje, a las instituciones educativas, en fin, a la educación en general.

Para el profesor Bernardo García Quiroga (2017), el concepto de competencia es polisémico y complejo, el cual puede ser entendido y abordado desde dos visiones diferentes en educación: una, vista desde la eficacia y las demandas del mercado laboral, que incluye los niveles del Saber (datos, conceptos, conocimientos) y del Saber Hacer (habilidades, destrezas, métodos de actuación).

La otra, vista desde la formación integral de sujetos críticos, que incluye, además de los niveles de Saber y del Saber Hacer, los niveles Saber Ser (actitudes y valores que guían el comportamiento) y Saber Estar (capacidades relacionadas con la comunicación interpersonal y el trabajo cooperativo), en contextos socioculturales. En otras palabras, la competencia es la capacidad de un buen desempeño en contextos complejos y auténticos. Se basa en la integración y activación de conocimientos, habilidades, destrezas, actitudes y valores.

En este sentido, Pérez Gómez añade:

> La sociedad de la información y del conocimiento dirige a la educación demandas distintas de las tradicionales, claramente relacionadas con el desarrollo en todos los ciudadanos de la capacidad de aprender a lo largo de toda la vida. Dicho de otro modo, el problema no es ya la cantidad de información que reciben, sino la calidad de la misma: la capacidad para entenderla, procesarla, seleccionarla, organizarla y transformarla en conocimiento; así como la capacidad de aplicarla a las diferentes situaciones y contextos en virtud de los valores e intenciones de los propios proyectos personales y sociales. (2007, p. 7)

Otro autor que se refiere al concepto de competencia es Phillippe Perrenoud (1999), cuya percepción coincide con la de Pérez Gómez, pues la define como la facultad de poner en movimiento un conjunto de recursos cognitivos como son los conocimientos, capacidades, información, etc. para enfrentar con pertinencia y eficacia situaciones complejas de la vida cotidiana. Para Perrenoud, la escuela se concentra y da prioridad a los recursos más no a la movilización de dichos recursos en contexto.

En los Estándares Básicos de Competencias (2006, p. 49) se define competencia como "conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores". Es decir, la competencia implica conocer, ser y saber hacer.

Competencia Matemática.

Autores como D˙Amore, Diaz Godino y Fandiño (2008), Horacio Solar (2009), Rico y Lupiañez (2008), entre otros, retomados por García, Coronado y Giraldo (2015), han realizado importantes aportes teóricos en el campo de las competencias matemáticas.

D˙Amore, Diaz Godino y Fandiño (2008) postulan que en una competencia matemática están presentes tres aspectos del desarrollo humano: el cognitivo (conocimiento de la disciplina), el afectivo (disposición, voluntad, deseo de responder a una determinada solicitud) y la tendencia de acción (persistencia, continuidad, dedicación). Según García B., Coronado A. y Giraldo A. (2015), esta concepción conlleva a asumir el desarrollo de competencias matemáticas como un proceso de formación más que de instrucción. (p. 27).

Horacio Solar (2009) considera las competencias matemáticas como procesos que articulan el currículo a distintos niveles, para lo cual deben cumplir con los siguientes criterios:

- Vincular a una competencia una serie de procesos matemáticos específicos.
- Contribuir a organizar las actividades matemáticas en función de las competencias que se desarrollan y,
- Ser significativas para la actividad matemática escolar. Ello contribuye a generar sentido y calidad a la actividad matemática de aprendizaje. (García, et al. 2015, p. 28)

Para Solar (2009), una competencia matemática está estructurada por tres componentes, a saber: las tareas matemáticas, los procesos matemáticos y los niveles de complejidad (p. 68)

- **Las tareas matemáticas:** son contenidos o nociones del dominio matemático, diseñadas y propuestas por el profesor para generar actividad de aprendizaje en el estudiante y desarrollo de procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción de complejidad creciente, en la medida que avanza en su escolaridad.

- **Los procesos matemáticos**: Constituyen la base de cada competencia matemática. Algunos de ellos son: Representar, argumentar, demostrar, codificar, decodificar, traducir, modelizar, entre otros. Cada competencia tiene sus propios procesos matemáticos. En un enfoque por competencias, los procesos matemáticos son los organizadores del currículo y no los contenidos como tradicional y predominantemente se concibe.

- **Los niveles de complejidad**: El nivel de complejidad de la competencia matemática, depende de la complejidad de las tareas y de la complejidad de los procesos matemáticos vinculados a esta competencia. Se asumen los siguientes niveles de complejidad propuestos por PISA (2006): Reproducción, Conexión y Reflexión.

Las principales características de estos tres niveles de complejidad son:

1. **Nivel de Reproducción**: En este primer nivel el estudiante se enfrenta a situaciones familiares y cercanas a él, en las que se le exigen procedimientos rutinarios como aplicar algoritmos, realizar operaciones sencillas, aplicar propiedades. Básicamente, se centra en reproducir conocimiento ya practicado, aprendido.
2. **Nivel de Conexión:** Este es el segundo nivel, y aquí el estudiante debe usar diferentes formas de representación semiótica de un sistema a otro, es decir, realizar operaciones de tratamiento y conversión. Debe establecer relaciones matemáticas, proponer modelos de solución y argumentar los procesos y resultados.

3. **Nivel de Reflexión:** En el tercer y último nivel se presentan procesos de razonamiento, argumentación, matematización horizontal y vertical. La principal característica de este nivel es que exige creatividad para proponer estrategias de resolución de la tarea, además de soluciones novedosas.

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación se asumen los tres componentes y niveles de complejidad de una competencia matemática que proponen los autores.

Las matemáticas son una construcción humana, social y culturalmente compartida y útil, plantean García, et al. 2015, en donde el sujeto que aprende es el centro del proceso enseñanza-aprendizaje y debe tenerse en cuenta el contexto de su construcción. El desarrollo de competencias matemáticas, entonces, debe consistir en llevar al estudiante a apropiarse de la cultura matemática, es decir a relacionarse y a comunicarse con el lenguaje, la simbología y los conceptos propiamente matemáticos. Es este un proceso al que Bishop (2005) llama "Enculturación matemática" y el que define como "un proceso de interacción social desarrollado dentro de un marco de conocimientos determinado, pero con el objetivo de volver a crear y definir ese marco"

También en los Estándares Básicos de Competencias (2006) el ser matemáticamente competente está relacionado con ser capaz de realizar tareas matemáticas, además de comprender y argumentar por qué pueden ser utilizadas algunas nociones y procesos para resolverlas. En otras palabras, es utilizar el conocimiento matemático para resolver problemas, adaptarlo a situaciones nuevas, establecer relaciones o aprender nuevos conceptos matemáticos.

Concepción de Didáctica

La didáctica es considerada como ciencia de la educación, una disciplina teórica cuyo objeto de estudio es el saber y sus condiciones de enseñanza y aprendizaje, dando respuesta a preguntas como: ¿qué se enseña?, ¿cómo enseñarlo?, ¿qué se debe enseñar?, pero también ¿cómo aprenden los estudiantes?, ¿a través de qué formas y técnicas acceden al saber?

No obstante, y de acuerdo con lo que plantea el profesor José Darwin Lenis, en su artículo Didácticas colaborativas: “la didáctica es, además de un campo teórico, una acción reflexiva de las prácticas, que busca por este medio, mejorarlas y darles un mayor y más profundo significado para quienes la estudian o ponen en movilidad” (2017, p.37). Es por ello que, los maestros -que son los que ponen esta disciplina en movilidad- no pueden reducirla a un simple instrumento técnico que utilizan para cumplir con unas reglas metódicas a la hora de llevar a cabo su práctica educativa.

Es pertinente y necesario hacer uso de la didáctica para reflexionar acerca de porqué se enseña y para qué se enseña, sólo así el maestro podrá determinar la relevancia y pertinencia de los objetos de estudio que pretende enseñar y las estrategias más adecuadas a través de las cuales sus estudiantes podrán desarrollar un aprendizaje verdaderamente significativo. Tal como lo dice el profesor Zambrano (2007) “la didáctica, respecto de la relación con el saber, está siempre animada a crear dispositivos, a fijar una cierta reglamentación sobre los modos y técnicas para acceder a un saber”. (p. 93)

Didáctica de las Matemáticas.

Como bien se ha mencionado en el apartado anterior, la didáctica es una disciplina teórica de la enseñanza y el aprendizaje, pero se trata de una teoría general. Además de las teorías generales, existen unas teorías específicas o especiales, que comparten algunas características de la general pero además tiene las suyas propias. Como lo dice Godino "Los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza se refieren a conocimientos particulares y posiblemente la explicación y predicción de estos fenómenos depende de la especificidad de los conocimientos enseñados, además de factores psico-pedagógicos, sociales y culturales." (2003, p. 6).

Brousseau (1989, p. 3), citado por Godino (2003), define la Didáctica de la matemática, desde un enfoque sistémico, como "una ciencia que se interesa por la producción y comunicación de conocimientos matemáticos, en lo que esta producción y esta comunicación tienen de específicos de los mismos". Luego, los autores Rico, Sierra y Castro (2000, p. 352), también citados por Godino (2003), complementan esta concepción de Didáctica de la Matemática, ya que la describen como la disciplina que, además de producir y comunicar conocimiento matemático, también estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación.

Enfrentar el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en términos de didáctica, supone tener en cuenta el triángulo profesor, estudiante y saber, entre los cuales se dan relaciones recíprocas. Asumiendo una postura constructivista, se centra el interés en la relación estudiante-saber, dado que dicha teoría postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto. Pero además, dice Godino:

> …el punto de vista didáctico imprime otro sentido al estudio de las relaciones entre los dos subsistemas (alumno - saber). El problema principal de investigación es el estudio de las condiciones en las cuales se constituye el saber pero con el fin de su optimización, de su control y de su reproducción en situaciones escolares. Esto obliga a conceder una importancia particular al objeto de la interacción entre

> los dos subsistemas, que es precisamente la situación problema y la gestión por el profesor de esta interacción. (2003, p. 19)

Brousseau (1986) considera, además de la triada maestro-estudiante-saber matemático y de todo el contexto de la escuela y el mundo exterior, el MEDIO como un elemento que está formado por el subsistema sobre el cual actúa el estudiante (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Teoría de las Situaciones Didácticas

Para el desarrollo de este trabajo de investigación se abordará el enfoque de las situaciones didácticas de Guy Brousseau, ya que se concibe como una teoría sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje y que se fundamenta en una concepción constructivista. Concepción que Brousseau caracteriza de la siguiente manera:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1986)

Para Guy Brousseau (2007) una situación es un modelo de interacción entre un sujeto y cierto medio que determina un conocimiento dado, en donde el “medio” -que puede ser un texto, un video, un juego, un objeto, etc.- es considerado como un sistema autónomo, antagonista del sujeto. La situación didáctica es pues, un entorno diseñado y manipulado por el docente para lograr el aprendizaje del estudiante, esto es, la reconstrucción de conocimiento.

En el caso particular de este trabajo, el medio con el cual los estudiantes interactuarán serán juegos aleatorios. Se elige tomar estos juegos como medio porque se considera que permitirá a los estudiantes: primero, divertirse mientras aprenden. Segundo, darse cuenta por sí mismos -después de jugar varias partidas y de socializar sus resultados con otros equipos- que es imposible crear una estrategia para ganar el juego, pero que es posible determinar quién o quienes tienen más o menos posibilidades de llegar ganar. Tercero, aprender las diferentes representaciones semióticas de una probabilidad y llevar a cabo las actividades de tratamiento y conversión.

Brousseau (2007) propone que las relaciones de un alumno con el medio pueden ser clasificadas en cuatro categorías: Situaciones de Acción, de formulación, de validación y de institucionalización. Tipos de situaciones didácticas que se retomarán en el desarrollo del presente trabajo de investigación aplicada.

Situación de Acción.

En este tipo de situación se da un intercambio de informaciones no codificadas o sin lenguaje, se toman decisiones a cada paso que dan en el juego. En este medio que se propone, los estudiantes juegan en equipo, ya sea lanzando dados, girando una ruleta, avanzando con una ficha en un tablero hasta llegar a la meta y registrando en tablas los resultados obtenidos. Inicialmente los estudiantes elegirán al azar el número o el color con el que desean jugar. En la segunda partida, muy seguramente desearán cambiar su ficha por otra que avanza o sale más. Pero, a medida que avanzan en las partidas, se darán cuenta de que, aunque hay números, colores o nombres que tienen más posibilidades de ganar que otros, cualquiera puede ganar. “La sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a “aprenderse” un método de resolución de su problema.” (Brousseau, 2007, 21)

Situación de Formulación.

Tipo de situación en la que se dan intercambios de informaciones codificadas en un lenguaje, es decir, se transmiten mensajes. Es una situación en la que juega un papel fundamental la comunicación, tanto al interior del grupo como entre los diferentes equipos. En esto juegos en particular, una vez los equipos jueguen las partidas indicadas y observen los resultados en cada una de ellas, discutirán acerca del porqué de sus resultados, primero al interior de cada equipo-a partir de unas preguntas guía- y luego socializan con los otros equipos, argumentando siempre sus aportes y respuestas.

Situación de Validación.

En este tipo de situación los estudiantes realizan intercambios de juicios, sentencias que se refieren a un conjunto de enunciados que tienen un rol de teoría. Se organizan enunciados en demostraciones, construyen teorías y aprenden cómo convencer a los demás o cómo dejarse convencer. Aquí el estudiante no solo tiene que comunicar una información sino que además tiene que afirmar que lo que dice es verdadero y está sustentado en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración. Seguidamente, en esta situación, los estudiantes resuelven una serie de actividades que les permite enunciar por qué en estos juegos es imposible predecir quién será el ganador, por qué algunos números, colores o nombres tenían más probabilidad de ganar que otros y finalmente cómo calcular una probabilidad.

Situación de Institucionalización.

Para Brousseau (1988b, citado por Sadovsky, 2015) "Es la consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del estudiante y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico". En esta fase, los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente saca conclusiones a partir de lo producido por los estudiantes, recapitula, sistematiza, ordena, vincula lo que se produjo en las situaciones didácticas anteriores y lo formaliza, con el fin de poder establecer relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber matemático. Se configura a partir de procesos de reflexión que el docente hace sobre procesos generados por los estudiantes en torno a una búsqueda de conocimiento específico.

En este caso particular, a partir de los resultados obtenidos en los diferentes juegos y en las siguientes actividades que resuelvan los estudiantes, se realiza un conversatorio en el cual se identifique el objeto matemático trabajado, se realice un análisis de los conocimientos construidos y de las dificultades presentadas. Luego, se establece una relación con los saberes o aprendizajes planteados para esta área y para el pensamiento aleatorio, específicamente, en el plan de estudios institucional.

Una serie de situaciones didácticas, sea del tipo que sea, puede llegar a constituirse en una secuencia Didáctica.

Concepto de Secuencia Didáctica

Para hablar de secuencia didáctica se retoma la postura teórica de Sergio Tobón, quien define secuencia didáctica como “conjuntos articulados de actividades de aprendizaje y evaluación que, con la mediación de un docente, buscan el logro de determinadas metas educativas, considerando una serie de recursos” (Tobón, S, Pimienta, J. H. y García, J.A. 2010). Estos autores argumentan que la práctica de esta metodología permite mediar el aprendizaje de los estudiantes y mejorar sustancialmente los procesos de formación, en el marco del enfoque por competencias.

Plantean los autores, que una secuencia didáctica cuenta con los siguientes componentes:

- Situaciones didácticas: a las que se debe dirigir la secuencia.
- Actividades pertinentes.
- Evaluación formativa: orientada a enjuiciar sistemáticamente el proceso.

Con esta teoría de la secuencia didáctica y en relación con la teoría de las competencias matemáticas, surge un nuevo e importante reto para la educación y para los docentes en particular y es el de enfocar los procesos de formación de los estudiantes en el desarrollo de competencias y no en contenidos, como tradicionalmente se hace.

En este trabajo de investigación se propondrá una secuencia didáctica con actividades que respondan a los diferentes tipos de situación didáctica que plantea Brousseau, y que lleven gradualmente al estudiante a la construcción de su propio conocimiento, al desarrollo de competencias en el pensamiento aleatorio, más específicamente en el campo de la probabilidad.

Análisis Epistemológico de la Probabilidad

En nuestro contexto, cuando queremos explicar qué tan posible o no es que se produzca algún acontecimiento importante para nosotros y, en consecuencia, poder tomar alguna decisión, probabilidad y posibilidad son palabras que utilizamos cotidianamente: “es probable que me gane la rifa”, “es muy posible que vaya a la fiesta”, es probable que llueva esta noche”, entre otras. Desde los Estándares Básicos de Calidad se define que el pensamiento probabilístico o estocástico “ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar” (MEN, 2006).

La probabilidad es una rama de las matemáticas que estudia los fenómenos de naturaleza incierta, azarosa o aleatoria y surge de la necesidad de cuantificar la posibilidad o el riesgo de que un evento o suceso se produzca o no. Para Rubén García Pedraza (2014) la naturaleza estocástica de la estadística y la probabilidad obedece a que son métodos de investigación aplicada a fenómenos que suceden en ausencia de determinación plausible o certeza, habiendo una posible incidencia del azar en la forma de distribuirse.

Son muchas las investigaciones que se han realizado con respecto al desarrollo del razonamiento probabilístico en los niños, pero en este caso retomaré dos teorías que han sido relevantes en el campo de la probabilidad. Para Piaget e Inhelder (1951, citados por Batanero, 2013), el razonamiento matemático, al igual que el pensamiento, va evolucionando poco a poco de acuerdo con unas etapas de desarrollo. Para estos investigadores, las ideas de azar y probabilidad no pueden ser adquiridas por el niño sino hasta que comprenda la relación causa-efecto y desarrolle el razonamiento combinatorio, esto es en la etapa de las operaciones formales, es decir alrededor de los 11 a 15 años.

Fishbein (1975), también citado por Batanero (2013), rechaza la teoría de Piaget y postula que el niño tiene una intuición parcial del azar, es decir, que distingue entre un fenómeno aleatorio y uno determinista, intuición primaria que alcanza antes de los 7 años y que adquiere directamente con la experiencia. Esta intuición se va desarrollando y mejorando poco a poco con ayuda de la instrucción, hasta alcanzar la intuición secundaria, como consecuencia de la educación en la escuela.

Según Batanero (2013), aunque la enseñanza de la probabilidad siempre ha estado presente en los currículos de enseñanza secundaria, en las últimas dos décadas se recomienda adelantar la enseñanza a la educación primaria de forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica más directa desde su infancia. El tratamiento escolar de este objeto matemático se ha consolidado como de relevancia absoluta y de urgencia en los currículos de las instituciones de educación básica, mientras que a la par las investigaciones educativas en este campo avanzan vertiginosamente y autores representativos como Batanero y Godino (1994) avalan la importancia de la formación probabilística y estadística y la refieren como imprescindible porque:

- La estadística es útil para la vida posterior a la escuela, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema.
- Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva, apoyada en los datos frente a criterios subjetivos.
- Ayuda a comprender los restantes temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos. (SECA, 2007)

Fenomenología de la probabilidad.

En los lineamientos curriculares (1998) y luego en los estándares básicos de competencia (2006) se hace énfasis en el desarrollo del pensamiento aleatorio por su incidencia en la ciencia, en la cultura y en la vida cotidiana:

> La probabilidad es un objeto matemático propio del pensamiento aleatorio. Este pensamiento se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de las probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos. (MEN, 2006)

Por ejemplo, a través de las leyes de la probabilidad, un ecólogo puede determinar si se puede introducir o no una especie determinada de árbol en una isla virgen. Otro ejemplo complejo puede ser el de la meteorología, cuando se produce un huracán y se requiere estimar cuáles lugares serán más afectados, al igual que la magnitud de los eventuales destrozos. Y en la vida cotidiana, tiene aplicabilidad en los juegos de azar en los que se apuesta, y que tienen que ver con lanzamiento de dados, cartas, ruleta, entre otros.

Sistemas de representación de la probabilidad.

En matemática se habla de "objetos matemáticos" y no de "conceptos". Los objetos matemáticos no son objetos reales, son abstractos, por tanto se debe recurrir necesariamente a signos concretos para representarlos. Existen distintos sistemas de representación y notaciones simbólicas para los objetos matemáticos, que son utilizados para expresar relaciones y operaciones.

Tal como lo define D´Amore (2005), retomando a Duval, semiótica es la representación del objeto matemático realizada por medio de signos; y noética, la comprensión o adquisición conceptual del objeto matemático. Son los diferentes registros semióticos los que determinan la comprensión y adquisición de los objetos matemáticos. Por tanto, en palabras de Duval "No existe noética sin semiótica". Es importante tener en cuenta que se debe distinguir el objeto matemático (el número, por ejemplo) de sus representaciones (escritura decimal o fraccionaria, gráficos, símbolos, etc.). Cuando se aprende se suele confundir el objeto matemático con sus representaciones semióticas. Por ejemplo, generalmente decimos "Este <10> es el número diez", pero esa es realmente una representación del número, no el número como tal.

En el caso particular de la probabilidad, objeto matemático del que se ocupa esta investigación, se hace mucho más evidente y necesaria la estrecha relación entre semiósis y noesis, pues, a diferencia de los conceptos geométricos o numéricos, lo aleatorio trata ideas bastante abstractas, el niño no tiene una experiencia concreta directa y no puede manipular o concretizar los diferentes fenómenos o eventos para producir un resultado específico, tampoco devolver los objetos a su estado inicial al deshacer la operación (principio de reversibilidad).

En la siguiente tabla se presentan las diferentes representaciones semióticas que se pueden plantear para la comprensión o adquisición de la probabilidad:

Tabla 1

Representaciones semióticas de la probabilidad.

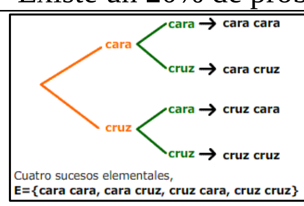
<table>
<tr><th>Registro Semiótico</th><th colspan="2">Representaciones Semióticas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Lenguaje Común</td><td colspan="2">-Es poco posible que salga la bola azul.
-Es muy posible que salga una bola amarilla.
-Es imposible que salga una bola negra.</td></tr>
<tr><td colspan="2">-La probalilidad de que salga una bola azul es uno de cinco.
-Existen 0.2 probabilidades de que salga la bola azul.
-Existe un 20% de probabilidad de que salga la bola azul.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Esquemas Gráficos</td><td colspan="2">


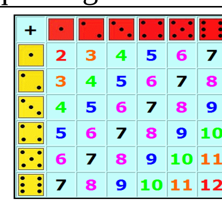
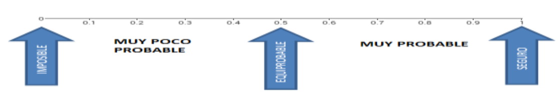
Diagrama de árbol


Tabla de doble entrada</td></tr>
<tr><td colspan="2">


Escala de probabilidad</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Lenguaje Aritmético</td><td>Escritura fraccionaria</td><td>1/5</td></tr>
<tr><td>Escritura decimal</td><td>0.2</td></tr>
<tr><td>Escritura porcentual</td><td>20%</td></tr>
</table>

Para Duval (1998), un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite dos actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

- Tratamiento**:** Que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formulada.
- Conversión: Que es la transformación de una representación en un registro semiótico dado en otra representación de otro registro diferente al inicial, en el que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Para el caso específico de la probabilidad, se pueden dar los dos tipos de situaciones, tanto las de tratamiento como las de conversión. Por ejemplo:

- Tratamiento: 1/5 = 0.2 = 20% (Distintas representaciones en un mismo registro semiótico: el lenguaje aritmético)
- Conversión: 1/5 $\longrightarrow$ Es Poco probable que salga la bola azul (De registro aritmético a registro de lenguaje común).

Niveles de razonamiento probabilístico

Según Benítez y Sánchez (1997, citados por Rivas, 2009), el pensamiento probabilístico de los estudiantes se clasifica en diferentes niveles que van desde la impredicción hasta el pensamiento formal. A continuación se explica cada uno de los niveles de razonamiento probabilístico a los que hace referencia el autor:

1. **Impredicción:** En este nivel se encuentran los sujetos que en situaciones aleatorias consideran imposible predecir resultados. Por ejemplo, cuando se le cuestiona a un individuo si al lanzar simultáneamente dos monedas ¿Qué es más probable, obtener resultados iguales - dos águilas o dos soles – o diferentes – un águila y un sol? Y responde que es imposible saberlo porque es al azar.

2. **Determinístico:** a esta categoría corresponden las personas que atribuyen a causas poderosas los resultados de una situación azarosa. Estas causas pueden ser de diferentes tipos: físicas, empíricas o míticas-mágicas. Por ejemplo, al preguntarle a una persona la causa de que en una rifa ganó el primer premio quien tenía el número 1234. Si contesta que por trampa se le considera determinista físico; si dice que nunca salen premiados los números con cifras consecutivas es determinista empírico; si su respuesta es que se debe a la suerte o al destino es determinista mítico-mágico.
3. **Mecánico:** En este grupo se encuentran los individuos que utilizan algoritmos de manera incorrecta como resultado de un aprendizaje memorístico, carente de significado. Por ejemplo, al preguntar a un alumno cuál es la posibilidad de que al lanzar una moneda y un dado al mismo tiempo se obtenga un sol y un tres, y un alumno contesta que $\frac{1}{8}$ porque la probabilidad de obtener sol es de $\frac{1}{2}$ y de que caiga un tres en el dado es de $\frac{1}{6}$, entonces:

   $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$

   En este caso se desconoce la regla del producto y, además, la suma de fracciones es incorrecta, por lo tanto está contestando mecánicamente.
4. **Pre-rigor:** En este nivel se encuentran los estudiantes que han desarrollado parcialmente la capacidad para encontrar todos los resultados, ya que aún tienen dificultades en las técnicas de conteo. Por ejemplo, cuando una persona considera que al lanzar los dados y sumar los puntos resultantes, el evento de obtener un cuatro es equiprobable al de obtener un cinco porque las combinaciones que dan estos resultados son las siguientes:

   Para cuatro: 1 + 3, 2 + 2

   Para cinco: 1 + 4, 2 + 3

En esta caso, aunque el alumno identifica algunas combinaciones, no logra identificarlas por completo, motivo por el cual se le clasificaría en este nivel de razonamiento.

5. **Rigor:** En este nivel se agrupan las personas que utilizan eficientemente las diferentes representaciones de un problema, y que además son capaces de argumentar correctamente sus procedimientos de solución. Retomando el ejemplo anterior, se consideraría en el nivel de rigor al individuo que conteste correctamente al identificar todas las combinaciones posibles:

   Para cuatro: 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1

   Para cinco: 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1

   Y determine que la probabilidad de obtener un cuatro es $\frac{3}{36}$ o $\frac{1}{12}$ y para un cinco es de $\frac{4}{36}$ o $\frac{1}{9}$. Además sería capaz de representar el espacio muestral con un diagrama de árbol o una tabla de dos entradas e identificar el número de casos favorables en el experimento aleatorio.

La Probabilidad en los Referentes Nacionales

Estándares Básicos de Competencia (EBC).

Teniendo en cuenta que este trabajo de investigación será aplicado en estudiantes de grado 5º de básica primaria, se presentan a continuación los Estándares planteados para el Pensamiento Aleatorio y más específicamente para el aprendizaje de la probabilidad.

Se tiene muy en cuenta la coherencia vertical y horizontal que se propone desde este referente nacional. La coherencia vertical se muestra aquí a través de los procesos que deben desarrollar los estudiantes de grado 4º a 5º, pero también se presentan los procesos que deben haber desarrollado en el conjunto de grados anterior (1º a 3º) y los que deben desarrollar en el conjunto de grados siguiente (6º a 7º).

La coherencia horizontal cobra en este trabajo una mayor importancia, ya que, aunque no es explícito en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos que en grados 4º a 5º se trabaje la representación aritmética de la probabilidad, se generará una estrecha articulación del pensamiento aleatorio con el numérico, pues en este último sí es explícito que los estudiantes de este conjunto de grados interpreten las fracciones como razones y que utilicen la notación decimal para expresar fracciones, además de relacionar estas dos notaciones con la de porcentajes. Lo que haría posible llevar al estudiante de grado 5º hasta las diferentes representaciones semióticas de la probabilidad en el registro aritmético, para lograr un verdadero aprendizaje de este objeto matemático.

Coherencia Vertical

De 1º a 3º -Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos. -Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.
De 4º a 5º -Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos. -Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.
De 6º a 7º -Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento. -Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.

Pensamiento Aleatorio **De 4º a 5º**	**Pensamiento Numérico** **De 4º a 5º**
-Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos. -Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o **experimentos**.	-Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, **razones** y proporciones. -Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.

Coherencia Horizontal

Gráfico 3. *Coherencia horizontal y vertical en los Estándares Básicos de Competencia del grado 5º referentes a la probabilidad.*

Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

El Ministerio de Educación Nacional (MEN), en aras del mejoramiento de la calidad educativa en nuestro país, viene desarrollando estrategias para fortalecer las prácticas de aula de los docentes y por ende los aprendizajes de los estudiantes.

Una de estas estrategias es la creación de los Derechos Básicos de Aprendizaje -DBA- considerados como una herramienta, cuya estructura guarda coherencia con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de calidad (EBC). El principal propósito de esta herramienta es permitir a la comunidad educativa identificar los saberes básicos que deben aprender los estudiantes en cada grado de escolaridad, desde transición hasta once.

En el 2015 se publica la primera versión de los DBA de primero a once en las áreas de matemática y lenguaje. Esta primera versión fue sometida a análisis y reflexión en mesas de discusión pública e interna en todo el país. Como resultado de este análisis, en el 2016 se presenta una segunda versión de los DBA en las áreas de matemática y lenguaje, y la primera versión en las áreas de ciencias naturales, sociales y transición.

Desde los Derechos Básicos de Aprendizaje se propone trabajar el tema de la probabilidad en grado 5º con el DBA número 12, a través del cual se plantea:

12. Predice la posibilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los elementos del evento definido.

Evidencias de aprendizaje

- Reconoce situaciones aleatorias en contextos cotidianos.
- Enumera todos los posibles resultados de un experimento aleatorio simple.
- Identifica y enumera los resultados favorables de ocurrencia de un evento simple.
- Anticipa la ocurrencia de un evento simple.

Ejemplo

En un día de la recreación se realizan diferentes actividades con juegos de azar. Javier y Arturo eligen el juego de la ruleta. Las reglas acordadas son:

- Cada uno selecciona una ruleta (Ruleta 1 o Ruleta 2).
- Al mismo tiempo giran una vez cada ruleta.
- Javier gana si saca un número par.
- Arturo gana si saca un número impar.
- Si Javier saca impar y Arturo saca par, vuelven a jugar.

Reconoce que el juego de la ruleta corresponde a una situación aleatoria, identifica los eventos, asigna la probabilidad de ocurrencia y da argumentos para decidir si el juego es o no justo estadísticamente.

Este documento se constituye en un apoyo, en un referente para el docente, pues le permite tener claridad con respecto a las habilidades y competencias que debe desarrollar en el estudiante y así mismo el tipo de actividades y estrategias didácticas que debe plantearse en el aula.

Capítulo III

Diseño Metodológico

Contexto de la investigación

La investigación se lleva a cabo en la Institución Educativa San Antonio, institución de carácter rural, ubicada en zona rural alta del municipio de Jamundí. Cuenta con cuatro sedes, la sede principal en la cabecera del corregimiento con grados de Transición hasta Undécimo. Las otras tres sedes son multigrados, atendiendo estudiantes de Transición a quinto, ubicadas en diferentes veredas del corregimiento. La población es mayoritariamente indígena, en menor porcentaje mestizos y afrodescendientes. La mayoría de las familias se encuentran en estratos socioeconómicos 1 y 2. Por factores de tipo laboral, principalmente, se trata de una población flotante, estudiantes que van y vienen en cualquier época del año.

Sujetos de investigación

La investigación se llevó a cabo con los estudiantes del grado quinto de la I. E. San Antonio, conformado por 22 estudiantes, de los cuales 7 son hombres (32%) y 15 mujeres (68%), con edades que oscilan entre los 10 y 13 años de edad, pero en su mayoría de 11.

A continuación se presenta una tabla con los estudiantes participantes:

Tabla 2.

Características y codificación de la población participante en la investigación.

CÓDIGO ESTUDIANTE	GÉNERO	EDAD	CÓDIGO ESTUDIANTE	GÉNERO	EDAD
E1	H	10	E12	M	11
E2	H	10	E13	M	10
E3	H	11	E14	M	10
E4	H	11	E15	M	11
E5	H	11	E16	M	10
E6	H	12	E17	M	11
E7	H	11	E18	M	13
E8	M	12	E19	M	11
E9	M	11	E20	M	10
E10	M	11	E21	M	11
E11	M	10	E22	M	12

Tipo de investigación

El presente trabajo de investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, es decir, los procedimientos y técnicas empleados para conocer el impacto de una secuencia didáctica fundamentada en el juego para fortalecer el aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de grado quinto, se encuadran dentro del análisis interpretativo. Para ello se implementaron tres instrumentos, a saber: un pre-test, una secuencia didáctica y un pos-test, cuyos análisis e interpretación generaron unos resultados que describen aquello que originalmente se propuso en el diseño.

Por otra parte, el diseño será no experimental porque no habrá manipulación de variables, ya que no se realizan acciones tendientes a asegurar el control interno del estudio. Su esencia es la observación de fenómenos en su contexto natural, que luego son analizados.

Los tipos de estudio a utilizar serán: descriptivo, por cuanto se busca exponer las características de las respuestas obtenidas en los test antes y después de la implementación de la secuencia didáctica; y correlacional porque se van a comparar los niveles de razonamiento probabilístico y las características de las respuestas de los estudiantes antes y después de la aplicación de la SD.

Fases de la investigación

A continuación, en la siguiente tabla, se muestran cada una de las etapas que conforman este trabajo de investigación y las correspondientes acciones relevantes. Más adelante se explicarán con detalle estas etapas:

Tabla 3

Fases de la investigación desarrollada.

FASE	ACCIONES
Diseño del pre-test	-Se tomaron preguntas de pruebas supérate, Aprendamos, Saber y de otras investigaciones que se han realizado en este tema. -Elaboración del cuestionario.
Aplicación del pre-test	-Aplicación del pre-test al grupo experimental para identificar las dificultades de los estudiantes. -Análisis de resultados arrojados en el pre-test.
Diseño de Secuencia Didáctica	-Diseño de Secuencia Didáctica para superar las deficiencias encontradas en el diagnóstico que arrojó el pre-test.
Implementación de la Secuencia Didáctica	-Desarrollo de las guías de trabajo de la Secuencia Didáctica con el grupo experimental. -Observaciones de los desempeños de los estudiantes durante el desarrollo de las guías de trabajo.
Diseño del pos-test	-Elaboración del cuestionario para medir el impacto de la Secuencia Didáctica.
Aplicación del pos-test	-Aplicación del cuestionario al grupo experimental.
Análisis de resultados	Cualitativo: -Descripción y categorización de las soluciones y respuestas que dan los estudiantes a situaciones de tipo aleatorio.

Instrumentos

Pre-test.

Las características de este instrumento (Anexo 1) que se aplicó al grupo experimental, con el fin de realizar un diagnóstico que diera cuenta de las dificultades que presentaban los estudiantes en cuanto al razonamiento probabilístico, son las siguientes:

- Consta de 11 preguntas, 8 de las cuales son de opción múltiple y con un espacio para justificar cada una de las respuestas.
- Se incluyó la opción "No sé" en 7 de las preguntas de opción múltiple para que los estudiantes no intentaran adivinar algunas de las respuestas.
- Las preguntas 6, 10 y 11 no tienen opciones de respuestas.
- La pregunta 6 está diseñada para identificar algunas concepciones de los estudiantes, en especial las que se relacionan con situaciones que requieren la toma de decisiones.
- Las preguntas 9 y 10 se plantearon con el propósito de obtener información que pueden tener los estudiantes con respecto al tema de la suerte, ya que generalmente se suele asociar este concepto a las situaciones de azar o aleatorias.
- En la pregunta 11 se pretende que los estudiantes escriban el significado que tienen de la palabra probabilidad.

Este instrumento se diseñó teniendo en cuenta lo que se propone trabajar en el pensamiento aleatorio desde los referentes de calidad: Estándares Básicos de Competencia (EBC) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA).

Secuencia Didáctica.

La S D (Anexo 2) que se diseñó a partir de las dificultades que emergieron en los estudiantes al aplicar el pre-test, está conformada por 4 guías de aprendizaje, cada una de las cuales se desarrolló en una sesión de clases de 2 horas. En dos sesiones de clase por semana.

Cada guía está estructurada con los tres tipos de actividades: apertura, desarrollo y cierre, que plantea Díaz Barriga (2013) en el texto GUÍA PARA LA ELABORACIÓN DE UNA SECUENCIA DIDACTICA. Al interior de estos tres tipos de actividades, se plantearon las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización de las que habla Brousseau en la teoría de las Situaciones Didácticas. Cabe mencionar que en cada una de las guías de aprendizaje se plantea en la situación de acción un juego fundamentado en el azar y la aleatoriedad.

Pos-test.

También se elaboró un cuestionario (Anexo 3) para la evaluación final (pos-test) para determinar, en términos cualitativos, el avance de los estudiantes una vez concluida la aplicación de la SD. Las características del cuestionario son las siguientes:

- Tiene 8 preguntas, 6 de las cuales son de opción múltiple.
- Se incluyó la opción "No sé" en las cinco primeras preguntas.
- Algunas preguntas permiten indagar si persisten ideas erróneas en torno a la probabilidad.
- En las preguntas 6 y 7, que son las mismas del pre-test, se explora si los estudiantes siguen atribuyendo a la suerte los resultados de las situaciones aleatorias o de azar.

Capítulo IV

Análisis de Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos a través de la implementación de cada uno de los tres instrumentos, definidos y descritos anteriormente, para la recolección de la información necesaria para la presente investigación.

En primer lugar se muestran los resultados del pre-test, posteriormente se analizan algunas de las guías de aprendizaje que componen la secuencia didáctica y luego se exponen los alcances obtenidos en el pos-test. En todos los casos se incluyen evidencias de las respuestas de los estudiantes en las diferentes actividades planteadas.

Finalmente se realiza un análisis comparativo de los resultados del pre-test y los del pos-test para tener una idea más clara del impacto que generó la implementación de la SD.

Análisis del pre-test

Presentación de la actividad.

El cuestionario (Anexo 1) que se diseñó permite explorar las nociones que tienen los estudiantes sobre el significado de la probabilidad, el cálculo de la probabilidad simpe y compuesta, así como también la equiprobabilidad y la no equiprobabilidad, el tipo de representaciones que utilizan, y por supuesto, las creencias involucradas.

Cada una de las preguntas del cuestionario tiene un propósito particular, por lo que se pueden agrupar de la siguiente manera:

- Razonamiento y argumentación de la probabilidad: Preguntas 1 y 3
- Cálculo de la probabilidad simple y compuesta: Preguntas 4, 5 y 6
- Representación y comunicación de la probabilidad: Preguntas 2, 7 y 8
- Significado y sistema de creencias sobre la probabilidad: 9, 10 y 11

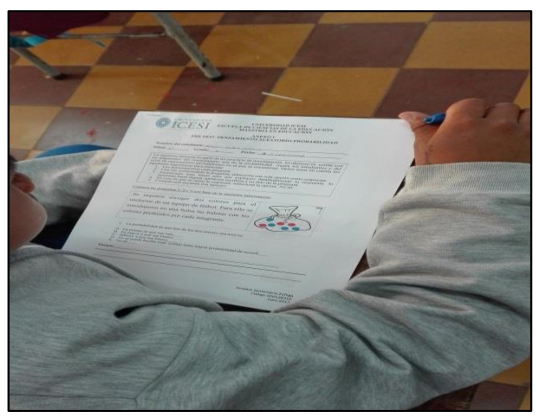
Cabe aclarar que la clasificación anterior no es limitativa, puesto que algunas preguntas involucran dos o más propósitos.

Condiciones de la aplicación.

La prueba consiste un responder un cuestionario de 11 preguntas, 8 de las cuales eran de opción múltiple, aunque hay que aclarar que en la mayoría de las preguntas se dejó un espacio con líneas para que los estudiantes justificaran sus respuestas, lo cual se explicó en el momento de dar las instrucciones para responder la prueba.

La actividad se desarrolló de manera individual, el día 18 de octubre de 2017, en un tiempo de una hora (60 min.) a todo el grupo de estudiantes del grado quinto, conformado por 7 hombres (31,81%) y 15 mujeres (68,18%) con edades entre los 10 y 13 años, pero en su mayoría de 11.

Como evidencia se presentan algunos registros fotográficos del momento de la aplicación de dicha prueba:



Estudiantes de la I E San Antonio presentando el Pre-test

Análisis cualitativo.

Para llevar a cabo el respectivo análisis se realiza una categorización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes a cada una de las preguntas en el pre-test, para lo cual se toman como referencia los niveles de razonamiento probabilístico sugeridos por Benítez y Sánchez, (1997). Con el propósito de dar una mayor claridad a dicho análisis, describir las justificaciones y realizar comparación entre los resultados obtenidos en el pre-test y el pos-test, se presentarán algunas tablas con datos y porcentajes de respuestas, pero el análisis es principalmente de tipo cualitativo.

En la siguiente gráfica se muestra la clasificación de las respuestas formuladas por los estudiantes, según los resultados obtenidos en la aplicación del pre-test:

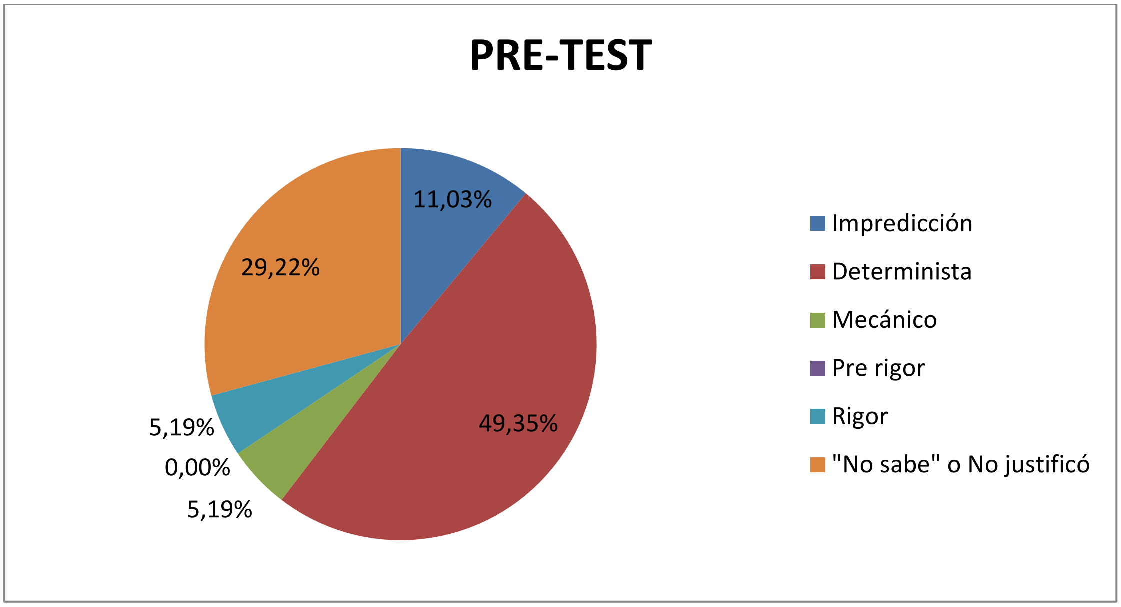


Gráfico 4. *Clasificación de las respuestas dadas por los estudiantes en la escala del pensamiento probabilístico.*

En la gráfica se puede apreciar que en este grupo de estudiantes predomina el nivel determinista con un 49,35%. Un porcentaje considerable de estudiantes (29,22%) eligieron la opción “No sé” o no justificaron algunas de las respuestas. Seguidamente, un 11,03% se ubica en el nivel de impredicción, y al final los niveles de rigor con un 5,19% y pre-rigor con un 0%.

Cabe aclarar que, aunque existe tendencia hacia el nivel determinista, las justificaciones de un mismo estudiante se ubican en diferentes niveles del pensamiento probabilístico.

Teniendo en cuenta que la información presentada en la gráfica anterior muestra los resultados globales del pensamiento probabilístico en su conjunto, se presenta a continuación una tabla con la clasificación de las justificaciones en las primeras siete preguntas del cuestionario:

Tabla 4.

Clasificación de las argumentaciones dadas por los estudiantes en el pre-test, según los niveles de razonamiento probabilístico.

No. de pregunta	**Niveles de razonamiento probabilístico-Pre-test**					
	Impredicción	**Determinista**	**Mecánico**	**Pre-rigor**	**Rigor**	**No justificó o "No sabe"**
1	13,63%	63,63%				22,72%
2		22,72%			22,72%	54,54%
3	9,09%	77,27%				13,63%
4	31,81%	36,36%	9,09%			22,72%
5	4,54%	36,36%	18,18%			40,90%
6		77,27%				22,72%
7	18,18%	31,81%	9,09%		13,63%	27,27%
TOTAL	**11,03%**	**49,35%**	**5,19%**	**0%**	**5,19%**	**29,22%**

Para una mayor claridad en el análisis, se prestan en la siguiente tabla un condensado de respuestas, por opción, de las primeras 9 preguntas del cuestionario. La respuesta correcta es la señalada con el sombreado en la casilla correspondiente:

Tabla 5.

Condensado de respuestas del pre-test por opción.

No. pregunta	Opciones de respuesta a cada pregunta					
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**NR**
1	18,18%	31,81%	18,18%	13,63%	18,18%	
2	27,27%	18,18%		13,63%	40,90%	
3	22,72%	4,54%	54,54%	31,81%	4,54%	
4	13,63%	31,81%	22,72%	27,27%	4,54%	
5	31,81%	27,27%	31,81%	22,72%	22,72%	
7	45,45%		4,54%	22,72%	27,27%	
8	9,09%	9,09%	31,81%	50%		
9	36,36%	18,18%	45,45%			
6	**Verde** 50%	**Azul** 9,09%	**Amarillo** 4,54%	**Rojo** 31,81%		4,54%

Según el análisis realizado, las dos preguntas con mayor porcentaje de aciertos fueron la número 3 con un 54,54% y la número 6 con 50%, no obstante, la clasificación de las justificaciones arroja que en cada una de estas dos preguntas se alcanza un 77,27% en el nivel de razonamiento determinista. Lo que indica que el desempeño de los estudiantes en cuanto a probabilidad es deficiente y se justifica la implementación de esta propuesta didáctica para fortalecer el pensamiento probabilístico de los estudiantes de grado quinto de esta institución.

A continuación se presentan algunas evidencias de las respuestas de los estudiantes en cada uno de los niveles:

- **Nivel de Impredicción:**

E19 responde:

4. Si juegas con un amigo a lanzar 4 monedas simultáneamente ¿Cuál de las siguientes combinaciones de CARA (C) y SELLO (S) esperas que ocurra con mayor probabilidad?

A. 3C - 1S ____
B. 2C - 2 S ____
X. Los dos eventos son igualmente probables ____
D. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
E. No sé ____

Porque: no se sabe que va a caer

En esta pregunta un 22,72% de estudiantes marcó esta misma opción de respuesta, sin embargo, de las justificaciones un 31,81% corresponden al nivel de impredicción. Esta justificación que da el estudiante es característica de las personas que se encuentran en este nivel, en el cual atribuyen a este experimento la imposibilidad de predecir un resultado.

E5 responde:

3. La probabilidad de extraer una balota blanca es:

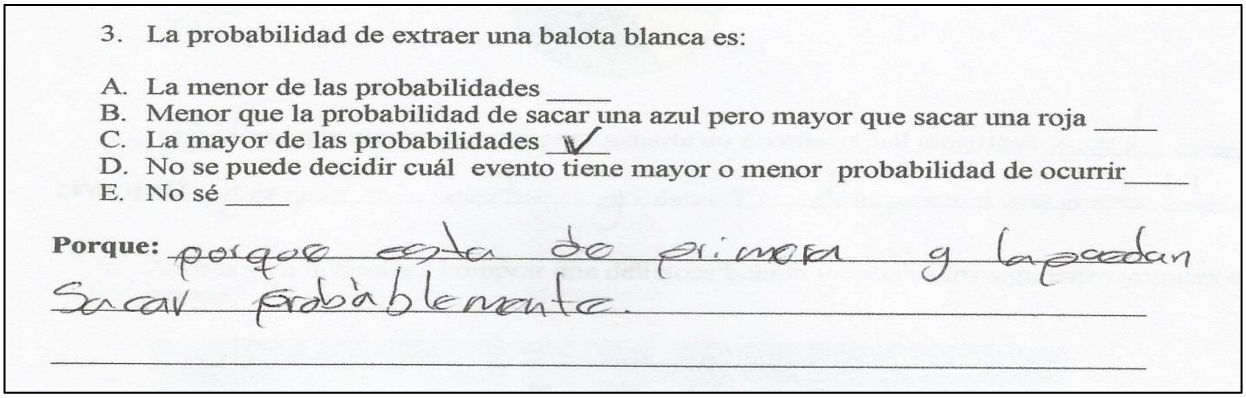
A. La menor de las probabilidades ____
B. Menor que la probabilidad de sacar una azul pero mayor que sacar una roja ____
C. La mayor de las probabilidades ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir X
E. No sé ____

Porque: esta en una bolsa y uno escoge a lasar sin saber uno que escogeo

En esta pregunta, un 9,09% de las justificaciones se encuentran en el nivel de impredicción. Se puede observar que el estudiante, aunque reconoce que es una situación de azar, no logra calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de un evento.

- **Nivel Determinístico:**

E14 responde la pregunta No. 3 así:


3. La probabilidad de extraer una balota blanca es:

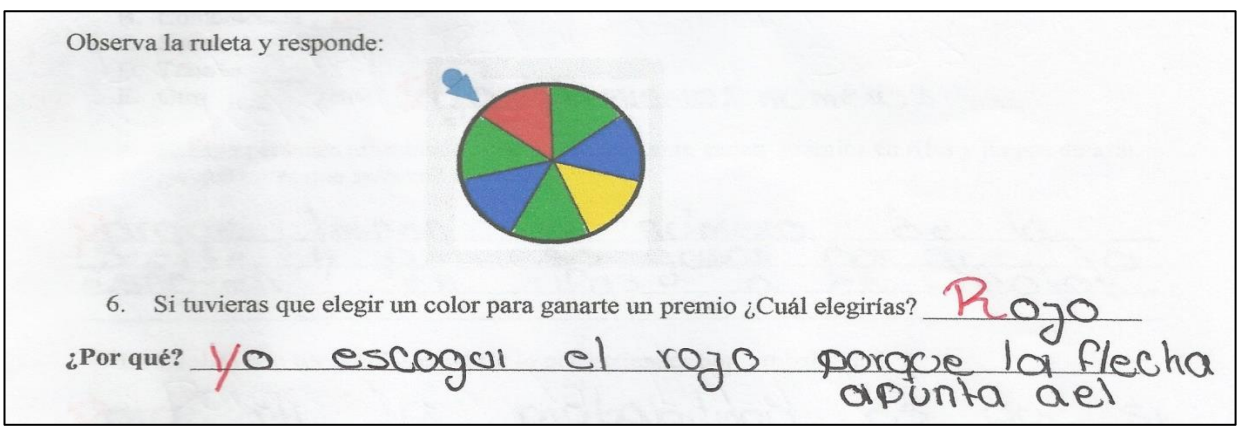
A. La menor de las probabilidades ____
B. Menor que la probabilidad de sacar una azul pero mayor que sacar una roja ____
C. La mayor de las probabilidades ✓
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque: porque esta de primera y la pueden Sacar probàblemente.

En la misma pregunta del ejemplo anterior, un 77,27% de las justificaciones se encuentran en el nivel determinista y un poco más de la mitad de los estudiantes (54,54%) marcó la opción acertada. La justificación que da este estudiante es del tipo determinista físico, ya que atribuye la probabilidad a la posición de las balotas en la bolsa.

Los datos anteriores confirman que, el que los estudiantes se encuentren fuertes en el componente aleatorio, según los resultados de las pruebas SABER, no asegura que ya han alcanzado un nivel avanzado en su pensamiento probabilístico. Al parecer los estudiantes responden algunas preguntas al azar o basados en concepciones erróneas.

Otro ejemplo de argumentación del tipo determinista físico es el que da E1:


Observa la ruleta y responde:

6. Si tuvieras que elegir un color para ganarte un premio ¿Cuál elegirías? Rojo

¿Por qué? Yo escogui el rojo porque la flecha apunta ael

Claramente se observa cómo se atribuye la probabilidad de ganar a la posición en la que se encuentra la ruleta y no a la relación casos favorables/casos posibles.

Por su parte, E13 y E2 responden las preguntas 9 y 10, respectivamente, de la siguiente forma:

9. Si una persona gana el baloto y meses después lo vuelve a ganar es por:
A. Bendición de Dios _✓_
B. Coincidencia ____
C. Suerte ____
D. Trampa ____
E. Otro ____ ¿cuál? Por que Dios le mando la dendición

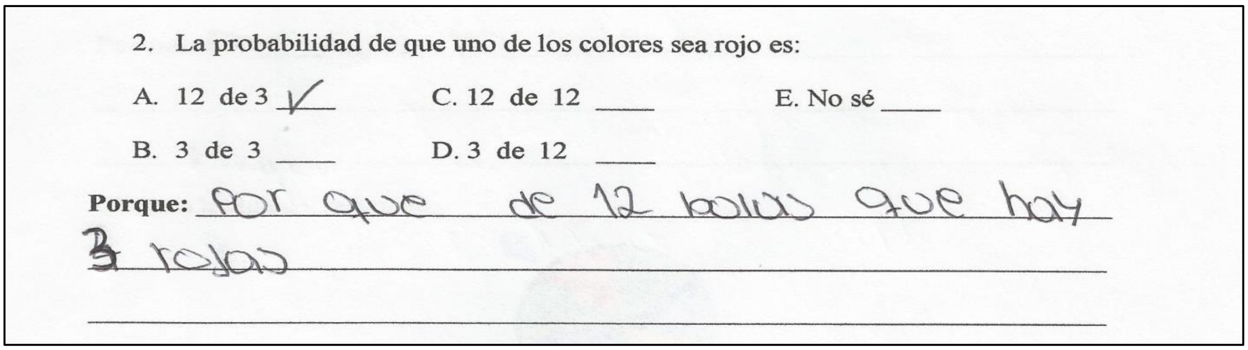
10. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar ¿A qué crees que se debe?
se debe a la suerte de ganar un premio

Estas respuestas corresponden a un nivel determinista del tipo mítico-mágico, ya que se atribuye a la suerte y a fuerzas superiores (Dios) el resultado de sorteos y juegos de azar. Se puede observar cómo el sistema de creencias ejerce una fuerte influencia en la resolución de problemas relacionados con la probabilidad. Más aún cuando se trata de una comunidad en la que el aspecto espiritual es el eje fundamental y se profesan diversas creencias (religiones).

Es importante mencionar que en las preguntas No. 9 y 10 un 81,81% y un 72,72%, respectivamente, de los argumentos dados por los estudiantes corresponden al nivel determinista. Con respecto a la respuesta correcta a la pregunta 9 es la opción C, pues si una persona gana el baloto y un tiempo después lo vuelve a ganar es por simple coincidencia, pues todos los números del sorteo tienen la misma probabilidad de salir, además se trata de dos eventos completamente independientes.

- **Nivel Mecánico**

Otro nivel, en el que se ubicó un reducido porcentaje (5,19%) de argumentaciones pero que es igualmente importante identificar, es el nivel de razonamiento mecánico. En este nivel se encontraron respuestas como las de los estudiantes E9 y E15, que aunque identifican el espacio muestral y los casos favorables, al momento de calcular y expresar la probabilidad aplican erróneamente la regla de Laplace. Estas son las evidencias:

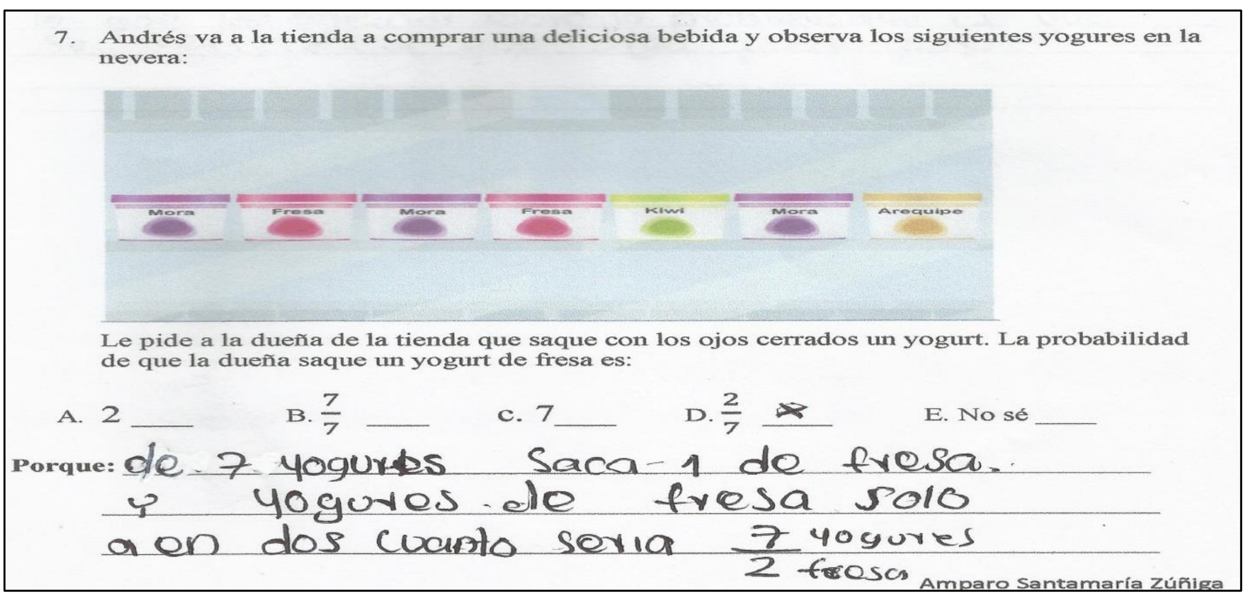

2. La probabilidad de que uno de los colores sea rojo es:

A. 12 de 3 ✓ C. 12 de 12 ____ E. No sé ____

B. 3 de 3 ____ D. 3 de 12 ____

Porque: por que de 12 bolas que hay 3 rojas

En la pregunta No. 2 un alto porcentaje (54,54%) de estudiantes marcó la opción no sé o no justificó su respuesta.


7. Andrés va a la tienda a comprar una deliciosa bebida y observa los siguientes yogures en la nevera:

Le pide a la dueña de la tienda que saque con los ojos cerrados un yogurt. La probabilidad de que la dueña saque un yogurt de fresa es:

A. 2 ____ B. $\frac{7}{7}$ ____ C. 7____ D. $\frac{2}{7}$ ✗ E. No sé ____

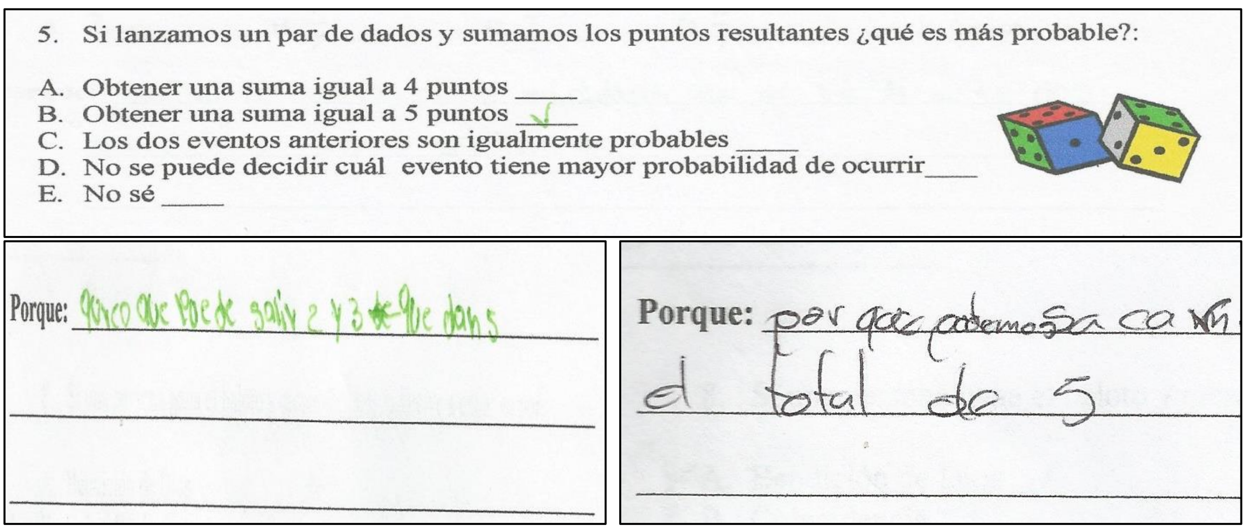
Porque: de 7 yogures saca 1 de fresa. y yogures de fresa solo a on dos cuanto seria $\frac{7 \text{ yogures}}{2 \text{ fresas}}$

Amparo Santamaría Zúñiga

Mientras que en la pregunta No. 7 alto porcentaje (45, 45%) de estudiantes marcó erróneamente la opción A, identificando sólo los casos favorables mas no los casos posibles o espacio muestral. También se observa que un porcentaje considerable (27,27%) de estudiantes marcó la opción “No sé”.

Otro ejemplo de respuestas que se ubican en este nivel es la que dan E16 y E14, quienes aunque responden acertadamente la opción B, mecánicamente identifican una sola combinación de números que al sumarlos da 5, pero no encuentran todas las combinaciones posibles y tampoco realizan la comparación con el evento obtener suma igual a 4. Se trata pues de una justificación carente de significado.

A continuación se presentan las respuestas:


5. Si lanzamos un par de dados y sumamos los puntos resultantes ¿qué es más probable?:

A. Obtener una suma igual a 4 puntos ____
B. Obtener una suma igual a 5 puntos ✓
C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque: porco que puede salir 2 y 3 que dan 5

Porque: por que podemos sacar un el total de 5

Respuesta E16 *Respuesta E14*

- **Nivel de Pre-rigor:**

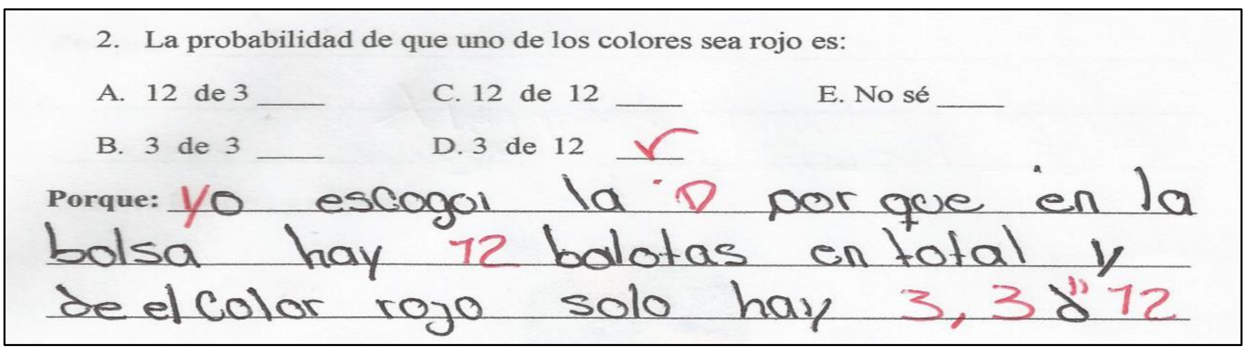
También en la escala de niveles de razonamiento probabilístico que proponen Benítez y Sánchez (1997) se encuentra el nivel de pre-rigor, en el que no se hallaron respuestas características de este tipo.

- **Nivel de Rigor:**

Y el último nivel de la escala de razonamiento probabilístico es el de rigor, un nivel ya formal. Se ubicaron en este nivel justificaciones como las de E1 y E5, pues se puede evidenciar que ya logran identificar con claridad tanto el espacio muestral o casos posibles como los casos favorables y además logran relacionar el evento con diferentes registros semióticos (verbal o lenguaje común y numérico).

Es importante mencionar que la pregunta 2 alcanzó un 22,72% de justificaciones en este nivel, y la pregunta 7 un 13,63%, aunque no se resolvió ninguna de las preguntas a través de representaciones gráficas como diagrama de árbol o tabla de doble entrada para definir espacio muestral y casos favorables, por ejemplo en las preguntas 4 y 5. A continuación se presentan las argumentaciones que formularon E1 y E5:

E1 responde así:

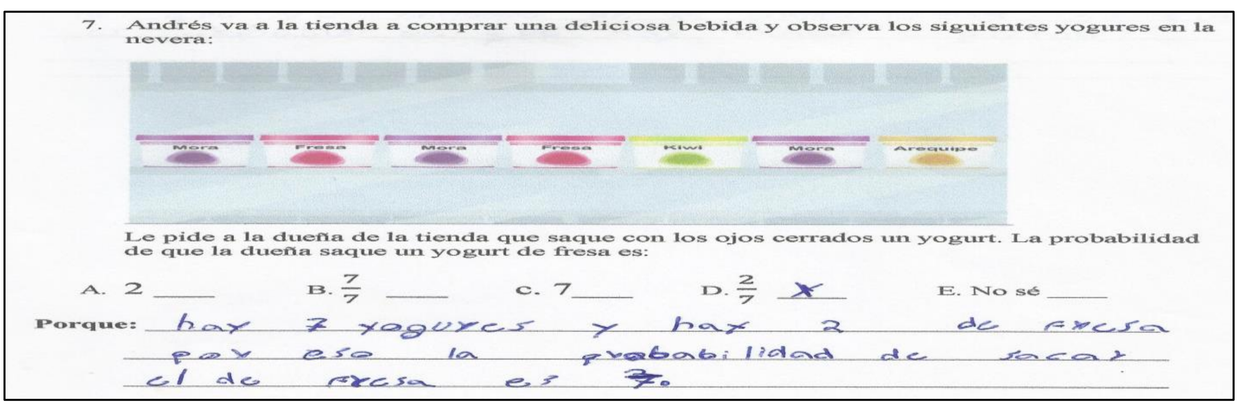

2. La probabilidad de que uno de los colores sea rojo es:

A. 12 de 3 ____ C. 12 de 12 ____ E. No sé ____

B. 3 de 3 ____ D. 3 de 12 ✓

Porque: yo escogoi la D por que en la bolsa hay 12 balotas en total y de el Color rojo solo hay 3, 3 de 12

Esta es la respuesta o justificación que da E5:



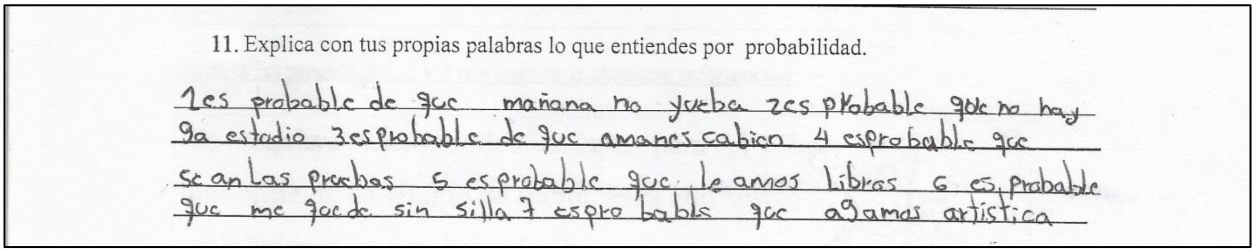
7. Andrés va a la tienda a comprar una deliciosa bebida y observa los siguientes yogures en la nevera:

Le pide a la dueña de la tienda que saque con los ojos cerrados un yogurt. La probabilidad de que la dueña saque un yogurt de fresa es:

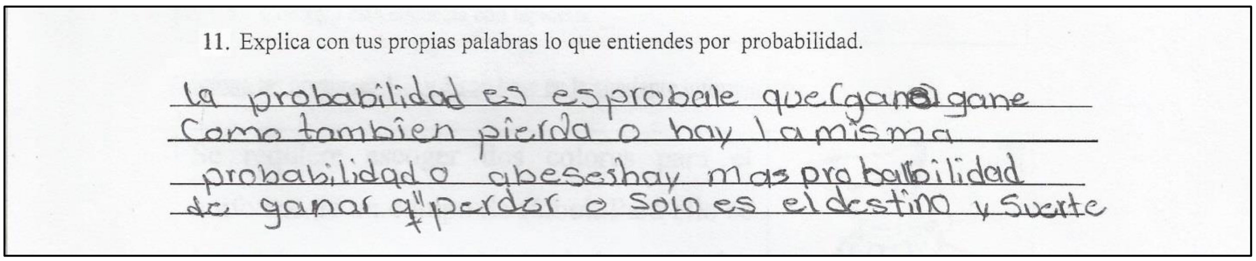
A. 2 ____ B. $\frac{7}{7}$ ____ C. 7____ D. $\frac{2}{7}$ X E. No sé ____

Porque: hay 7 yogures y hay 2 de fresa por eso la probabilidad de sacar el de fresa es $\frac{2}{7}$.

Con respecto a la pregunta 11, pregunta abierta que cuestiona a los estudiantes acerca del concepto de probabilidad se encuentra que un 45,45% de los estudiantes definen la probabilidad asociándola con situaciones cotidianas: llover, ganar o perder en un juego o sorteo, ir o no a piscina o comer un helado. Evidencias de este tipo de respuestas son las que dieron E11 y E22, respectivamente:


11. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

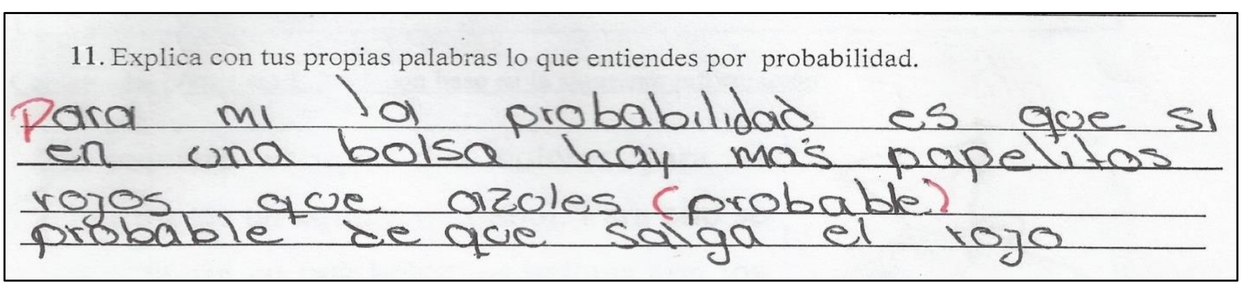
1es probable de gue mañana no yueba 2es pRobable gue no hay ga estadio 3esprobable de gue amanes cabien 4 esprobable gue sean Las prebas 5 es probable gue le amos Libros 6 es probable gue me guede sin silla 7 espro babls gue agamas artistica


11. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

la probabilidad es esprobale que(gane) gane Como tambien pierda o hay la misma probabilidad o abeseshay mas probabilidad de ganar q'perder o solo es el destino y suerte

Otro porcentaje de estudiantes (18,18%) tienen un concepto un poco más elaborado, el cual han construido, muy seguramente, a partir de los ejercicios resueltos en las preguntas anteriores del pre-test, pues relacionan la probabilidad con cantidades, mencionan de alguna forma los casos favorables. Aunque cabe aclarar que ninguno hace uso de lenguaje (términos) matemático al expresar sus ideas. He aquí dos ejemplos de este tipo de respuestas:

E1:


11. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

Para mi la probabilidad es que si en una bolsa hay más papelitos rojos que azoles (probable) probable de que salga el rojo

E9:

11. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

por que probabilida es que un color o una cosa hay mas que la otra por eso se dice que hay mas probabilidad.

Un porcentaje (13,13%) un poco más reducido de estudiantes, define a la probabilidad de una forma más general como algo (evento) que puede o no suceder, es decir se le da el carácter de aleatorio, pero sin comprender que se puede estimar o predecir la posibilidad de ocurrencia.

Es importante mencionar que un 9,09% del grupo esgrime unas justificaciones incoherentes, que no dan cuenta de lo que puede ser la probabilidad, y un 13,63 % que manifiesta no saber la respuesta o no responden la pregunta.

Análisis de la secuencia didáctica

Presentación de la actividad.

En este apartado se describen cada una de las guías de aprendizaje (Anexo 2) aplicadas, así como las condiciones de la aplicación y los resultados del análisis cualitativo correspondiente.

Es importante mencionar, que cada una de las 4 guías de aprendizaje diseñadas, parte de un juego aleatorio o de azar, a partir del cual los estudiantes pueden adquirir conceptos apropiados relacionados con la probabilidad y fortalecer el pensamiento aleatorio para alcanzar los niveles de razonamiento probabilístico más altos.

En términos generales, cada una de las guías está diseñada con una misma estructura. Se inicia exponiendo los propósitos y desempeños esperados con las actividades propuestas. Se presentan tres momentos o fases: Apertura, Desarrollo y Cierre, retomando lo que propone Díaz

Barriga. En la Apertura se proponen actividades que abren el clima de aprendizaje y permiten la exploración de saberes previos. En el Desarrollo se plantean las situaciones de Acción, de Formulación y de Validación a las que se refiere Brousseau. Y en el Cierre se plantea la situación de Institucionalización.

En la situación de Acción se plantea, como medio para el aprendizaje, un juego aleatorio, a partir del cual los estudiantes realizan comparaciones, análisis y reflexiones, a través de las situaciones de formulación y validación, que los lleva a interiorizar nuevos conocimientos y a fortalecer su razonamiento probabilístico.

Finalmente, en el cierre, con la situación de institucionalización, se recapitula, se ordena y se vincula lo que producen los estudiantes en los diferentes momentos del desarrollo de la SD, a fin de relacionar lo producido con el saber matemático.

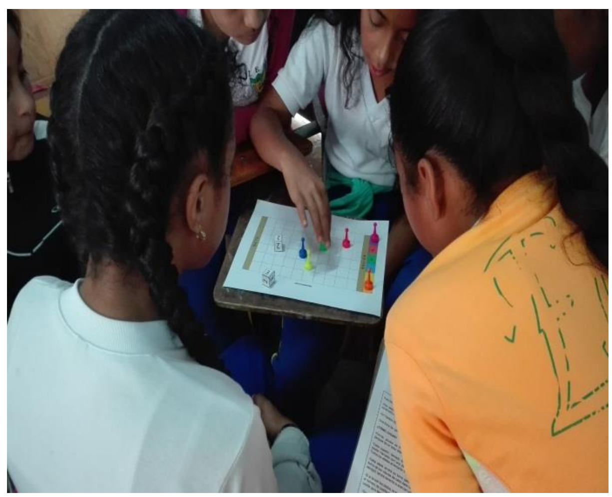
Condiciones de la aplicación.

Cada guía se aplicó en una sesión de dos horas. Dado que las actividades se inician con juegos aleatorios, estas se desarrollan en grupos de 2 a 4 integrantes. En las situaciones de formulación y validación, aunque estaban en grupo, cada estudiante, individualmente, diligencia su respectiva tabla con la información solicitada. Luego se socializan, confrontan y argumentan resultados.

A continuación se presentan algunos registros fotográficos de las actividades realizadas:

Estudiantes construyendo las ruletas en la fase de Apertura de la guía de aprendizaje No.3

Estudiante socializando resultados. Proceso de Tratamiento (pasar de un tipo de representación a otro dentro del mismo registro semiótico)



Estudiantes jugando "Carrera de Velocidad" en la fase de desarrollo de la guía No. 4

Es importante mencionar que para la consecución de los objetivos propuestos y el alcance de los aprendizajes esperados se establece una dinámica de clase en la que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje. Con los espacios de socialización se pretende propiciar la confrontación de ideas y la puesta en común a partir de la interacción entre los estudiantes.

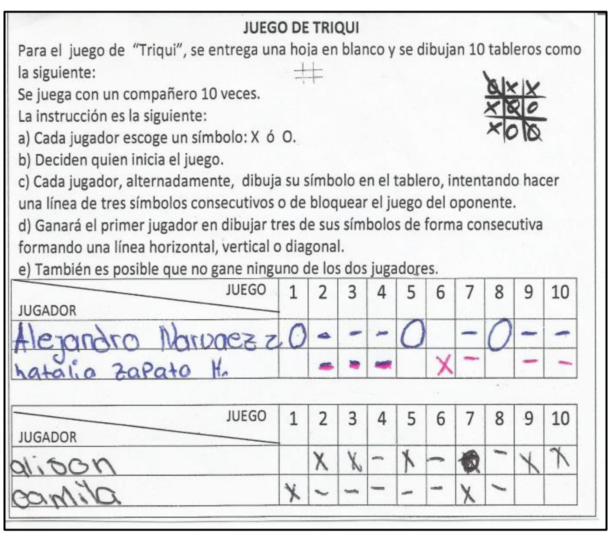
Análisis Cualitativo.

En este apartado se presenta una descripción de lo trabajado por los estudiantes en cada una de las guías de aprendizaje.

Guía de Aprendizaje No. 1.

En esta primera guía los estudiantes logran diferenciar entre una situación aleatoria o de azar y una de certeza, a través de la experimentación con dos juegos: póker (azar) y triqui (certeza).

Una vez los estudiantes, en parejas se enfrentan a los dos juegos y registran el ganador en cada partida, fueron descubriendo que en el juego de póker era imposible saber quién ganaría, mientras que en el juego de triqui era posible idear una estrategia para ganar o para bloquear al compañero. A continuación se presentan algunas evidencias de los registros de los juegos:



JUEGO DE TRIQUI

Para el juego de "Triqui", se entrega una hoja en blanco y se dibujan 10 tableros como la siguiente:

Se juega con un compañero 10 veces.

La instrucción es la siguiente:

a) Cada jugador escoge un símbolo: X ó O.

b) Deciden quien inicia el juego.

c) Cada jugador, alternadamente, dibuja su símbolo en el tablero, intentando hacer una línea de tres símbolos consecutivos o de bloquear el juego del oponente.

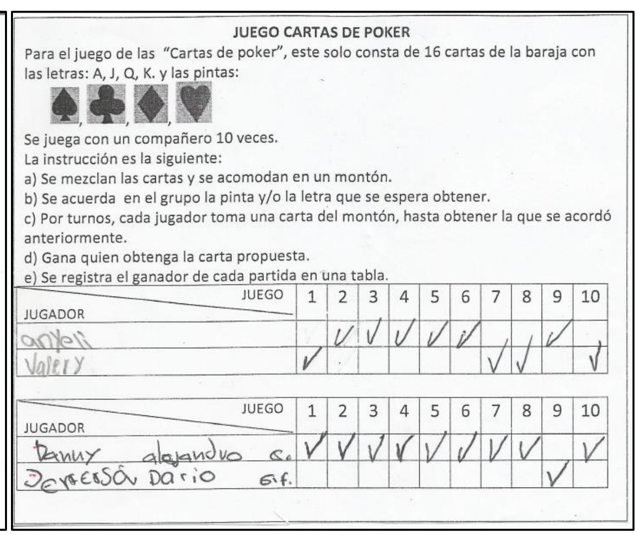
d) Ganará el primer jugador en dibujar tres de sus símbolos de forma consecutiva formando una línea horizontal, vertical o diagonal.

e) También es posible que no gane ninguno de los dos jugadores.

JUGADOR \ JUEGO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alejandro Narvaez Z	O	-	-	-	O		-	O	-	-
natalia zapato H.		-	-	-		X	-		-	-

JUGADOR \ JUEGO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
alison		X	X	-	X	-	[illegible]	-	X	X
camila	X	-	-	-	-	-	X	-		

Registro juego de triqui



JUEGO CARTAS DE POKER

Para el juego de las "Cartas de poker", este solo consta de 16 cartas de la baraja con las letras: A, J, Q, K. y las pintas:

♠ ♣ ♦ ♥

Se juega con un compañero 10 veces.

La instrucción es la siguiente:

a) Se mezclan las cartas y se acomodan en un montón.

b) Se acuerda en el grupo la pinta y/o la letra que se espera obtener.

c) Por turnos, cada jugador toma una carta del montón, hasta obtener la que se acordó anteriormente.

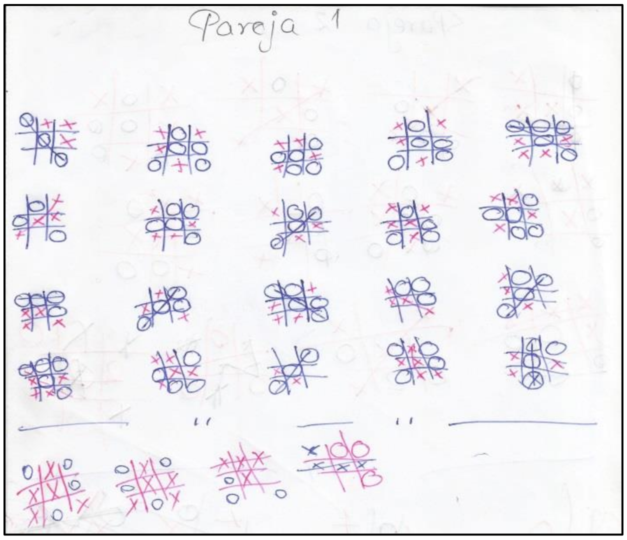
d) Gana quien obtenga la carta propuesta.

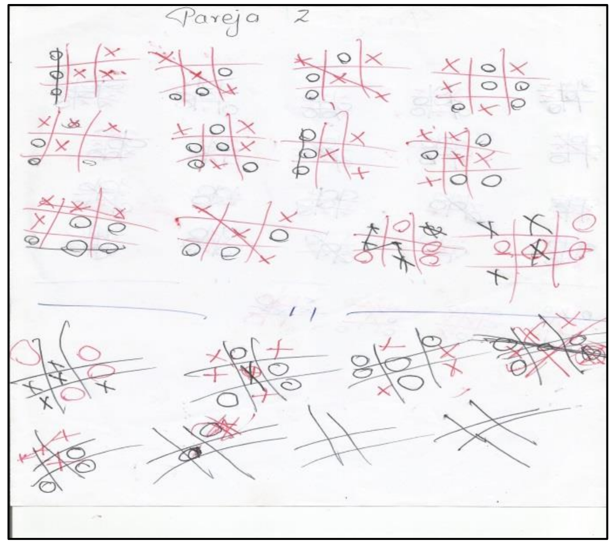
e) Se registra el ganador de cada partida en una tabla.

JUGADOR \ JUEGO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
anyeli		✓	✓	✓	✓	✓			✓	
Valery	✓						✓	✓		✓

JUGADOR \ JUEGO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Danny alejandro c.	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓
Jeferson Dario G.f.									✓	

Registro juego de póker





Registro juego de triqui en un grupo de estudiantes

Después de terminados los dos juegos por parejas, se lleva a cabo la socialización. Cada pareja expone cuál de los dos ganó más partidas y por qué cree que ganó. Algunos estudiantes argumentaban que por la suerte, otros porque tenían más habilidad para ese juego ya que lo practicaban con frecuencia. Pero algunos manifestaron que habían descubierto una estrategia que les permitió ganar en algunas partidas.

En el siguiente fragmento se muestra un ejemplo de la justificación que da E18 con respecto al juego de triqui:

DOCENTE: ¿Por qué crees que ganaste el juego más veces que tu compañero?

E18: Porque yo siempre trataba de poner el círculo en la mitad.

DOCENTE: ¿Y siempre te funcionó?

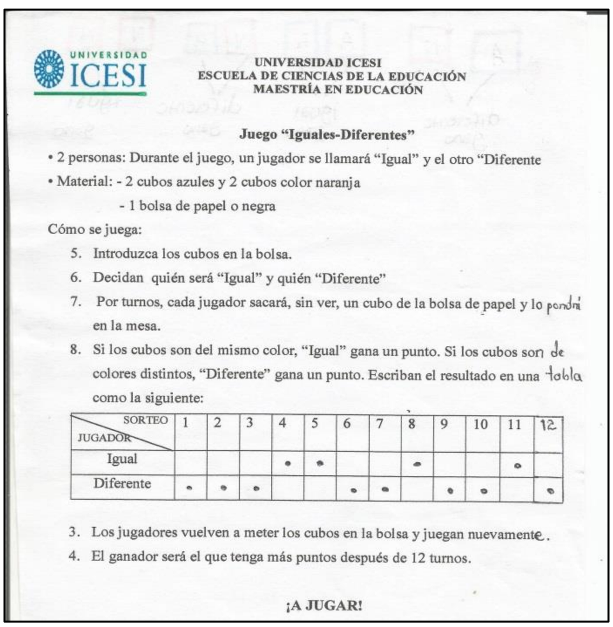
E18: No, porque a veces él me tapaba la jugada y entonces ninguno ganaba, pero sí le gané 5 a 2.

Con respecto al juego de póker la gran mayoría de los estudiantes coincidieron en que era imposible crear estrategias para ganar, algunos argumentaron que ganaron por que tenían suerte.

Otros pocos, comprendieron que por casualidad, cuando les correspondía su turno, sacaron la carta, que habían acordado al comienzo del juego. Se confrontan las ideas de unos y otros y se concluye el tema explicando que no se trata de suerte sino de situaciones o hechos, afortunados o desafortunados, que se dan por causas que desconocemos o que están fuera de nuestro control. Que es simple casualidad o azar.

Guía de Aprendizaje No. 2.

Con la guía de aprendizaje No. 2 se logra que los estudiantes se apropien de conceptos propios de la probabilidad, como son: eventos, espacio muestral, sucesos equiprobables, casos favorables y casos posibles, los cuales no conocían según lo expresaron. Además logran calcular probabilidades, aplicando la ley de Laplace, y definir si dos sucesos son o no equiprobables a través del juego “iguales o diferentes”. A continuación se presentan algunas evidencias del juego:



UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Juego “Iguales-Diferentes”

• 2 personas: Durante el juego, un jugador se llamará “Igual” y el otro “Diferente

• Material: - 2 cubos azules y 2 cubos color naranja
- 1 bolsa de papel o negra

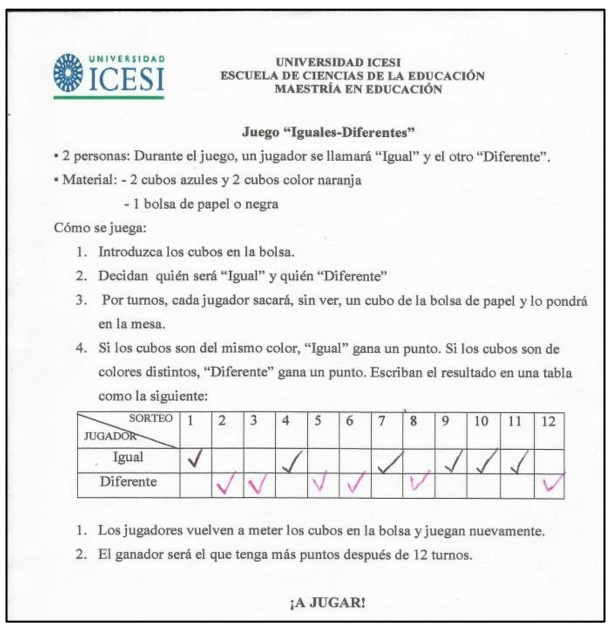
Cómo se juega:

5. Introduzca los cubos en la bolsa.
6. Decidan quién será “Igual” y quién “Diferente”
7. Por turnos, cada jugador sacará, sin ver, un cubo de la bolsa de papel y lo pondrá en la mesa.
8. Si los cubos son del mismo color, “Igual” gana un punto. Si los cubos son de colores distintos, “Diferente” gana un punto. Escriban el resultado en una tabla como la siguiente:

SORTEO / JUGADOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Igual				•	•			•			•	
Diferente	•	•	•			•	•		•	•		•

3. Los jugadores vuelven a meter los cubos en la bolsa y juegan nuevamente.
4. El ganador será el que tenga más puntos después de 12 turnos.

¡A JUGAR!



UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Juego “Iguales-Diferentes”

• 2 personas: Durante el juego, un jugador se llamará “Igual” y el otro “Diferente”.

• Material: - 2 cubos azules y 2 cubos color naranja
- 1 bolsa de papel o negra

Cómo se juega:

1. Introduzca los cubos en la bolsa.
2. Decidan quién será “Igual” y quién “Diferente”
3. Por turnos, cada jugador sacará, sin ver, un cubo de la bolsa de papel y lo pondrá en la mesa.
4. Si los cubos son del mismo color, “Igual” gana un punto. Si los cubos son de colores distintos, “Diferente” gana un punto. Escriban el resultado en una tabla como la siguiente:

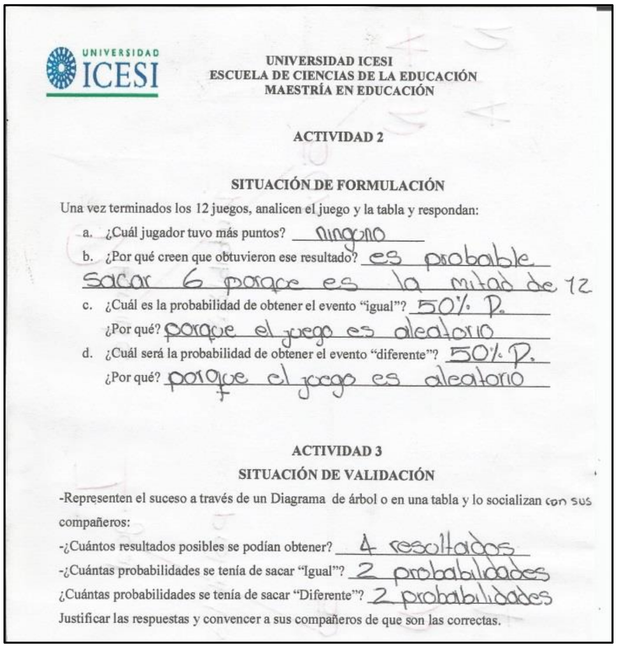
SORTEO / JUGADOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Igual	✓			✓			✓		✓	✓	✓	
Diferente		✓	✓		✓	✓		✓				✓

1. Los jugadores vuelven a meter los cubos en la bolsa y juegan nuevamente.
2. El ganador será el que tenga más puntos después de 12 turnos.

¡A JUGAR!

Con el registro que hacen los estudiantes en esta tabla, al socializar, pueden comprobar que cualquiera de los tres resultados se podía obtener: que ganara igual, que ganara diferente o que quedaran empatados.

Luego en las actividades de formulación y validación se obtienen respuestas como la que da E1:



UNIVERSIDAD ICESI

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ACTIVIDAD 2

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

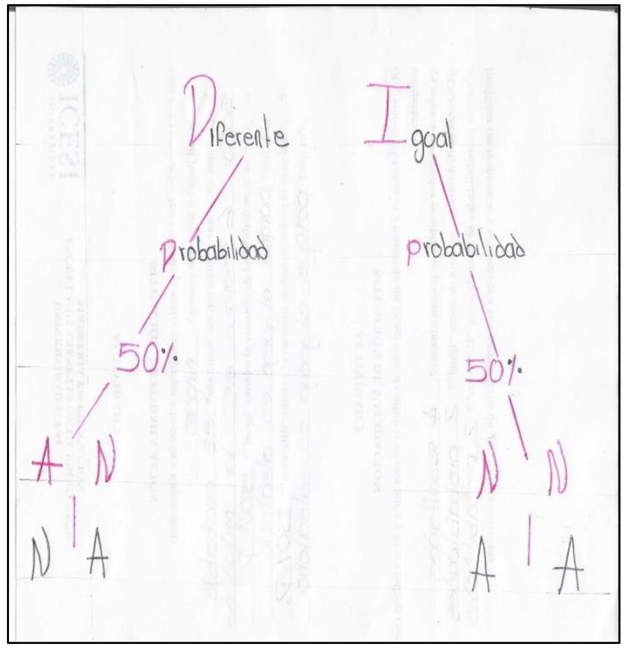
Una vez terminados los 12 juegos, analicen el juego y la tabla y respondan:

a. ¿Cuál jugador tuvo más puntos? ninguno
b. ¿Por qué creen que obtuvieron ese resultado? es probable sacar 6 porque es la mitad de 12
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el evento "igual"? 50% P.
¿Por qué? porque el juego es aleatorio
d. ¿Cuál será la probabilidad de obtener el evento "diferente"? 50% P.
¿Por qué? porque el juego es aleatorio

ACTIVIDAD 3

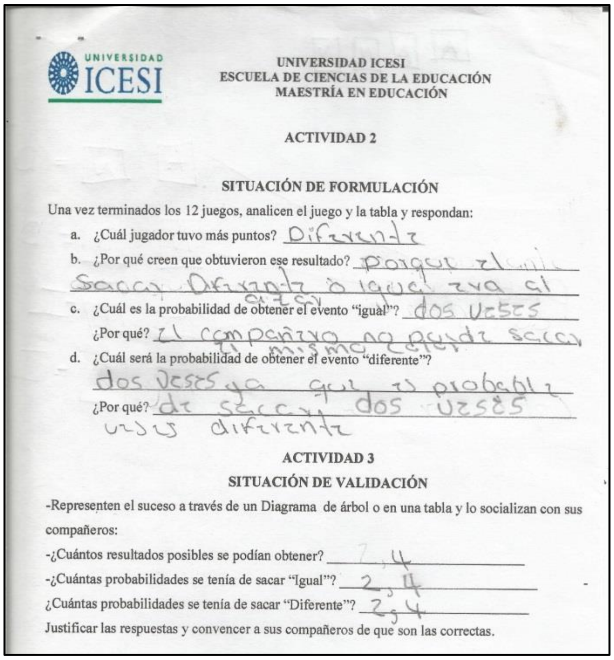
SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

-Representen el suceso a través de un Diagrama de árbol o en una tabla y lo socializan con sus compañeros:
-¿Cuántos resultados posibles se podían obtener? 4 resultados
-¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Igual"? 2 probabilidades
¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Diferente"? 2 probabilidades
Justificar las respuestas y convencer a sus compañeros de que son las correctas.



Este estudiante, en la Actividad 2, correspondiente a la situación de formulación, tiene claro que se trata de una situación aleatoria y tiene la idea de que los dos eventos son equiprobables, aunque su argumento no es el correcto. Para predecir la probabilidad tiene en cuenta la cantidad de juegos o saques de dados (12) y no la cantidad y los colores de los dados. Ya comienza a hacer uso de los registros gráficos para determinar el espacio muestral, lo cual se evidencia en la Actividad 3, situación de validación al identificar los casos posibles (4) y los casos favorables (2 para cada evento).

Otro ejemplo de respuestas es la siguiente:


UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ACTIVIDAD 2

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

Una vez terminados los 12 juegos, analicen el juego y la tabla y respondan:

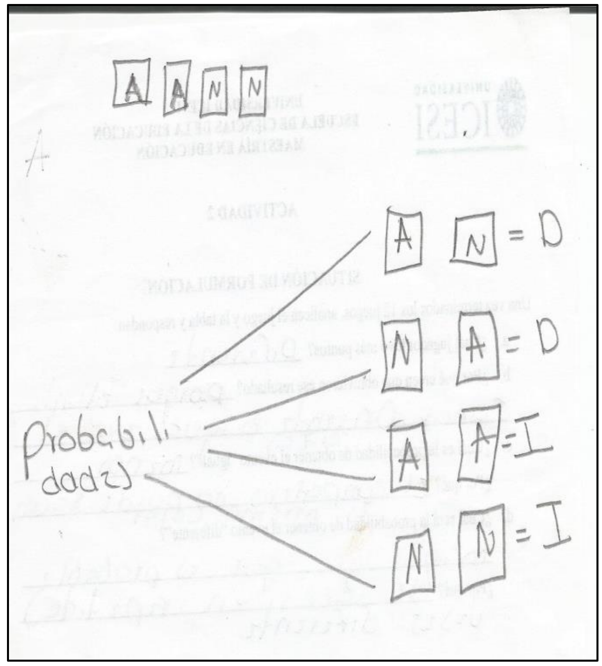
a. ¿Cuál jugador tuvo más puntos? Diferente
b. ¿Por qué creen que obtuvieron ese resultado? porque el ... sacar Diferente o igual era al azar
c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el evento "igual"? dos veses
¿Por qué? el compañero no puede sacar el mismo color
d. ¿Cuál será la probabilidad de obtener el evento "diferente"? dos veses ya que es probable
¿Por qué? de sacar dos veses veses diferente

ACTIVIDAD 3

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

-Representen el suceso a través de un Diagrama de árbol o en una tabla y lo socializan con sus compañeros:

-¿Cuántos resultados posibles se podían obtener? 2, 4
-¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Igual"? 2, 4
¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Diferente"? 2, 4
Justificar las respuestas y convencer a sus compañeros de que son las correctas.



En este caso, ya se evidencia un nivel de razonamiento más avanzado, pues se atribuye la probabilidad a la cantidad de veces que puede salir el evento "Igual" (A-A, N-N) y la cantidad de veces que puede salir el evento "Diferente" (A-N, N-A). También se observa el uso de la representación gráfica (diagrama de árbol) para definir los casos posibles o espacio muestral.

Ya en la fase de cierre, en la situación de Institucionalización, a partir de las respuestas dadas por los estudiantes se concluye aclarando que los dos eventos de este juego son "Equiprobables" ya que tienen la misma probabilidad de salir y se les relaciona con el registro numérico ($\frac{2}{4}$) y el lenguaje natural (2 de 4). Dado que un estudiante expresó la probabilidad en porcentaje, se les llevó a comprender que la probabilidad también se puede expresar en este tipo de representación, lo cual se trabajará en la siguiente guía de aprendizaje.

Guía de Aprendizaje No. 3.

En esta guía el juego escogido como medio con el cual interactúan los estudiantes para reconstruir su aprendizaje sobre la probabilidad se denomina "Tu color de la suerte" y se lleva a cabo a través de ruletas de colores que son construidas por los mismos estudiantes en la fase de Apertura.

A través de las actividades propuestas en esta guía, algunos estudiantes (50% aproximadamente) logran calcular la probabilidad de que la flecha señale un color determinado, representar dichas probabilidades en diferentes registros semióticos (lenguaje común, aritmético) y realizar procesos de tratamiento y conversión entre ellos.

A continuación se presentan algunos ejemplos de las actividades desarrolladas por los estudiantes:

RULETA No. 3

La ruleta es un juego de azar que consiste en hacer girar la rueda y determinar, cuando pare, a qué color, figura, número o letra marca la flecha.

Necesitarás:

- Un círculo de cartón paja o cartulina
- Una flechita para indicar el color que cae al hacer girar la ruleta o la pirinola.
- Una varita o lápiz para sostener la ruleta

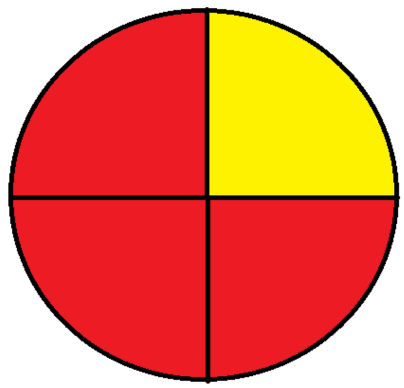
Cómo se hace:

-Divide la superficie del círculo en 4 partes iguales.

-Colorea teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Tres partes seguidas de color rojo.
- Una parte de color amarillo.

Nos debemos asegurar que nos quede bien balanceada para que no afecte los resultados.



RULETA No.	EVENTO	TIPO DE EVENTO	REPRESENTACIÓN			
			VERBAL	RAZON	DECIMAL	PORCENTAJE
3	Caer en color azul	impocibl				
3	Caer en un color del arcoíris	impocibl				
3	Caer en color amarillo	poco Pocible	1 de 4	$\frac{1}{4}$	0,25	25 %
3	Caer en color rojo	muy pocible	3 de 4	$\frac{3}{4}$	0,75	75 %

10 | 4
20 0,25
00

30 | 4
20 0,75
0

0,25
100
000
000
025
025,00

En el caso anteriormente expuesto, los estudiantes de este grupo calculan adecuadamente la probabilidad de ocurrencia de un evento. También lo representan tanto de forma verbal como numérica y logran realizar proceso de tratamiento, es decir, pasan de la escritura fraccionaria a la decimal y luego a la porcentual.

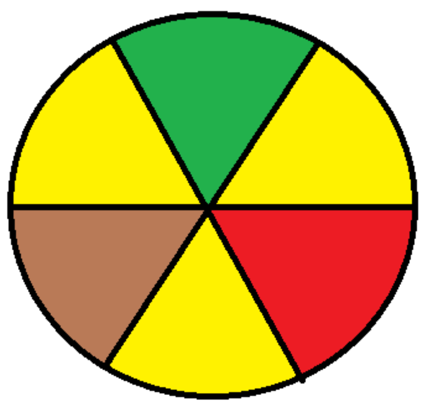
Es evidente en este ejercicio que el estudiante requiere unos saberes previos (resolver algoritmo de la división y de la multiplicación) para llevar a cabo el proceso de tratamiento. Sin éstos se le dificulta desarrollar las actividades adecuadamente y en consecuencia aprender. Tal es el caso que a continuación se presenta, que aunque lograron identificar la probabilidad en los dos primeros eventos, no lograron pasar de la representación fraccionaria a la decimal ni a la porcentual, situación que presenta un 72,72%, aproximadamente, de los estudiantes de este grupo:

RULETA No. 5
La ruleta es un juego de azar que consiste en hacer girar la rueda y determinar, cuando pare, a qué color, figura, número o letra marca la flecha.

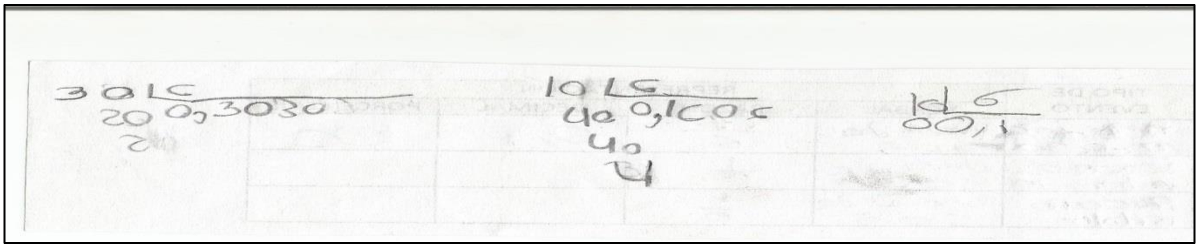
Necesitarás:
- Un círculo de cartón paja o cartulina
- Una flechita para indicar el color que cae al hacer girar la ruleta o la pirinola.
- Una varita o lápiz para sostener la ruleta

Cómo se hace:
-Divide la superficie del círculo en 6partes iguales.
-Colorea teniendo en cuenta las siguientes condiciones:
- Tres partes no seguidas de color amarillo.
- Una parte de color verde.
- Una parte de color rojo.
- Una parte de color café-

Nos debemos asegurar que nos quede bien balanceada para que no afecte los resultados.



RULETA No.	EVENTO	TIPO DE EVENTO	REPRESENTACIÓN			
			VERBAL	RAZON	DECIMAL	PORCENTAJE
5	Caer en color amarillo	mediamente posible	tre de seis	3/6	0,1	100
5	Caer en color café	Pocopos ible	uno de seis	1/6		
5	Caer en color azúl	Pocapo sible	uno de seis	1/6		



En la socialización de los resultados obtenidos por cada grupo, los estudiantes que ya tienen muy bien desarrollado este aprendizaje (resolver algoritmo de la división y de la multiplicación), explicaron, en el tablero, a sus pares el procedimiento adecuado.

Guía de Aprendizaje No. 4

En esta guía, a través de la rifa que se propone como actividad de Apertura y del juego “Carrera de velocidad” que se plantea como medio, los estudiantes logran identificar que existen situaciones en las que no es justo el sorteo o el juego, porque algunos participantes tienen más probabilidades de ganar que otros.

En la rifa, los estudiantes identificaron que quien tenía la mayor probabilidad de ganar era Gabriela, ya que había 4 pelotas de color naranja, mientras que Alison tenía la menor probabilidad de ganar, pues sólo había 2 pelotas azules en la bolsa. Pero, como se trata de una situación aleatoria o de azar, aunque Alison se mostró desanimada y sin esperanzas de ganar, fue la ganadora de la rifa. Se aprovechan los resultados obtenidos para afianzar el concepto de probabilidad con los estudiantes “aunque se puede determinar quién tiene más y menos probabilidad de ganar, no se puede saber con seguridad los resultados que se obtendrán”.

En el juego “Carrera de Velocidad”, el cual consiste en elegir, en un tablero de juego (ver imagen), un número entre 2, 3, 4, 5, 6 o 7 y colocar una ficha de parqués que lo represente en la casilla correspondiente. Para saber quién avanza una casilla en el tablero, se lanzan dos dados en cuyas caras tienen los números 1, 2, 2, 2, 3, 3. Los estudiantes comenzaron a darse cuenta muy pronto que quien había escogido el número 7 nunca avanzaría, ya que no existen en los dados dos números que sumados de 7; y que quienes escogieron el número 2 tenían muy pocas probabilidades de llegar a la meta, pues solo tenían 1 posibilidad de 36.

Al observar los tableros de juego de todos los grupos, al finalizar las tres rondas, se dieron cuenta que quienes tenían más posibilidades de ganar eran quienes habían escogido los números 4, 5 y 3, en orden de mayor a menor probabilidad.

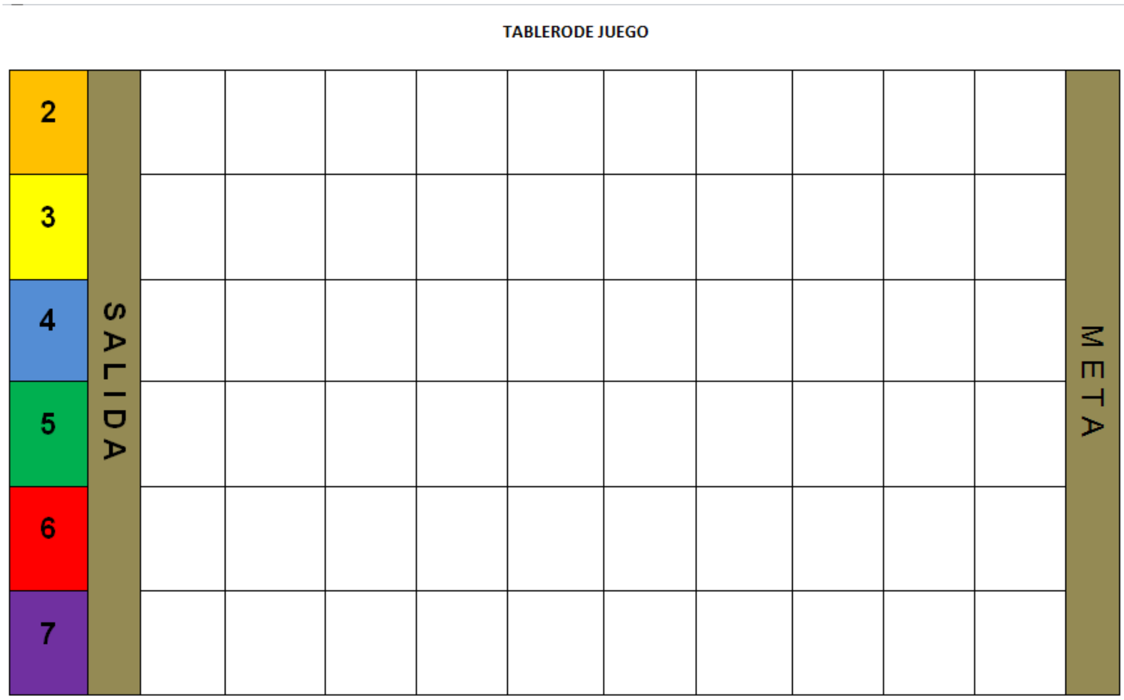
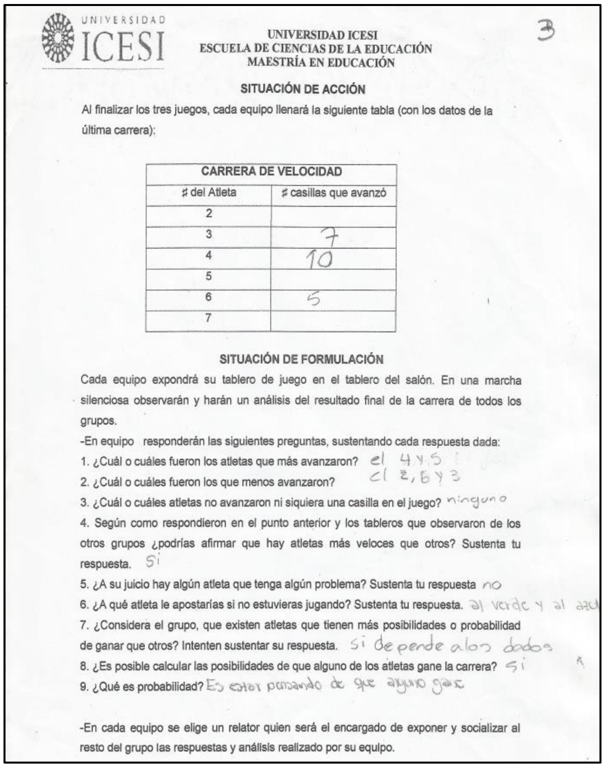


Gráfico 5. *Tablero de juego "Carrera de Velocidad"-Guía de Aprendizaje No.4*

En la situación de formulación, a través de las preguntas de análisis y comprensión del juego, la mayoría de los estudiantes logra comprender que el juego es de azar, y que avanzar y ganar no dependía de las habilidades de los atletas sino de lo que arrojaran los dados. Otros, aún siguen en un nivel de razonamiento determinista y atribuyen el hecho de ganar a la suerte.



UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

3

SITUACIÓN DE ACCIÓN

Al finalizar los tres juegos, cada equipo llenará la siguiente tabla (con los datos de la última carrera):

CARRERA DE VELOCIDAD	
♯ del Atleta	♯ casillas que avanzó
2	
3	7
4	10
5	
6	5
7	

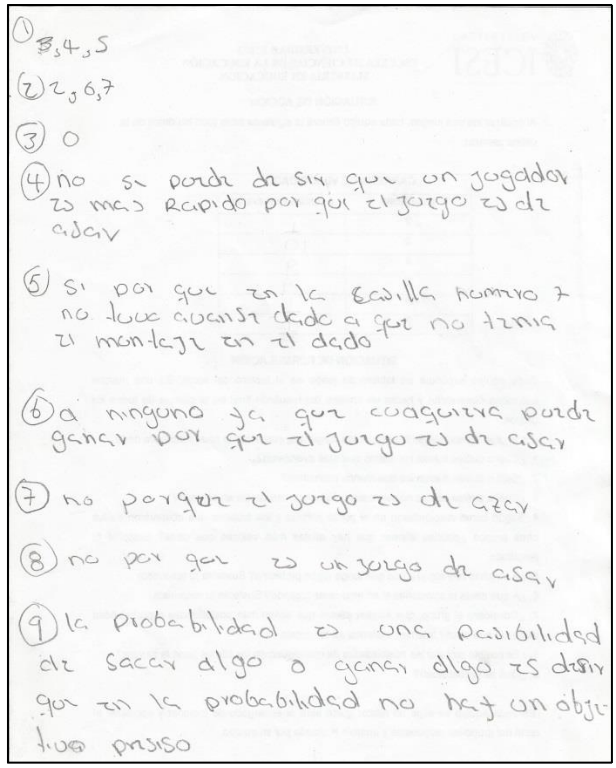
SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

Cada equipo expondrá su tablero de juego en el tablero del salón. En una marcha silenciosa observarán y harán un análisis del resultado final de la carrera de todos los grupos.

-En equipo responderán las siguientes preguntas, sustentando cada respuesta dada:

1. ¿Cuál o cuáles fueron los atletas que más avanzaron? el 4 y 5
2. ¿Cuál o cuáles fueron los que menos avanzaron? el 2, 6 y 3
3. ¿Cuál o cuáles atletas no avanzaron ni siquiera una casilla en el juego? ninguno
4. Según como respondieron en el punto anterior y los tableros que observaron de los otros grupos ¿podrías afirmar que hay atletas más veloces que otros? Sustenta tu respuesta. si
5. ¿A su juicio hay algún atleta que tenga algún problema? Sustenta tu respuesta no
6. ¿A qué atleta le apostarías si no estuvieras jugando? Sustenta tu respuesta. al verde y al azul
7. ¿Considera el grupo, que existen atletas que tienen más posibilidades o probabilidad de ganar que otros? Intenten sustentar su respuesta. si depende a los dados
8. ¿Es posible calcular las posibilidades de que alguno de los atletas gane la carrera? si
9. ¿Qué es probabilidad? Es estar pensando de que alguno gane

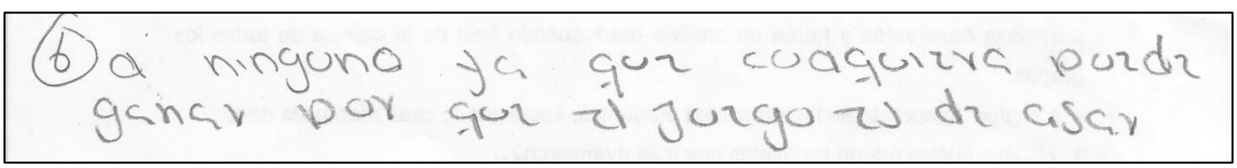
-En cada equipo se elige un relator quien será el encargado de exponer y socializar al resto del grupo las respuestas y análisis realizado por su equipo.



1) 3, 4, 5
2) 2, 6, 7
3) 0
4) no se puede de sir que un jugador es mas Rapido por que el juego es de asar
5) si por que en la casilla numero 7 no lo avanse dado a que no tenia el montaje en el dado
6) a ninguno ya que cualquiera puede ganar por que el juego es de asar
7) no porque el juego es de azar
8) no por que es un juego de asar
9) la probabilidad es una posibilidad de sacar algo o ganar algo es decir que en la probabilidad no hay un objetivo preciso

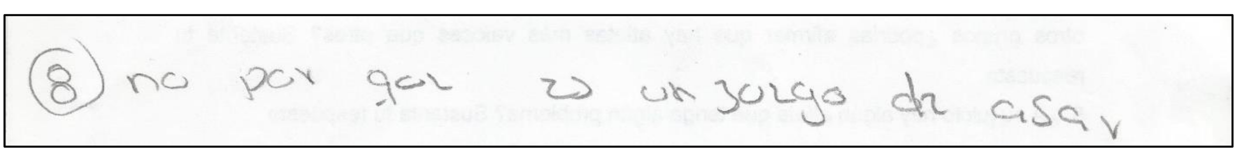
Un grupo de estudiantes, aunque tienen claro que se trata de un juego de azar, se encuentran aún en el nivel de razonamiento de impredicción, como se presenta a continuación en las siguientes respuestas a las preguntas número 6 y 8:

Pregunta 6. ¿A qué atleta le apostarías si no estuvieras jugando? Sustenta tu respuesta.



6) a ninguno ya que cualquiera puede ganar por que el juego es de asar

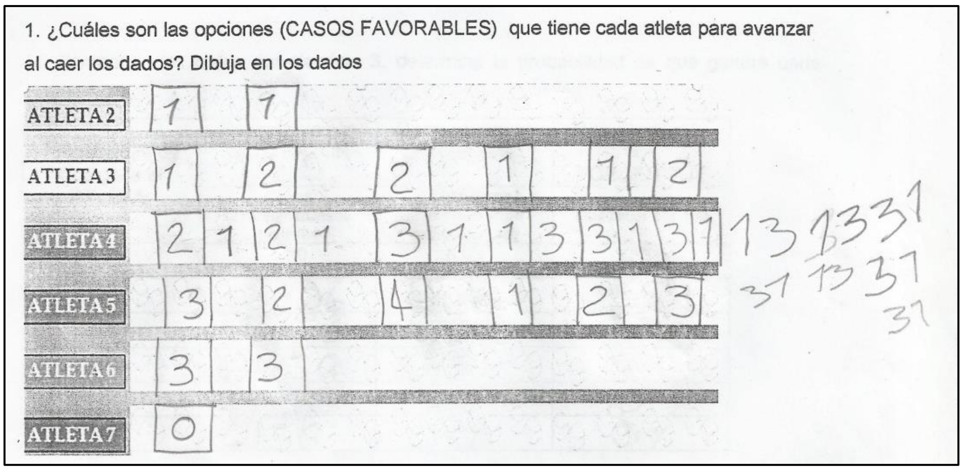
Pregunta 8. ¿Es posible calcular las posibilidades de que alguno de los atletas gane la carrera?



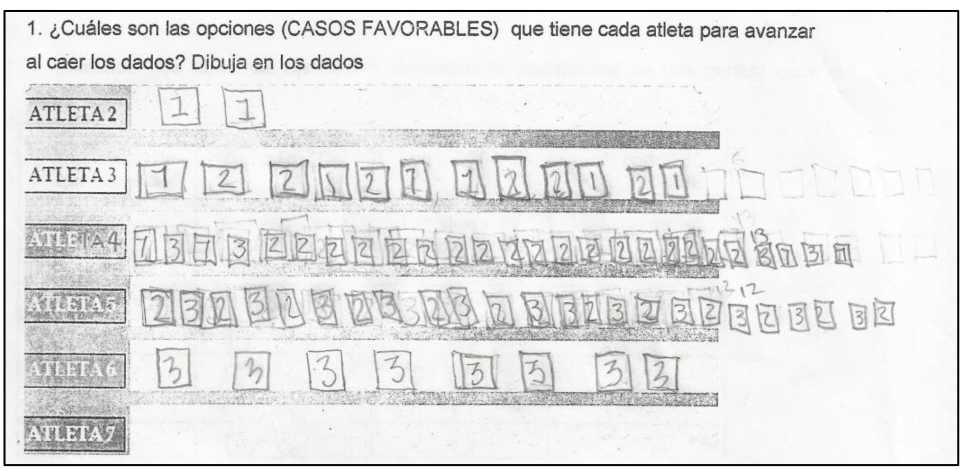
8) no por que es un juego de asar

En cuanto a las actividades de la situación de Validación, los estudiantes debían hallar los casos favorables para cada atleta y los casos posibles o totales a través de una representación pictórica de los dados. En este ejercicio la gran mayoría de los estudiantes comienzan a introducirse en los niveles de pre-rigor y rigor, pues algunos hallan las combinaciones posibles para cada atleta pero no en su totalidad, mientras que otros pocos las hallan completamente.

- **PRE-RIGOR:**



- **RIGOR:**



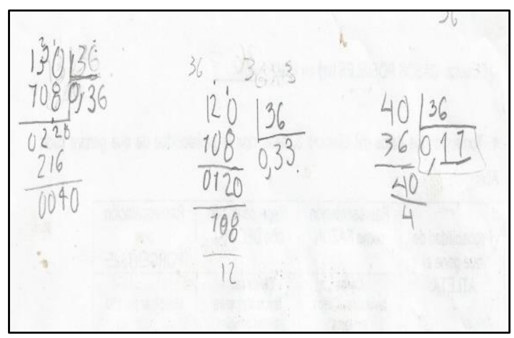
Seguidamente deben determinar la probabilidad de ganar en cada caso, utilizando diferentes representaciones: lenguaje verbal y representación numérica, realizando procesos de tratamiento y conversión.

Algunos estudiantes continúan presentando dificultad para pasar de la representación aritmética (razón) a la decimal y porcentual, dado que no tienen suficiente conocimiento de este procedimiento. Pocos estudiantes tienen un conocimiento suficiente del procedimiento de la división. Por tal motivo, en la socialización y retroalimentación de esta parte de la guía se hace especial énfasis en estos procedimientos. A continuación se presentan algunos ejemplos de los dos tipos de respuestas:

PROCEDIMIENTO ADECUADO:

4. Tomando los datos del ejercicio 3, determina la probabilidad de que ganara cada Atleta:

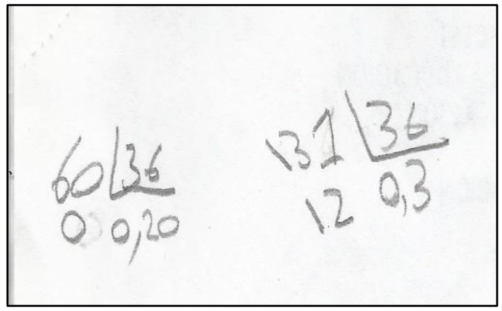
Probabilidad de que gane el ATLETA:	Representación como RAZÓN	Representación con DECIMAL	Representación con PORCENTAJE
	Casos favorables/Casos posibles	Dividir casos favorables entre casos posibles	Multiplicar por 100
2	1/~~30~~ 36	0.03	3.33%
3	6/36	0,16	16%
4	13/36	0,36	36%
5	12/36	0,33	33%
6	4/36	0,11	11%
7	0/36	0,0	0%



PROCEDIMIENTO ERRÓNEO:

4. Tomando los datos del ejercicio 3, determina la probabilidad de que ganara cada Atleta:

Probabilidad de que gane el ATLETA:	Representación como RAZÓN	Representación con DECIMAL	Representación con PORCENTAJE
	Casos favorables/Casos posibles	Dividir casos favorables entre casos posibles	Multiplicar por 100
2	1/30	0.03	3.33%
3	6/36	0,20	20%
4	12/36	0,53	53%
5	13/36	0,30	30%
6	4/36	0,20	20%
7	0/36	0,0	0%



Ya en la situación de institucionalización se concluye la guía dando claridad a todas aquellas dificultades y errores encontrados a lo largo del desarrollo de la misma.

Análisis del pos-test

Presentación de la actividad.

A través del pos-test se evalúa el nivel de conocimientos adquiridos y de razonamiento alcanzado sobre algunas nociones básicas de probabilidad, una vez implementada la SD. Para tal fin, se diseñó un cuestionario con 8 preguntas que, según el tipo de información que permiten recolectar, se pueden clasificar de la siguiente forma:

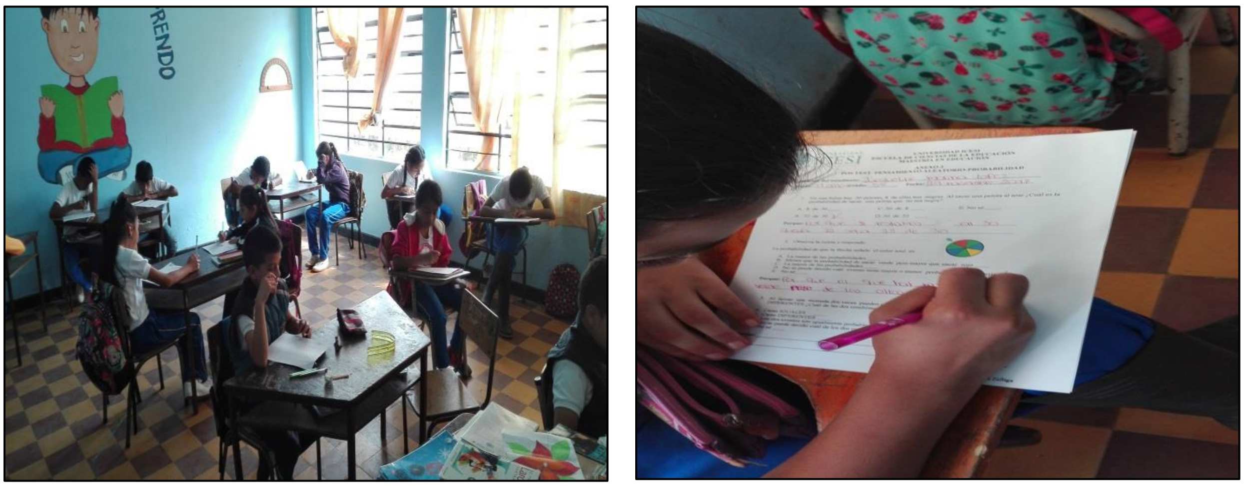
- Razonamiento y argumentación de la probabilidad: Pregunta 2.
- Cálculo de la probabilidad simple y compuesta: Pregunta 3.
- Representación y comunicación de la probabilidad: Preguntas 1, 4 y 5
- Significado y sistema de creencias sobre la probabilidad: 6, 7 y 8

Al igual que en el pre-test, se aclara que esta clasificación no es limitativa, que algunas preguntas pueden involucrar dos o más propósitos de los mencionados.

Condiciones de aplicación.

El pre-test consiste en responder 8 preguntas, 6 de las cuales son de opción múltiple y con un espacio para justificar cada una de las respuestas. Las preguntas 7 y 8 son abiertas. Esta prueba se aplicó el día 29 de noviembre de 2017 de forma individual en una sesión de 60 minutos a los 22 estudiantes del grado quinto, cuyas características ya fueron descritas en el análisis del pre-test.

A continuación se presentan evidencias de la aplicación de dicha prueba:



Estudiantes de la I E San Antonio presentando el Pos-test

Análisis Cualitativo.

En este apartado se presenta el análisis y clasificación de las justificaciones que dieron los estudiantes en las primeras 6 preguntas del cuestionario, a luz de los niveles de razonamiento probabilístico propuestos por Benítez y Sánchez, 1997. En este análisis se presentarán evidencias de algunas de las respuestas dadas por los estudiantes.

Tal como en el análisis del pre-test, con el propósito de dar una mayor claridad a este análisis, describir las justificaciones y realizar comparación entre los resultados obtenidos en el pre-test y el pos-test, se presentarán algunas tablas con datos y porcentajes de respuestas, pero se hace especial énfasis en que el análisis es de tipo cualitativo.

En la siguiente gráfica se muestra la clasificación de las justificaciones formuladas por los estudiantes, según los resultados obtenidos en el pos-test:

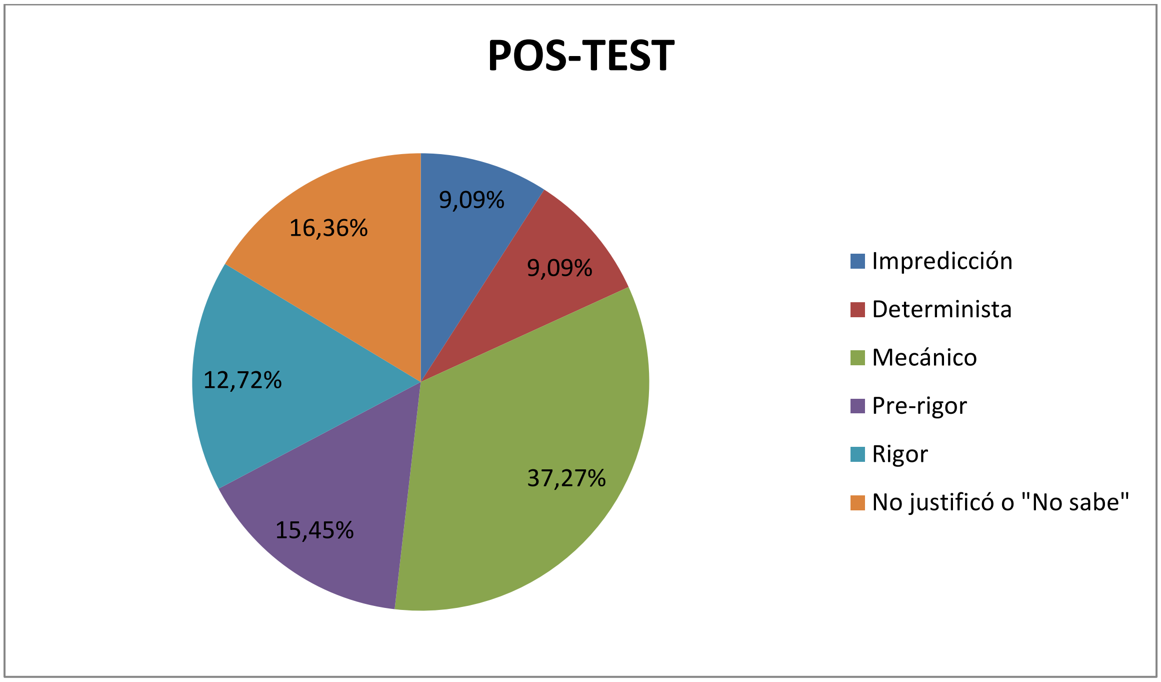


Gráfico 6. *Clasificación de las respuestas formuladas por los estudiantes en el pos-test en la escala del pensamiento probabilístico.*

Como se puede observar en el gráfico anterior, predomina el nivel Mecánico con un 37,27%, le siguen la opción "No sé" o No responde con un 16,36%, luego están el nivel de Pre-rigor con 15,45% y el nivel de Rigor con 12,72%. Finalmente los niveles de impredicción y determinista con 9,09% cada uno.

Es importante resaltar que entre los niveles de pre-rigor y rigor se alcanzó, conjuntamente, un 28,17 %, por lo que resulta satisfactorio observar un progreso significativo en los niveles superiores del razonamiento probabilístico.

Con el propósito de dar mayor claridad a este análisis cualitativo, se presenta a continuación la clasificación de cada una de las justificaciones (preguntas 1 a 5) dadas por los estudiantes, en los diferentes niveles de razonamiento probabilístico:

Tabla 6

Clasificación de las argumentaciones dadas por los estudiantes en el pos-test, según los niveles de razonamiento probabilístico.

No. de pregunta	**Niveles de razonamiento probabilístico-Pos-test**					
	Imprediccción	**Determinista**	**Mecánico**	**Pre-rigor**	**Rigor**	**“No sabe” o No justificó**
1		9,09%	40,90%	22,72%	18,18%	9,09%
2	22,72%	9,09%	36,36%	22,72%	4,54%	4,54%
3	22,72%	9,09%	36,36%	18,18%	9,09%	4,54%
4		18,18%	50%	13,63%	9,09%	9,09%
5			22,72%		22,72%	54,54%
Total	**9,09%**	**9,09%**	**37,27%**	**15,45%**	**12,72%**	**16,36%**

Es importante mencionar que en las preguntas 6 y 7, que son abiertas, se cuestiona explícitamente acerca de la creencia en la suerte, con el fin de confirmar si persiste esta creencia errónea en los estudiantes, es decir, un pensamiento determinista. Más adelante se retoman estas respuestas para contrastarlas con las obtenidas en el pre-test.

Con el ánimo de dar aun mayor claridad en el análisis, se presenta en la siguiente tabla un condensado de respuestas, por opción, de las primeras 6 preguntas del cuestionario. La respuesta correcta es la señalada con el sombreado en la casilla correspondiente:

Tabla 7

Condensado de respuestas obtenidas en el pos-test por opción.

POS-TEST						
No. pregunta	**Opciones de respuesta a cada pregunta**					
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Otro**
1	27,27%	68,18%	4,54%			-
2	31,81%	36,36%		31,81%		-
3	4,54%	27,27%	40,90%	22,72%	4,54%	-
4	22,72%	31,81%		45,45%		-
5	9,09%	22,72%	45,45%	13,63%	9,09%	-
6	13,63%	45,45%	13,63%			27,27%

Por lo que se puede observar, la pregunta 1 fue la que obtuvo el mayor porcentaje de respuestas acertadas y las justificaciones de dicha pregunta alcanzaron ya un 40,90% en el nivel Mecánico, lo que indica un leve fortalecimiento en el razonamiento probabilístico de los estudiantes.

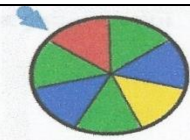
Es importante mencionar que en la pregunta 5, aunque se obtuvo un 45,45% de respuestas acertadas, en las justificaciones se obtuvo un altísimo porcentaje (54,54%) en la opción "No sabe" o No justificó, dado que la gran mayoría de los estudiantes no resolvió los algoritmos de división y multiplicación que permite llevar a cabo el proceso de tratamiento, es decir el paso de la escritura fraccionaria a la decimal y de ésta a la porcentual.

A continuación se presentan algunas evidencias del trabajo realizado por los estudiantes, de acuerdo con los diferentes niveles de razonamiento probabilístico en los que fueron ubicadas las respuestas:

- **Nivel de impredicción**

1. E15 responde la pregunta 2 de la siguiente forma:

2. Observa la ruleta y responde:



La probabilidad de que la flecha señale el color azul es:

A. La menor de las probabilidades ____
B. Menor que la probabilidad de sacar verde pero mayor que sacar rojo ____
C. La mayor de las probabilidades ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir X
E. No sé ____

Porque: es una roleta de azar y no se sabe que color va a salir.

En este caso se observa impredicción tanto en la opción marcada como en la justificación que da el estudiante, aunque tiene claro que se trata de una situación aleatoria. Vale la pena resaltar que en esta pregunta un 36,36% de las argumentaciones fueron ubicadas en el nivel mecánico, aunque aún un 22,72% se encuentran clasificados en el de impredicción.

2. Otro caso es el de E19, quien a pesar de haber elegido la opción correcta en la pregunta 3, muestra inseguridad en el resultado que se puede obtener, por lo tanto su justificación corresponde al nivel de impredicción:, al igual que algunos otros de sus compañeros (22,72%).

3. Al lanzar una moneda dos veces pueden caer dos caras IGUALES o dos caras DIFERENTES ¿Cuál de las dos combinaciones crees que ocurra con mayor probabilidad?

A. Caras IGUALES ____
B. Caras DIFERENTES ____
C. Los dos eventos son igualmente probables ____
D. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
E. No sé ____

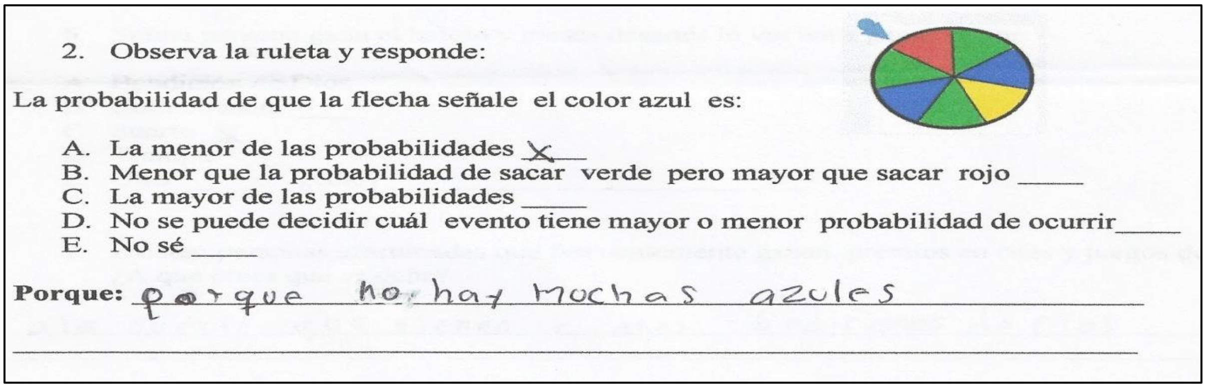
Porque: no se sabe que va a caer al lanza la moneda

En esta pregunta un 36,36% de los argumentos se encuentran clasificados en el nivel mecánico y un 18,18% en el de pre-rigor.

- **Nivel Determinista**

En este nivel se obtuvieron argumentos como los siguientes:

1. E20 responde en la pregunta 2 de la siguiente forma:



2. Observa la ruleta y responde:

La probabilidad de que la flecha señale el color azul es:

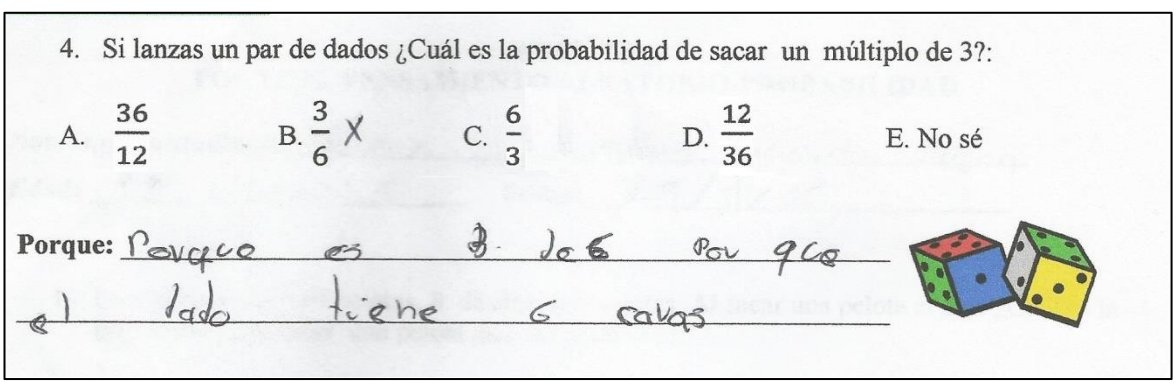
A. La menor de las probabilidades X
B. Menor que la probabilidad de sacar verde pero mayor que sacar rojo ____
C. La mayor de las probabilidades ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque: porque no hay muchas azules

Este argumento se considera determinístico físico dado que, solo hace referencia a la cantidad de espacios azules, no los compara con las cantidades de los demás colores y la cantidad total de divisiones que tiene la ruleta. Es decir que aún no identifica las nociones de casos favorables y casos posibles, ni logra la comparación de proporciones.

Cabe resaltar que en esta pregunta solo un 9,09% de las respuestas se ubicó en es este nivel determinista, mientras que el porcentaje más alto (36,36%) se ubicó en el nivel mecánico.

2. La pregunta 4, E2 la responde como se muestra a continuación:



4. Si lanzas un par de dados ¿Cuál es la probabilidad de sacar un múltiplo de 3?:

A. $\frac{36}{12}$ B. $\frac{3}{6}$ X C. $\frac{6}{3}$ D. $\frac{12}{36}$ E. No sé

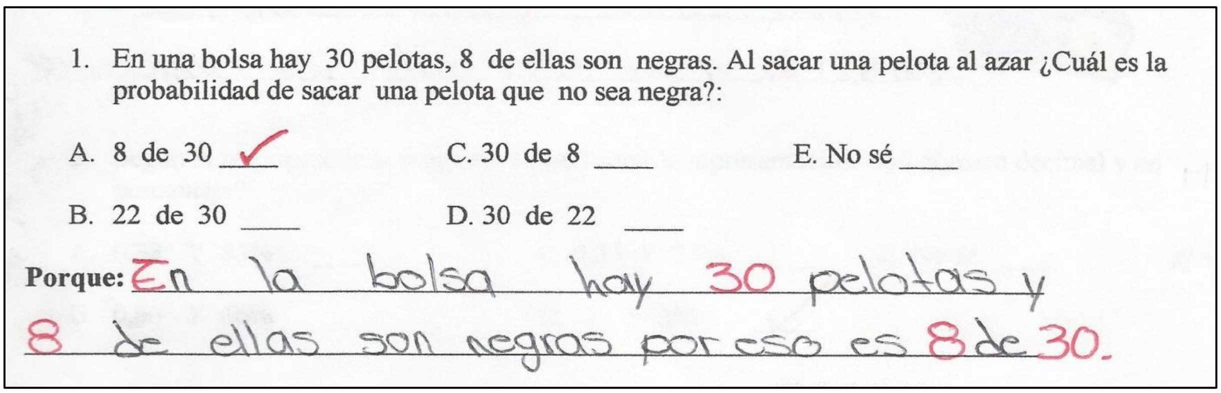
Porque: Porque es 3 de 6 por que el dado tiene 6 caras

Este argumento también se clasifica en el nivel determinista del tipo físico, puesto que, en este ejemplo, el estudiante solo tiene en cuenta las seis caras que tiene un dado. Aún no reconoce la fracción como representación de la probabilidad ni comprende la necesidad de determinar el espacio muestral de un evento dado. Además no tiene en cuenta el concepto de múltiplo. Un 18,18% de las justificaciones en la pregunta 4 se clasificaron en este nivel.

- **Nivel Mecánico:**

Otro de los niveles del razonamiento probabilístico es el mecánico, en el cual se clasificó el mayor porcentaje (37,27%) de argumentaciones dadas por los estudiantes en el pos-test, en este nivel se presentan las siguientes evidencias:

1. En la pregunta 1 el estudiante E1 responde así:



1. En una bolsa hay 30 pelotas, 8 de ellas son negras. Al sacar una pelota al azar ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota que no sea negra?:

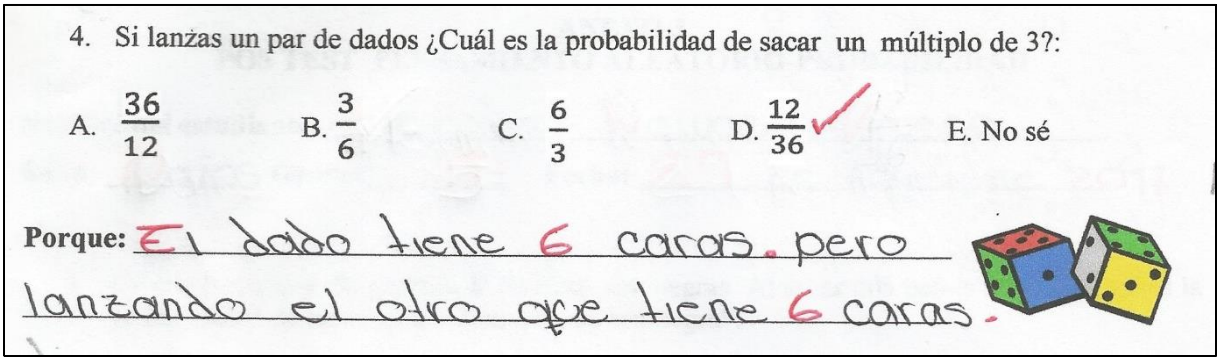
A. 8 de 30 ✓ C. 30 de 8 ____ E. No sé ____

B. 22 de 30 ____ D. 30 de 22 ____

Porque: En la bolsa hay 30 pelotas y 8 de ellas son negras por eso es 8 de 30.

Como se puede observar, el estudiante reconoce la expresión "8 de 30" como una forma de representar y de comunicar la probabilidad de ocurrencia de un evento, pero no comprende que se le pregunta por la probabilidad de sacar una pelota que NO sea negra, para lo que tendría que restar 8 a 30 para saber cuántas de las balotas son de un color diferente al negro. Es evidente que responde automáticamente.

2. El mismo estudiante E1 en la pregunta 4 responde así:



4. Si lanzas un par de dados ¿Cuál es la probabilidad de sacar un múltiplo de 3?:

A. $\frac{36}{12}$ B. $\frac{3}{6}$ C. $\frac{6}{3}$ D. $\frac{12}{36}$ E. No sé

Porque: El dado tiene 6 caras. pero lanzando el otro que tiene 6 caras.

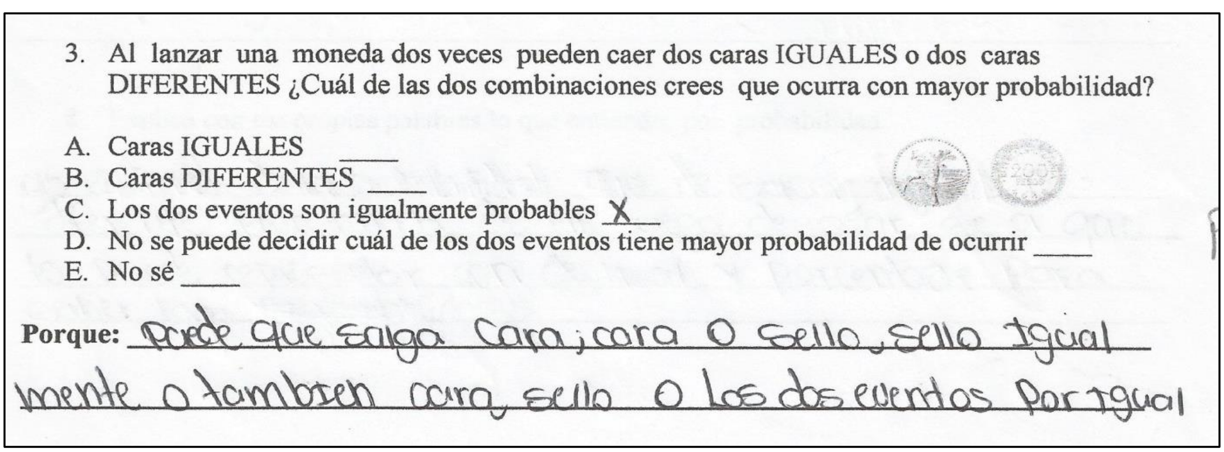
En este ejemplo el estudiante sabe que debe realizar una operación con la cantidad de caras (6) de los dos dados, pero la hace de forma equivocada. Para hallar el espacio muestral de este evento se debe multiplicar 6 x 6 o de forma gráfica, a través de un diagrama de árbol o de una tabla de doble entrada, pero el estudiante, al parecer, suma las dos caras 6 + 6. En este caso, tampoco se tiene en cuenta el concepto de múltiplo de 3.

Es importante mencionar que en esta pregunta un 50% de las argumentaciones se ubicaron en este nivel, seguido del nivel determinista con un 18,18%.

- **Nivel de Pre-rigor**

En este nivel se presentan los siguientes ejemplos de respuestas como evidencia:

1. El siguiente caso corresponde a E21, quien responde en la pregunta número 3 como se muestra a continuación:



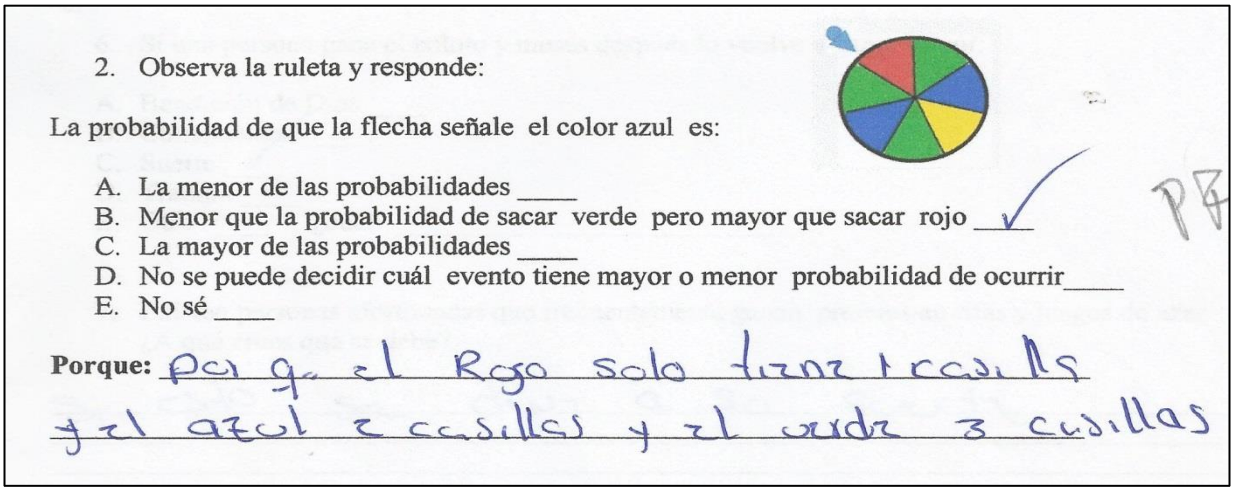
3. Al lanzar una moneda dos veces pueden caer dos caras IGUALES o dos caras DIFERENTES ¿Cuál de las dos combinaciones crees que ocurra con mayor probabilidad?

A. Caras IGUALES ____
B. Caras DIFERENTES ____
C. Los dos eventos son igualmente probables X
D. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
E. No sé ____

Porque: Puede que salga cara;cara o sello,sello Igual mente o tambien cara,sello o Los dos eventos Por Igual

Este tipo de respuesta se ubica en el nivel de pre-rigor ya que el estudiante, además de marcar la opción de respuesta correcta, ha desarrollado parcialmente la capacidad de encontrar los resultados posibles, pues menciona las dos caras iguales pero una sola cara diferente: CC, SS, CS. Aún no se evidencia apropiación de la representación gráfica (diagrama de árbol). En esta pregunta un 18,18% de las justificaciones se ubican en el nivel de pre-rigor.

2. Otro ejemplo de respuesta en el nivel de pre-rigor es el de E18 que se muestra a continuación:



2. Observa la ruleta y responde:

La probabilidad de que la flecha señale el color azul es:

A. La menor de las probabilidades ____
B. Menor que la probabilidad de sacar verde pero mayor que sacar rojo ✓
C. La mayor de las probabilidades ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

PR

Porque: Por q. el Rojo solo tiene 1 casilla y el azul 2 casillas y el verde 3 casillas

En este caso el estudiante en cuestión marca la opción correcta y compara los tres eventos teniendo en cuenta la cantidad de colores que hay de cada uno, pero aún no calcula las probabilidades teniendo en cuenta casos favorables y casos posibles o totales. En esta pregunta un 22,72% de las argumentaciones se ubican en el nivel de pre-rigor.

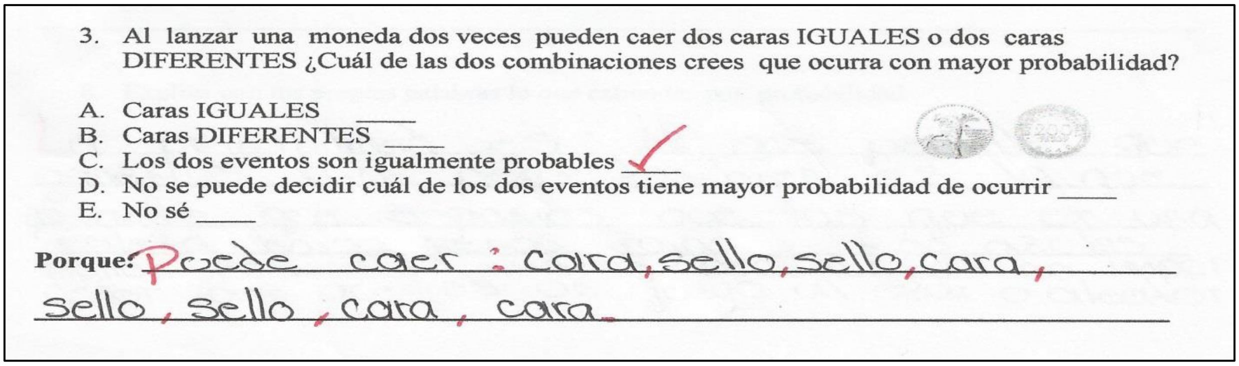
- **Nivel de Rigor**

Este es el nivel más alto en la escala de razonamiento probabilístico, en el cual se ubicaron argumentaciones como las que se muestran a continuación:

1. El estudiante E1 en la pregunta 3 marca la opción correcta, la C, y además al justificar encuentra todos los resultados posibles o el espacio muestral, para lo cual realizó el

respectivo diagrama de árbol al reverso de la hoja. Ya hay una identificación de eventos equiprobables o medianamente probables y su respectiva asociación con la representación numérica. Es importante destacar el papel que juega la representación en diferentes registros semióticos para una acertada resolución de problemas de tipo probabilístico.

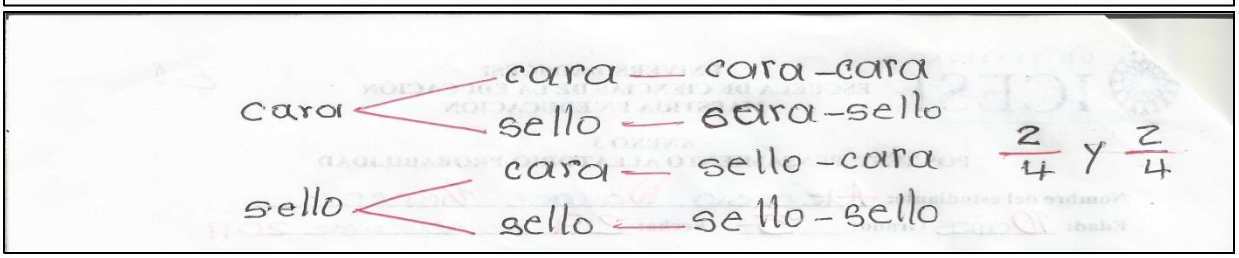
En esta pregunta, un 9,09%, correspondiente a 2 estudiantes, de las justificaciones se ubica en el nivel de rigor. A continuación se muestra la evidencia de este ejemplo:



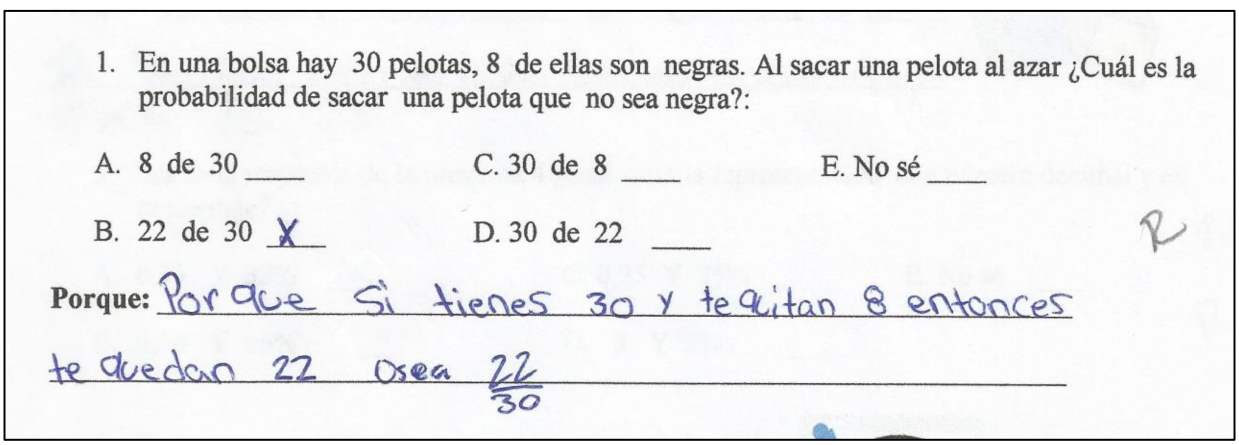
3. Al lanzar una moneda dos veces pueden caer dos caras IGUALES o dos caras DIFERENTES ¿Cuál de las dos combinaciones crees que ocurra con mayor probabilidad?

A. Caras IGUALES ____
B. Caras DIFERENTES ____
C. Los dos eventos son igualmente probables ✓
D. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
E. No sé ____

Porque: Puede caer: cara, sello, sello, cara, sello, sello, cara, cara.



2. Otro ejemplo de argumentaciones en el nivel de rigor, es el caso de E10:



1. En una bolsa hay 30 pelotas, 8 de ellas son negras. Al sacar una pelota al azar ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota que no sea negra?:

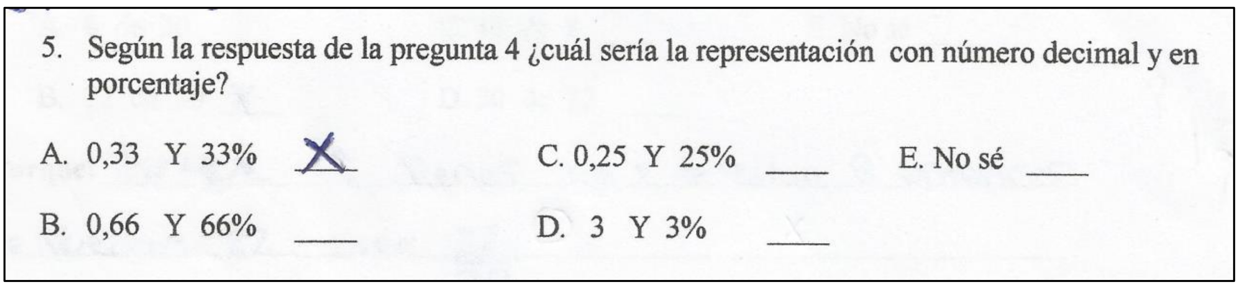
A. 8 de 30 ____ C. 30 de 8 ____ E. No sé ____

B. 22 de 30 X D. 30 de 22 ____ R

Porque: Porque si tienes 30 y te quitan 8 entonces te quedan 22 osea $\frac{22}{30}$

En este caso el estudiante comprende claramente que le preguntan por las pelotas que NO son negras y que para saberlo debía restar 8 a 30. Además relaciona la expresión oral "22 de 30" con la representación numérica $\frac{22}{30}$, es decir que lleva a cabo el proceso de conversión, pasa de un registro semiótico a otro. En este nivel se clasificaron el 18,18% de las justificaciones obtenidas en esta pregunta.

3. Un tercer ejemplo de justificaciones ubicadas en el nivel de rigor es el caso de E10, quien en la pregunta número 5, además de marcar la opción acertada, justifica su respuesta en el reverso de la hoja resolviendo correctamente las operaciones de división y multiplicación necesarias para la solución a esta pregunta. Veamos la evidencia:



5. Según la respuesta de la pregunta 4 ¿cuál sería la representación con número decimal y en porcentaje?

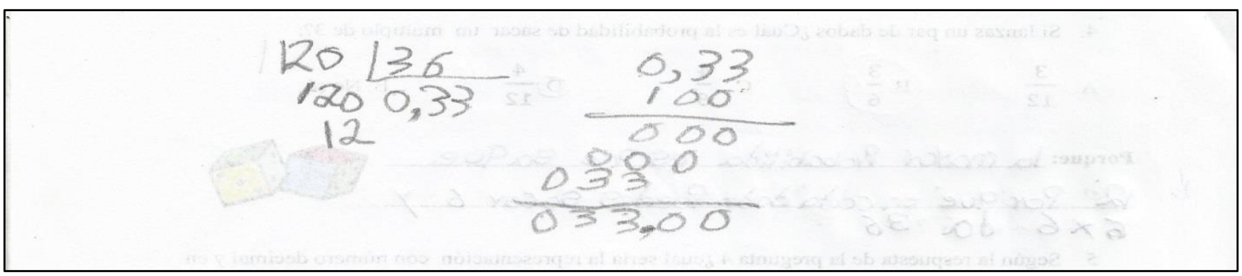
A. 0,33 Y 33% X

B. 0,66 Y 66% ____

C. 0,25 Y 25% ____

D. 3 Y 3% X

E. No sé ____



Como este caso, un 22,72% de las respuestas y justificaciones se clasificaron en el nivel de rigor. Otro 22,72% en el nivel mecánico, ya que marcaron la respuesta acertada y al justificarla tenían conocimiento de la necesidad de las operaciones de división y multiplicación pero no las resolvieron correctamente. Es importante mencionar que existe gran dificultad en el grupo para resolver divisiones y multiplicaciones de este tipo, pero se resalta también el fortalecimiento que tuvieron algunos estudiantes en este aprendizaje, gracias al trabajo cooperativo que se dio al interior de los diferentes equipos de juego y a las situaciones de validación en las que aquellos estudiantes con mejores desempeños en este aprendizaje socializaron sus respuestas.

Es igualmente importante mencionar que un alto porcentaje (54,54%) se ubicó en la opción "No sé" o No responde. En este ítem se ubicó a aquellos estudiantes que marcaron directamente la opción "No sé" pero también aquellos que eligieron una opción, correcta o incorrecta, y no justificaron con las operaciones de división y multiplicación.

En cuanto a las preguntas 6 y 7, que indagan por el sistema de creencias que influye en el pensamiento probabilístico de los estudiantes, se tiene que el mayor porcentaje de las respuestas fueron acertadas. Es decir, un 45,45% de los estudiantes atribuyen a las situaciones de azar hechos de coincidencia o casualidad y no de suerte.

Tabla 8.

Condensado de respuestas del pre-test por opción en la pregunta 6 del pos-test.

POS-TEST						
No. pregunta	**Opciones de respuesta a cada pregunta**					
	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**Otro**
6	13,63%	45,45%	13,63%			**6** 27,27%

Cabe mencionar que un 27,27 % de los estudiantes no elige la opción B, correspondiente a la coincidencia pero, elige la opción OTRO, argumentando que se trata de azar, aleatoriedad o probabilidad. A continuación se presentan algunas evidencias de las respuestas dadas en estas preguntas:

E5:

6. Si una persona gana el baloto y meses después lo vuelve a ganar es por:

A. Bendición de Dios ____
B. Coincidencia X
C. Suerte ____
D. Trampa ____
E. Otro ____ ¿cuál? coincidencia

7. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar ¿A qué crees que se debe?

Eso se debe a la azar porque uno no sabe si se va a ganar el premio o no lo va a ganar porque es al azar

E1:

6. Si una persona gana el baloto y meses después lo vuelve a ganar es por:

A. Bendición de Dios ____
B. Coincidencia ____
C. Suerte ____
D. Trampa ____
E. Otro ✓ ¿cuál? Azar o Aleatoreo

7. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar ¿A qué crees que se debe?

Pues para mi no es bendición de dios solo que las rifas y balotas es un juego de azar o aleatorio.

También se puede observar que en un 27,26% de los estudiantes aún persisten creencias erróneas con respecto a la probabilidad, atribuyendo la posibilidad de ganar a la suerte o a fuerzas superiores (Bendición de Dios), es decir que aún se encuentran en el nivel determinista de tipo mítico-mágico.

Con respecto a la pregunta 8, que indaga acerca de la concepción que se tiene de probabilidad:

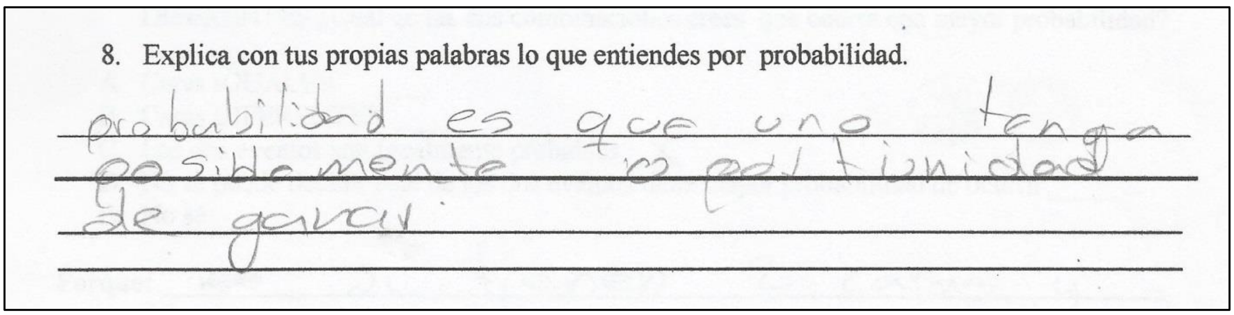
8. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

____

____

Se encuentra que el 100% de los estudiantes presenta gran dificultad para expresar con lógica y coherencia lo que entienden por probabilidad, aun después de la implementación de la secuencia didáctica. Algunos, en medio de sus incoherentes y confusas respuestas la definen a través de ejemplos de situaciones de azar (22,72%), otro porcentaje muy reducido (4,54%) la asocia con la suerte. Tan sólo un 22,72% de los estudiantes da una definición un poco acertada, pero aún incompleta de lo que es probabilidad. A continuación algunos ejemplos de este tipo de respuestas:

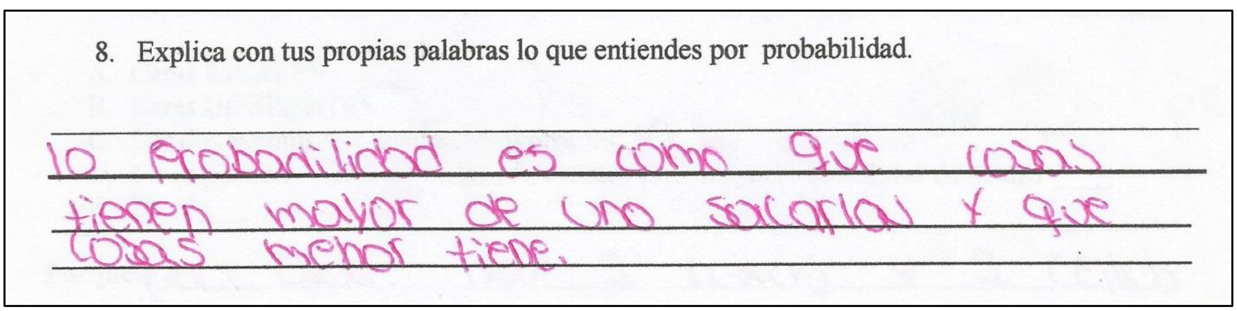
E14:



8. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

probabilidad es que uno tenga posibdamente o podtunidad de ganar

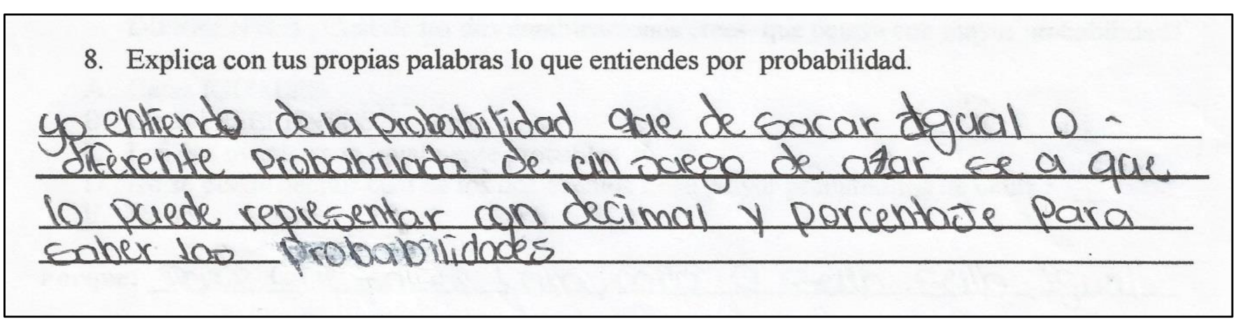
E9:



8. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

la probabilidad es como que cosas tienen mayor de uno sacarla y que cosas menor tiene.

E21:



8. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

yo entiendo de la probabilidad que de sacar igual o diferente probabilidad de un juego de azar se a que lo puede representar con decimal y porcentaje para saber las probabilidades

En las respuestas de E14 y E9 se percibe ya una idea de la probabilidad como la posibilidad de ocurrencia de un evento y de medición de dicha posibilidad. E21 ya incluye en su definición algunas características propias de la probabilidad como es la representación a través de números decimales y porcentajes.

Análisis comparativo entre el pre-test y el pos-test

Para evaluar el impacto de la Secuencia Didáctica en el aprendizaje de los estudiantes de grado 5º, se presenta a continuación un análisis comparativo entre la información obtenida en el pre-test y la que se obtuvo en el pos-test, lo que permite determinar el nivel de apropiación de las nociones de probabilidad así como el desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes.

En la siguiente gráfica se muestran los resultados globales correspondientes a la caracterización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes, tanto en el pre-test como en el pos-test.

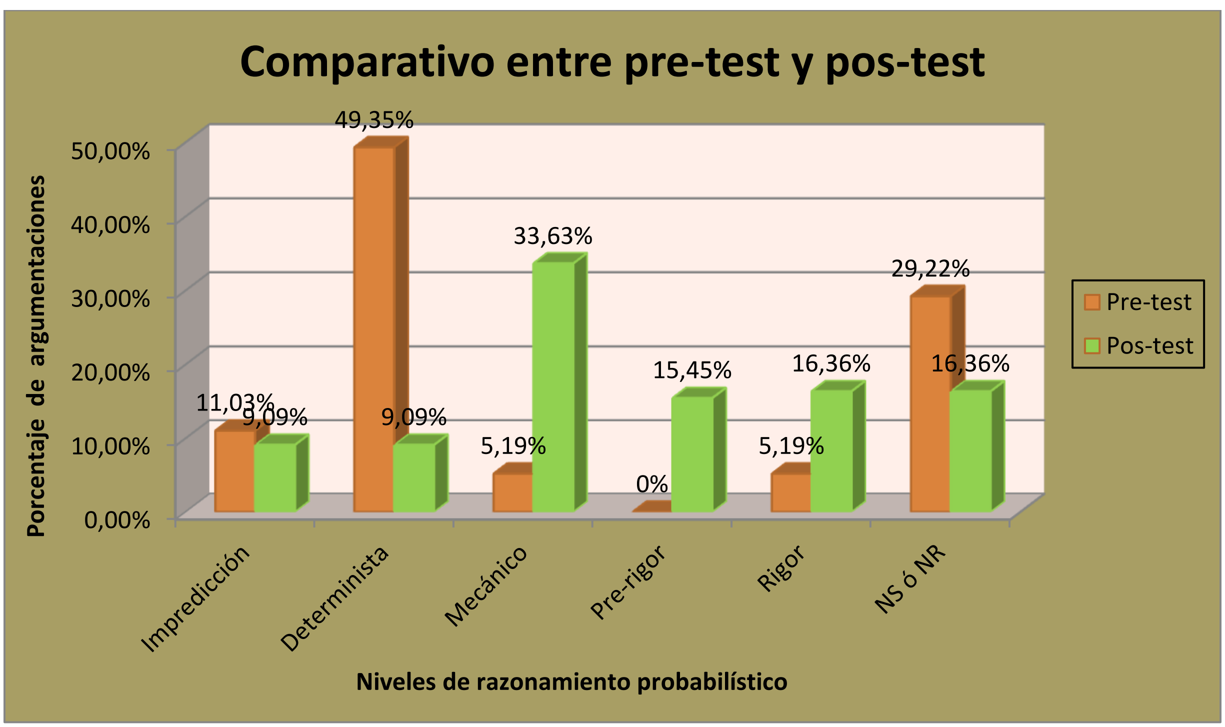


Gráfico 7. *Comparativo entre los resultados obtenidos en el pre-test y pos-test, con respecto a los niveles de pensamiento probabilístico*.

Tal como lo muestra la gráfica anterior, se presentaron avances muy importantes, entre los cuales se mencionan los siguientes:

- Disminuyen los porcentajes de respuestas en los niveles más bajos de razonamiento probabilístico: impredicción y determinista. Al igual que en la opción "No sabe" o no responde.
- Se incrementaron notablemente las argumentaciones en los niveles más altos del pensamiento probabilístico: mecánico, pre-rigor y rigor.

En el pre-test la mayoría de las respuestas y justificaciones de los estudiantes daban cuenta de la fuerte influencia de creencias erróneas adquiridas culturalmente (suerte, trampa, bendición de Dios o no se puede saber lo que sucederá) y del desconocimiento de términos y conceptos relacionados con la probabilidad; mientras que en el pos-test ya un alto porcentaje de estudiantes logra determinar el nivel de probabilidad de un evento, hacer uso de diagramas de árbol y tablas de doble entrada para resolver las situaciones planteadas, representar de diferentes formas en el registro numérico una probabilidad, y atribuir a los eventos aleatorios las características de coincidencia o casualidad.

En términos generales se puede afirmar que se registró un avance importante en la adquisición de las nociones básicas de probabilidad y en el desarrollo del pensamiento probabilístico, dado que en el pos-test ya se evidencia en los estudiantes un mayor uso de razonamiento y de lenguaje matemático para resolver las situaciones planteadas; lo que permite reafirmar que las actividades propuestas en la SD influyeron positivamente en el aprendizaje de la probabilidad de los estudiantes de grado 5º de la institución educativa San Antonio.

Capítulo V

Conclusiones

En el planteamiento inicial del presente trabajo de investigación se formularon unos objetivos que se tomaron como eje rector para el desarrollo de las actividades y el análisis de resultados que aquí se presentaron.

Inicialmente, se concluye que las actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento probabilístico deben partir siempre de un diagnóstico que permita identificar las dificultades y concepciones erróneas que tengan los estudiantes, cuyos resultados deben ser utilizados para el diseño de secuencias didácticas que lleven a la confrontación de ideas y el desequilibrio cognitivo que conlleva al aprendizaje.

A partir de los resultados arrojados por el pre-test y las argumentaciones que dieron los estudiantes de grado 5º de la IESA en la interacción en el aula, se concluye que existen en el grupo conocimientos muy básicos en el tema de la probabilidad, manejan muy pocos términos y conceptos al respecto. Presentan dificultad para realizar cálculo de probabilidades simples y para representarlas a través de diferentes sistemas semióticos; desconocen completamente los diagramas de árbol y las tablas de doble entrada como representaciones gráfica y tabular que facilitan la resolución de situaciones probabilísticas. En un alto porcentaje atribuyen a las situaciones de azar causas deterministas de tipo mítico-religioso.

Una vez implementada la SD y realizado el respectivo análisis de los resultados obtenidos en la misma, se puede concluir que la implementación de una secuencia didáctica fundamentada en el juego tuvo un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes, por cuanto permitió que los juegos aleatorios, que se plantearon al inicio de cada guía de aprendizaje, se convirtieran en dispositivos de motivación y emoción que captaron la atención de los chicos y propiciaron el interés en la solución de actividades para el aprendizaje, así como también el desarrollo de nuevos conocimientos y destrezas en torno al objeto matemático en cuestión. A partir de los diferentes juegos comprendieron, poco a poco, que si era posible determinar la posibilidad de ocurrencia de un evento aleatorio y que dicha posibilidad depende de la relación entre el número de casos posibles y el número de casos favorables, mas no de factores físicos (ubicación, tamaño, color) de los objetos.

Como lo expresa Vargas (2015):

> Al jugar para aprender sin duda alguna ubica al individuo en un verdadero momento de aprehendizaje; porque la diversión conjugada con la comprensión, interrelaciona los elementos presentes en ese ejercicio de percepción de manera que lo captado por los sentidos adquiere significado real y en esencia aplicación; (…)

La SD comprende una serie de situaciones que permitieron el desarrollo de las competencias matemáticas de resolución de problemas, comunicación, argumentación y representación. La resolución de problemas no fue una actividad aislada ni se limitó al plano individual, en este caso particular, a partir del juego en equipos, planteado al inicio de cada guía de aprendizaje los estudiantes interactuaron por vía oral lo que contribuyó al fortalecimiento de la comunicación, incorporando cada vez más términos y símbolos propios del lenguaje matemático. También fue fundamental, en la dinámica de la clase, permitirle al estudiante socializar las actividades desarrolladas, pues este ejercicio les proporcionó la oportunidad de comunicar en forma oral y escrita sus estrategias de solución y resultados obtenidos, además de argumentar sus procedimientos.

Finalmente, se puede afirmar que los estudiantes potenciaron la competencia representar en tanto que en algunas de las situaciones planteadas realizaron actividades de pensamiento que requirieron el uso de signos o gráficos para expresar probabilidades, es decir que llevaron a cabo el proceso de codificación; realizaron también actividades de análisis e interpretación para determinar una información expresada en códigos, es decir proceso de decodificación; y realizaron actividades de transformación de la probabilidad representándola de una forma diferente al interior de un mismo sistema de representación (tratamiento) o para representarla en otro sistema semiótico diferente (conversión).

Ahora bien, los resultados del pos test permitieron confirmar el efecto positivo de la implementación de la SD, pues en las diferentes respuestas y argumentaciones ya se perciben aprendizajes más desarrollados, a través del uso de términos y conceptos propios de la probabilidad, identificación y uso de diferentes sistemas de representación en la solución de situaciones estocásticas, cálculo de probabilidades simples, mayor porcentaje de respuestas atribuyendo a las situaciones de azar el carácter de coincidencia y casualidad.

Recomendaciones

A partir de los resultados y análisis realizados en este trabajo de investigación, se deriva una serie de recomendaciones importantes a tener en cuenta para la enseñanza de la probabilidad, entre las cuales se mencionan:

- El profesor debe descubrir, a través de un diagnóstico adecuado, las creencias erróneas que aprehende culturalmente el estudiante y que orientan su pensamiento probabilístico. Luego, a partir de dicho diagnóstico planear las acciones didácticas y pedagógicas pertinentes que favorezcan el desarrollo del pensamiento probabilístico.

- Se sugiere la implementación de secuencias didácticas con situaciones problema que involucren el juego, para el caso de este objeto matemático, juegos aleatorios; en donde se manipulen dados, perinolas, ruletas, cartas de póker, entre otros, que faciliten la resolución de las mismas.
- Implementar una metodología fundamentada en el desarrollo de los diferentes tipos de situaciones didácticas, tal como se propone en el presente trabajo, pues en las dinámicas de clase se permite el trabajo individual, en equipo, la socialización de ideas y la institucionalización de la actividad.
- Partiendo del hecho que existen diversas representaciones para expresar la probabilidad, potenciar las acciones cognitivas de tratamiento y conversión, lo cual permitirá un sólido aprendizaje del concepto de probabilidad.
- Se sugiere la transformación de las prácticas de aula, en donde el estudiante sea partícipe activo de su propio aprendizaje, a través del juego dirigido, la manipulación de material concreto, de la resolución de problemas de tipo estocástico y del trabajo cooperativo.
- Se sugiere implementar el uso de las TIC´S en el aprendizaje de la probabilidad, pues existen programas que permiten la simulación de fenómenos aleatorios por medio de ordenadores y un acercamiento lúdico a la resolución de problemas de probabilidad.
- Finalmente se recomienda implementar en otros grados de la básica primaria las actividades que en este trabajo de investigación se proponen, con el fin de indagar sobre los resultados que se podrían obtener.

Referencias

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1983). Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo, 2°. México, Editorial TRILLAS.

Batanero, C., Godino, J, y Navarro, Pelayo. (1994). Razonamiento Combinatorio. Madrid. Síntesis.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? Universidad de Granada.

Batanero, C., Ortiz, J. J. y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. UNO, 44, 7-16. Recuperado de: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/uNOiNVESTIGACION.pdf

Bishop, A. J. (2005). Aproximación cultural a la Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali. Colombia.

Brousseau, Guy. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993)

Brousseau, Guy. (2007). Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas (1ª ed.). Argentina: Libros del Zorzal

Carretero, Mario (1997). Constructivismo y educación. México: Editorial Progreso.

Colombia avanzó en pruebas Pisa, pero sigue lejos de los mejores. (2016, Diciembre 6). *El Tiempo*. Recuperado de: http://www.eltiempo.com/vida/educacion/resultado-de-colombia-en-las-pruebas-pisa-2016-43510

Colombia se raja otra vez en educación. (2016, Octubre 2). *Revista Semana*. Recuperado de: http://www.semana.com/educacion/articulo/colombia-quedo-entre-los-diez-paises-con-peor-resultado-en-las-pruebas-pisa-2012/460104

D˙Amore, Bruno. (2005). Bases Filosóficas, Pedagógicas, Epistemológicas y Conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México: Reveerté ediciones.

D˙Amore, B., Godino, J. Fandiño, M. (2008). *Competencias y Matemática.* Bogotá, Colombia: Magisterio.

Duval, R. (2004). Semiósis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales. Universidad del Valle, Colombia.

Díaz-Barriga, Ángel. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional Autónoma de México.

García P, Rubén (2014). Probabilidad imposible. La naturaleza estocástica de la estadística y la probabilidad. Madrid. Recuperado de: http://probabilidadimposible.blogspot.com.co/2013/04/la-naturaleza-estocastica-de-la.html.

García, B., Coronado, A. y Giraldo, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas.* Florencia: Universidad de la Amazonia.

Godino J. D. (2003). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Universidad de Granada. Recuperado de: http://www7.uc.cl/sw_educ/educacion/grecia/plano/html/pdfs/linea_investigacion/Otros_IOT/IOT_067.pdf.

Lenis M, José Darwin (2017). Didácticas Colaborativas: Una práctica transformadora de la enseñanza en la escuela. *Revista Magisterio. Educación y Pedagogía, Colombia, 84,* 36-41.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá-Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Serie Lineamientos curriculares matemáticas. Bogotá-Colombia.

Monereo, C. (2000). El asesoramiento en el ámbito de las estrategias de aprendizaje. En: Estrategias de aprendizaje. España, Visor, pp. 15-62.

Moreira, M. A, (1997). Aprendizaje significativo: Un concepto subyacente. En: Moreira, M.A., Caballero, M.C. y Rodríguez, M.L. (orgs.) (1997). Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos, España. pp. 19-44. Traducción de Mª Luz Rodríguez Palmero.

OCDE. (2006). PISA. Marco de la evaluación. *Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Santillana Educación S. L. España.

Pérez Gómez, A. (2007). *La naturaleza de las competencias básicas y sus aplicaciones pedagógicas*. Cuadernos de Educación de Cantabria.

Perrenoud, Ph. (1999) Construir las Competencias desde la Escuela, Porto Alegre,
Artmed Editora.

Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En, L. Rico y D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Madrid: Síntesis.

Rico, L., y Lupiañez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Rivas S., A. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, Coahuila-México.

Sadovsky, Patricia. (2015). La Teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. Tomado de: https://www.fing.edu.uy/grupos/nifcc/material/2015/teoria_situaciones.pdf

Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia. (2007). Módulo 5. Pensamiento Aleatorio y Sistemas de Datos. Serie Didáctica de las Matemáticas. Medellín-Colombia.

Solar, Horacio. (2009). Competencias de modelización y argumentación en interpretación de gráfica funcionales: propuesta de un modelo de competencia aplicado a un estudio de caso. (Tesis doctoral inédita). Universitat Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Tobón, S., Pimienta, J.H. y García, J. A. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de competencias*. México: Pearson Educación. 216 p.

Tortolero de Banda, Elia M. (2008). Universidad Nacional Abierta. Naguanagua (Venezuela)

Vargas C., Cristhian J. (2015). El juego en el aprendizaje. Recuperado de Revista Vinculando: http://vinculando.org/educacion/juego-en-aprendizaje.html

Vigotsky, Lev S. (1979). “El desarrollo de los procesos psíquicos superiores” Edit. Crítica, Barcelona.

Zambrano L., Armando. (2007). Ciencias de la educación, psico-pedagogía y didáctica: Paradigma, conceptos y objeto. *Revistas Saber-ULA, Venezuela, 2, 71-95*

Anexos

Anexo 1: Pre-test pensamiento aleatorio-probabilidad

Nombre del estudiante: ____

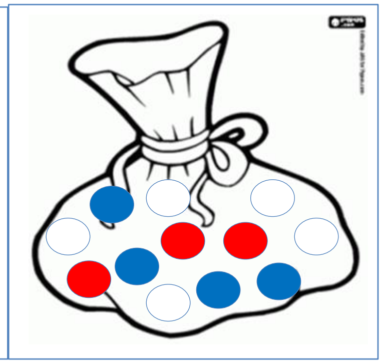
Edad: _________ Grado: _________ Fecha: ________________________________

La siguiente encuesta es parte de un proyecto de investigación. El objetivo es contar con un diagnóstico del conocimiento que de la probabilidad tienen los estudiantes y del nivel de razonamiento probabilístico en el que se encuentran. Debes tener en cuenta las siguientes sugerencias para contestar:

1. Lee detenidamente cada pregunta.
2. Una vez comprendida la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
3. Encontrarás unas líneas para que expliques detalladamente tu respuesta. Si necesitas hacer alguna operación escríbela a un lado de la pregunta.
4. En caso de que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
5. Contesta esta encuesta con lapicero.

Contesta las preguntas 1, 2 y 3 con base en la siguiente información:

Se requiere escoger dos colores para el uniforme de un equipo de fútbol. Para ello se introdujeron en una bolsa las balotas con los 3 colores preferidos por cada integrante.



1. La probabilidad de que uno de los dos colores sea azul es:

A. La misma de que sea rojo____
B. Es mayor a que sea blanco____
C. Inferior a que sea blanco____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque:

____

____

____

2. La probabilidad de que uno de los colores sea rojo es:

A. 12 de 3 ____ C. 12 de 12 ____ E. No sé ____

B. 3 de 3 ____ D. 3 de 12 ____

Porque: ____

____

____

3. La probabilidad de extraer una balota blanca es:

A. La menor de las probabilidades ____
B. Menor que la probabilidad de sacar una azul pero mayor que sacar una roja ____
C. La mayor de las probabilidades ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque: ____

____

____

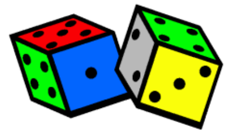
4. Si juegas con un amigo a lanzar 4 monedas en serie ¿Cuál de las siguientes combinaciones de CARA (C) y SELLO (S) esperas que ocurra con mayor probabilidad?

A. 3C - 1S ____
B. 2C - 2 S ____
C. Los dos eventos son igualmente probables ____
D. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
E. No sé ____

Porque:
____

____

5. Si lanzamos un par de dados y sumamos los puntos resultantes ¿qué es más probable?:



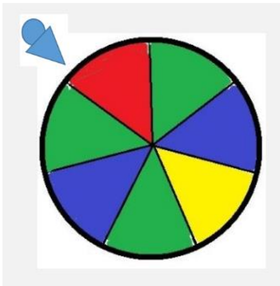
A. Obtener una suma igual a 4 puntos ____
B. Obtener una suma igual a 5 puntos ____
C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables ____
D. No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir____
E. No sé ____

Porque: ____

____

____

Observa la ruleta y responde:



6. Si tuvieras que elegir un color para ganarte un premio ¿Cuál elegirías? _______________

¿Por qué? ____

7. Andrés va a la tienda a comprar una deliciosa bebida y observa los siguientes yogures en la nevera:

Le pide a la dueña de la tienda que saque con los ojos cerrados un yogurt. La probabilidad de que la dueña saque un yogurt de fresa es:

A. 2 ____   B. $\frac{7}{7}$ ____   C. 7____   D. $\frac{2}{7}$ ____   E. No sé ____

Porque: ____

____

____

8. ¿Cómo representarías con número decimal y en porcentaje la respuesta de la pregunta anterior?

A. 0,28 y 28% ____   C. 2,7 y 27% ____

B. 3,5 y 35% ____   D. No sé ____

9. Si una persona gana el baloto y meses después lo vuelve a ganar es por:

A. Bendición de Dios ____
B. Coincidencia ____
C. Suerte ____
D. Trampa ____
E. Otro ____ ¿cuál? ________________________

10. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar ¿A qué crees que se debe?

____
____
____
____
____

11. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

____
____
____
____
____

Anexo 2 - Secuencia Didáctica

ÁREA: MATEMÁTICAS **GRADO:** 5º

PENSAMIENTO: ALEATORIO Y SISTEMA DE DATOS

OBJETO MATEMÁTICO: PROBABILIDAD

DURACIÓN: 2 SEMANAS **No. SESIONES PREVISTAS:** 4 sesiones de 2 horas

NOMBRE DE LA SECUENCIA: "JUGANDO Y APRENDIENDO EN EL MUNDO DE LAS PROBABILIDADES"

ESTÁNDARES:

-Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

-Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

-Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. (Pensamiento numérico)

-Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes. (Pensamiento numérico)

COMPETENCIAS/PROCESOS:

-Planteamiento y resolución

-Razonamiento

-Comunicación

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE-DBA

12. Predice la posibilidad de ocurrencia de un evento simple a partir de la relación entre los elementos del espacio muestral y los elementos del evento definido.

-Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas.

Evidencias de Aprendizaje:

-Reconoce situaciones aleatorias en contextos cotidianos**.**

-Enumera todos los posibles resultados de un experimento aleatorio simple.

-Identifica y enumera los resultados favorables de ocurrencia de un evento simple.

-Anticipa la ocurrencia de un evento simple.

GUÍA DE APRENDIZAJE 1

SEMANA: 1	SESIÓN: 1	TIEMPO: 2 horas

PROPOSITO: Que el estudiante:

-Diferencie los eventos aleatorios de los no aleatorios.

-Comprenda conceptos propios del azar y la probabilidad.

DESEMPEÑOS ESPERADOS:

-Identifica eventos aleatorios y les da la interpretación adecuada.

-Reconoce los diferentes juegos y situaciones de su entorno que son de azar.

-Se expresa correctamente a la hora de estimar la probabilidad de un suceso.

APERTURA:

Con el fin de abrir el clima de aprendizaje y de explorar los saberes previos de los estudiantes, se plantea la siguiente actividad:

1. Se organizarán grupos de 4 estudiantes. **(5 minutos)**
2. Cada grupo tomará al azar una pregunta que debe ser leída, analizada y respondida con argumentos según sus conocimientos o ideas. Para ello tendrán **5 minutos**.

Las preguntas serán:

A. ¿Se puede determinar que mañana será un día soleado?
B. ¿Se puede conocer cuántos años tenía Simón Bolívar cuando murió?
C. ¿Es posible saber de qué humor estará el profesor o profesora hoy?
D. ¿Es posible saber cuánto me devolverán en la tienda si compro con $2000 un paquete de galletas que me cuesta $1300?
E. ¿Podemos conocer el número de estudiantes que faltará a clases mañana?
F. ¿Se puede determinar la probabilidad de ganarse una rifa?

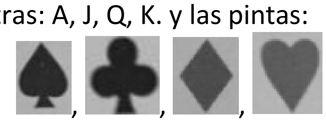
3. Pasados los 5 minutos, un integrante de cada grupo socializará la pregunta y la respuesta dada. Argumentando. (**10 minutos**)
4. La profesora tomará apuntes en el tablero de aquellas ideas y términos claves mencionados por los estudiantes en la socialización.

DESARROLLO:

SITUACIÓN DE ACCIÓN: Juego de póker (Azar) y Triqui (certeza)

Los estudiantes continuarán en los grupos de trabajo que se organizaron en la actividad de apertura, con máximo 4 participantes por grupo. A cada grupo se le proponen dos juegos que jugarán en parejas: uno de azar "cartas de Poker" y otro de certeza "Triqui". Cada pareja jugará 10 veces seguidas el mismo juego y anotarán el ganador en cada una de ellas. (**10 minutos**)

Para el juego de las "Cartas de poker", estas solo constan de 16 cartas de la baraja con las letras: A, J, Q, K. y las pintas:



Se juega con un compañero 10 veces.

La instrucción es la siguiente:
a) Se mezclan las cartas y se acomodan en un montón.
b) Se acuerda en el grupo la pinta y/o la letra que se espera obtener.
c) Por turnos, cada jugador toma una carta del montón, hasta obtener la que se acordó anteriormente.
d) Gana quien obtenga la carta propuesta.
e) Se registra el ganador de cada partida en una tabla.

Para el juego de "Triqui", se entrega una hoja en blanco y se dibujan 10 tableros como la siguiente:

Se juega con un compañero 10 veces.
La instrucción es la siguiente:
a) Cada jugador escoge un símbolo: X ó O.
b) Deciden quien inicia el juego.
c) Cada jugador, alternadamente, dibuja su símbolo en el tablero, intentando hacer una línea de tres símbolos consecutivos o de bloquear el juego del oponente.
d) Ganará el primer jugador en dibujar tres de sus símbolos de forma consecutiva formando una línea horizontal, vertical o diagonal.
e) También es posible que no gane ninguno de los dos jugadores.

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

Al interior de cada grupo los estudiantes identificarán las diferencias entre uno y otro juego.
A través de preguntas orientadoras, los estudiantes lograrán acercarse a las características propias de un evento aleatorio y uno no aleatorio. (**5 minutos**)

Para el juego de las cartas de póker, se analiza el tipo de resultados obtenido a la luz de las siguientes preguntas: - ¿En cada ronda del juego se obtienen siempre los mismos resultados? ¿Por qué? - ¿Se puede saber cuál será el resultado en cada ronda? - ¿Es posible crear una estrategia para ganar? - ¿Se puede saber qué probabilidad se tiene de sacar una J o un trébol? - ¿Es un juego aleatorio? ¿Por qué?	Luego de que cada pareja desarrolla el juego, se analiza el tipo de resultados obtenidos a la luz de las siguientes preguntas: - ¿En cada ronda del juego se obtienen siempre los mismos resultados? ¿Por qué? - ¿Qué factores afectan los resultados del juego? - ¿Si se repite el juego un número grande de veces, se pueden obtener resultados similares a los de la primera ronda? - ¿Es un juego aleatorio? ¿Por qué?

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

Cada grupo escoge un representante y socializa las ideas de sus compañeros con todos los grupos. Confrontan sus respuestas y resultados, argumentando e intentando persuadir a sus pares de la veracidad de sus ideas.

CIERRE:

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Con la proyección de la micro-lección "La fiesta de Riqui con juegos aleatorios" https://www.youtube.com/watch?v=STCPV6jjPGw&list=PLC9bK8zjS6-IdRuG1xsaoZYlVibn-6p_B&index=17 (**7 minutos**), se ponen en común los elementos que se han trabajado en esta actividad y se clasifican las preguntas de la actividad de apertura en situaciones aleatorias y situaciones no aleatorias. (**5 minutos**)

- A través de la construcción de un mapa mental, la docente refuerza al final todos los conceptos trabajado durante la sesión de clase.

GUÍA DE APRENDIZAJE 2

SEMANA: 1	SESIÓN: 2	TIEMPO: 2 horas

PROPOSITO: Que el estudiante:

-Comprenda conceptos propios del azar y la probabilidad.

-Reconozca sucesos equiprobables.

DESEMPEÑOS ESPERADOS:

-Determina la probabilidad de ocurrencia de ciertos eventos.

-Identifica eventos equiprobables.

-Participa en el desarrollo de actividades de razonamiento probabilístico apoyando a sus compañeros y respetando sus puntos de vista.

APERTURA:

Se propone a los estudiantes observar el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=vunDtx095mE APRENDIENDO PROBABIIDADES (8 minutos)

-Seguidamente se realizará una lluvia de ideas con los conceptos mencionados en el video y que están estrechamente relacionados con la probabilidad. **(10 minutos)**

DESARROLLO:

SITUACIÓN DE ACCIÓN: Juego "Iguales-Diferentes"

• 2 personas: Durante el juego, un jugador se llamará "Igual" y el otro "Diferente".

• Material: - 2 cubos azules y 2 cubos color naranja

- 1 bolsa de papel o negra

Cómo se juega:

1. Introduzca los cubos en la bolsa.
2. Decidan quién será "Igual" y quién "Diferente"
3. Por turnos, cada jugador sacará un cubo de la bolsa de papel y lo pondrá en la mesa.

4. Si los cubos son del mismo color, "Igual" gana un punto. Si los cubos son de colores distintos, "Diferente" gana un punto. Escriban el resultado en una tabla como la siguiente:

SORTEO / JUGADOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Igual												
Diferente												

5. Los jugadores vuelven a meter los cubos en la bolsa y juegan nuevamente.
6. El ganador será el que tenga más puntos después de 12 turnos.

¡A JUGAR!

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

Una vez terminados los 12 juegos, analicen el juego y la tabla y respondan:

a. ¿Cuál jugador tuvo más puntos? ____________________
b. ¿Por qué creen que obtuvieron ese resultado? __________________________________

____

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el evento "igual"? __________________________
   ¿Por qué? ____
d. ¿Cuál será la probabilidad de obtener el evento "diferente"? _____________________
   ¿Por qué? ____

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

-Representen el suceso a través de un Diagrama de árbol o una tabla y lo socializan con sus compañeros:

-¿Cuántos resultados posibles se podían obtener? ______________________________

-¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Igual"? ______________________________ -

¿Cuántas probabilidades se tenía de sacar "Diferente"? _________________________

Justificar las respuestas y convencer a sus compañeros de que son las correctas.

CIERRE:

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN

A partir de lo que producen los estudiantes, la docente concluye que:

-El Espacio Muestral del suceso ser Igual o Diferente es: E = {**AA, NN, AN, NA**}

-El número de casos totales es: __**4**___

-El número de casos favorables para el evento ser “Igual” es: _**2**_ por lo tanto la probabilidad de salir “igual” es: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

-El número de casos favorables para el evento ser “Diferente” es: __**2**__, por lo tanto la probabilidad de salir “Diferente” es: $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Es decir que los dos sucesos son **Equiprobables.**

- A través del juego Tingo, tingo, tango se hacen preguntas acerca de lo trabajado en clase.

GUÍA DE APRENDIZAJE 3

SEMANA: 2	SESIÓN: 3	TIEMPO: 2 horas

PROPOSITO: Que el estudiante represente la probabilidad de eventos en diferentes registros semióticos y pase de un registro a otro.

DESEMPEÑOS ESPERADOS:

- Reconoce que el juego de la ruleta corresponde a una situación aleatoria.

- Identifica los diferentes eventos en la escala de probabilidades.

-Determina la probabilidad de ocurrencia de cada evento y da argumentos.

-Participa en el desarrollo de actividades de razonamiento probabilístico apoyando a sus compañeros y respetando sus puntos de vista.

APERTURA:

-Se forman grupos de tres estudiantes.

-Cada grupo construirá una ruleta, para lo cual se le entregará una hoja de instrucciones y el respectivo material (serán 7 ruletas diferentes)-ANEXO INSTRUCCIONES

-La docente rotará por todos los grupos observando el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la actividad y aclarando dudas.

RULETA No. 7

La ruleta es un juego de azar que consiste en hacer girar la rueda y determinar, cuando pare, a qué color, figura, número o letra marca la flecha.

Necesitarás:

- Un círculo de cartón paja o cartulina
- Una flechita para indicar el color que cae al hacer girar la ruleta o la pirinola.
- Una varita o lápiz para sostener la ruleta

Cómo se hace:

-Divide la superficie del círculo en 8 partes iguales.

-Colorea teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Dos partes no seguidas de color rojo.
- Una parte de color azul
- Dos partes no seguidas de color verde.
- Tres partes de color anaranjado

Nos debemos asegurar que nos quede bien balanceada para que no afecte los resultados.

Ejemplo de la guía para la construcción de las ruletas

DESARROLLO:

SITUACIÓN DE ACCIÓN: Juego "Tu color de la suerte"

-Una vez construidas las ruletas, se jugará con la ruleta No. 6.

-Se formarán dos grupos: uno de niñas y otro de niños.

-Cada grupo escogerá un color para ganar un premio.

-Pasa un integrante de cada equipo para hacer girar la ruleta, si cae el color de su equipo obtendrá un punto, pero si cae el color del equipo contrario el punto será para ellos. Si cae el color que ninguno de los equipos eligió el punto será para la profesora.

-Jugarán 10 veces y se registran los puntos en la siguiente tabla que se dibujará en el tablero:

GIROS / COLOR	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

A partir del juego anterior, analicen y respondan las siguientes preguntas:

1. ¿Qué equipo (color) obtuvo más puntos? ______________________________
2. ¿Qué equipo (color) obtuvo menos puntos? ______________________________
3. ¿Por qué creen que obtuvieron estos resultados? ______________________
   ____
   ____
4. ¿Alguno de los colores tenía mayor probabilidad de salir? ________________
   ¿Cuál? ____
   ¿Por qué? ____
5. ¿Alguno de los colores tenía menor probabilidad de salir? ________________
   ¿Cuál? ____
   ¿Por qué? ____
6. Obtener el color amarillo era:

Imposible___ Poco probable___ Medianamente probable ___ Muy probable ___ Seguro__

7. ¿Cuál es el número total de posibilidades que tiene la ruleta? ____________________
8. ¿Cuál es el número de casos favorables? ______________________________________
9. ¿Cómo se representa esta probabilidad con un número fraccionario, un decimal y en porcentaje? ____
10. ¿Cómo se lee? ____

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

Cada equipo retoma la ruleta que construyó y analiza las posibilidades de eventos que se pueden dar y las representa a través de diferentes registros, para lo cual diligenciarán una tabla como la siguiente:

RULETA No	*EVENTO*	*TIPO DE EVENTO*	*REPRESENTACIÓN*			
			VERBAL	*RAZON*	*DECIMAL*	*PORCENTAJE*
1	*Caer en color azul*					
1	*Caer en color verde*					

CIERRE:

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Finalmente, cada equipo socializa uno de los eventos que le correspondió de acuerdo con la ruleta construida y se condensa la información en la siguiente tabla:

RULETA No	EVENTO	TIPO DE EVENTO	REPRESENTACIÓN			
			VERBAL	RAZON	DECIMAL	PORCENTAJE

La docente concluye explicando algunos conceptos y el paso de una representación a otra, es decir las operaciones de conversión y tratamiento.

GUÍA DE APRENDIZAJE 4

SEMANA: 2	SESIÓN: 4	TIEMPO: 2 horas

PROPOSITO: Que el estudiante determine la posibilidad de ocurrencia de un evento y lo represente a través de diferentes registros semióticos.

DESEMPEÑOS ESPERADOS:

-Identifica el número total de casos posibles y el número de casos favorables para que ocurra un evento.

-Comprende y aplica la regla de Laplace para establecer probabilidad de ocurrencia de un evento.

-Representa de diferentes formas o en diferentes registros una probabilidad.

APERTURA:

La profesora tiene en una bolsa 9 pelotas de ping-pong con los siguientes colores: 4 anaranjadas, 2 azules y 3 verdes. Ella va a rifar un regalo entre Gabriela, Alejandro y Alison sacando, sin mirar, una pelota de la bolsa.

Para ganarse el regalo Gabriela debe sacar una pelota anaranjada, Alison gana si saca una pelota azul y Alejandro si saca una pelota verde.

Preguntas antes de sacar las bolas:

1. ¿Esta rifa es justa? ¿Por qué?
2. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar? ¿Por qué?
3. ¿Quién tiene menor probabilidad de ganar? ¿Por qué?
4. ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada uno de ganarse la rifa?

Cada estudiante procede a sacar una pelota.

Una vez se sabe quién es el ganador, se vuelven a introducir las pelotas en la bolsa y la profesora dice: Ahora voy a sacar una pelota de la bolsa, si sale una cuyo color comience con la letra A me quedo con el premio, pero si saco una pelota de un color que comience con otra letra lo entrego al ganador.

5. ¿Cuál es la probabilidad de la profesora de quedarse con el regalo?
6. ¿Cuál es la probabilidad de que la profesora tenga que entregar el regalo?
7. ¿Cuál es mayor: la probabilidad de la profesora de quedarse con el regalo o de tener que entregarlo?

La profesora procede a sacar la pelota.

DESARROLLO:

SITUACIÓN DE ACCIÓN: Juego "Carrera de Velocidad"

CARRERA DE VELOCIDAD

Para llevar a cabo este maravilloso juego necesitas:

-Dos dados cuyos lados estén numerados así: 1, 2, 2, 2, 3, 3 (Debes construirlo-Anexo 1)

-Un Tablero de juego (IMAGEN 1-Anexo 2)

-Una ficha de parqués de un color diferente por cada jugador.

¿CÓMO JUGAR?

-Formar grupos de 6 jugadores. Cada jugador tendrá una ficha de parqués de un color diferente.

-Cada jugador, llamado atleta, ubicará su ficha en el tablero en una casilla marcada con uno de los siguientes números: 2, 3, 4, 5, 6 o 7. Todos los atletas arrancarán en la línea de salida.

-Cada atleta tendrá su turno para lanzar los dados. Si al lanzarlos, la suma de los valores de cada dado coincide con el número de casilla que escogió, tendrá derecho a avanzar una casilla para llegar a la meta.

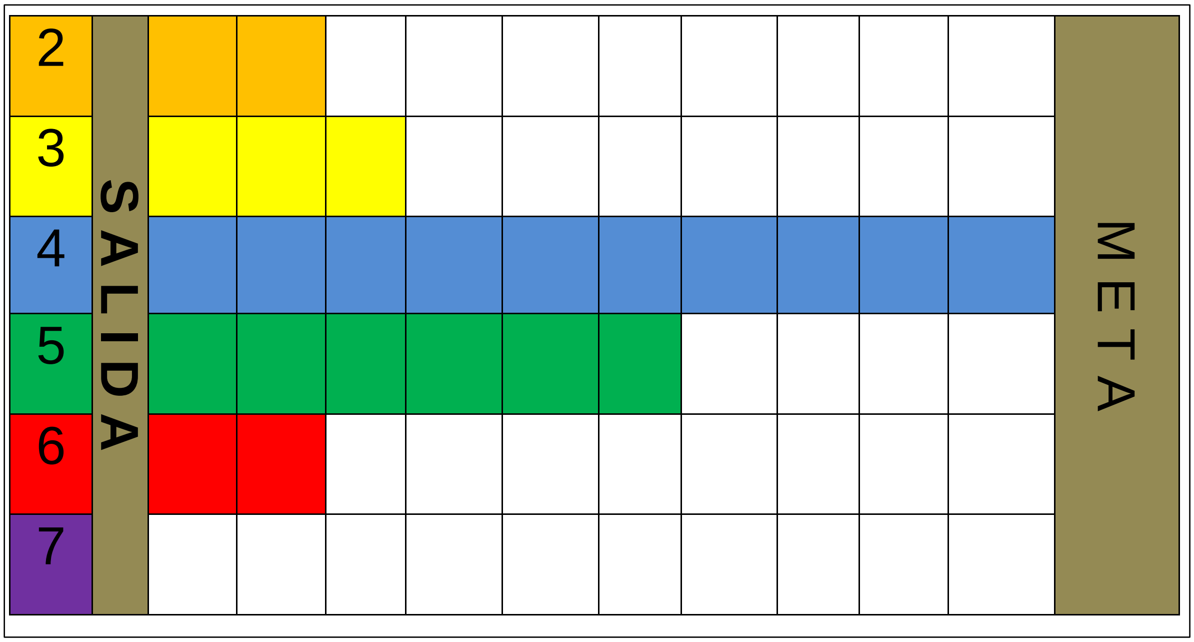
-Si al lanzar los dados, la suma de los valores de cada dado coincide con el número de casilla de otro jugador, este tendrá derecho de avanzar una casilla para llegar a la meta.

-Ganará el corredor que primero llegue a la meta.

¿NO OBTUVISTE LA MEDALLA DE ORO? NO TE PREOCUPES, JUEGA DE NUEVO, TAL VEZ TE VAYA MEJOR.

-Cada equipo jugará tres veces, teniendo en cuenta en cada juego quienes avanzaron más y quienes menos.
-En el último juego (tercero) cada jugador coloreará en el tablero el camino recorrido por cada uno.

TABLERO DE JUEGO



-Al finalizar los tres juegos, cada equipo llenará la siguiente tabla (con los datos de la última carrera):

CARRERA DE VELOCIDAD	
♯ del Atleta	♯ casillas que avanzó
2	
3	
4	
5	
6	
7	

SITUACIÓN DE FORMULACIÓN

-Cada equipo expondrá su tablero de juego en el tablero del salón. En una marcha silenciosa observarán y harán un análisis del resultado final de la carrera de todos los grupos.

-En equipo responderán las siguientes preguntas, sustentando cada respuesta dada:

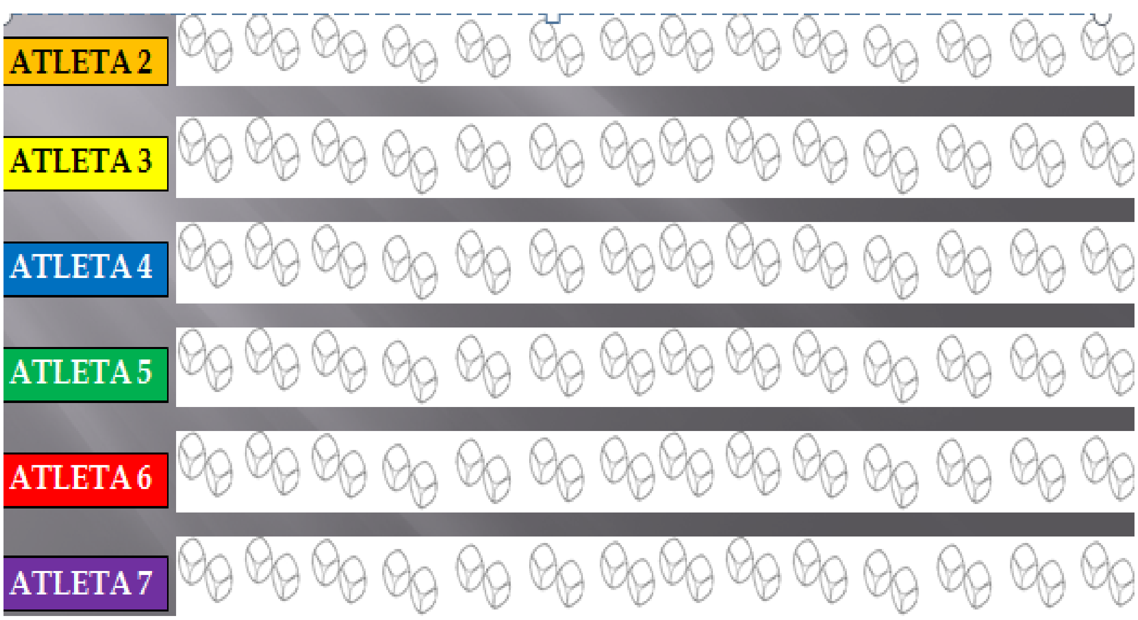
1. ¿Cuál o cuáles fueron los atletas que más avanzaron?
2. ¿Cuál o cuáles fueron los que menos avanzaron?
3. ¿Cuál o cuáles atletas no avanzaron ni siquiera una casilla en el juego?
4. Según como respondieron en el punto anterior y los tableros que observaron de los otros grupos ¿podrías afirmar que hay atletas más veloces que otros? Sustenta tu respuesta.
5. ¿A su juicio hay algún atleta que tenga algún problema? Sustenta tu respuesta
6. ¿A qué atleta le apostarías si no estuvieras jugando? Sustenta tu respuesta.
7. ¿Considera el grupo, que existen atletas que tienen más posibilidades o probabilidad de ganar que otros? Intenten sustentar su respuesta.
8. ¿Es posible calcular las posibilidades de que alguno de los atletas gane la carrera?
9. ¿Qué es probabilidad?

-En cada equipo se elige un relator quien será el encargado de exponer y socializar al resto del grupo las respuestas y análisis realizado por su equipo.

SITUACIÓN DE VALIDACIÓN

Cada estudiante desarrollará las siguientes actividades:

1. ¿Cuáles son las opciones (CASOS FAVORABLES) que tiene cada atleta para avanzar al caer los dados? Dibuja los puntos en los dados.



2. Teniendo en cuenta el ejercicio 1, completa las siguientes oraciones haciendo uso de alguna de estas expresiones: IMPOSIBLE, POCO POSIBLE, MEDIANAMENTE POSIBLE, MUY POSIBLE, SEGURO.

-Es _________________________ que el Atleta 2 gane.

-Es _________________________ que el Atleta 4 gane.

-Es _________________________ que el Atleta 7 gane.

-Es _________________________ que el Atleta 3 gane.

-Es _________________________ que el Atleta 6 gane.

-Es _________________________ que el Atleta 5 gane.

3. Teniendo en cuenta el ejercicio 1, responde las siguientes preguntas:

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 2?_______

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 3?_______

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 4?_______

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 5?_______

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 6?______

-¿Cuántas opciones o CASOS FAVORABLES tenía el Atleta 7?_______

-¿Cuántos CASOS POSIBLES hay en total? _________

4. Tomando los datos del ejercicio 3, determina la probabilidad de que ganara cada Atleta:

Probabilidad de que gane el ATLETA No.:	Representación como RAZÓN	Representación con DECIMAL	Representación con PORCENTAJE
	Casos favorables/Casos posibles	Dividir casos favorables entre casos posibles	Multiplicar por 100
2	1/30	0.03	3.33%
3			
4			
5			
6			
7			

CIERRE:

SITUACIÓN DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Una vez desarrolladas y socializadas todas las actividades, la docente concluye construyendo con los estudiantes la definición de probabilidad:

La **Probabilidad** es la relación entre el **número de casos favorables** para que ocurra un evento y el **total de casos posibles**. Se expresa por medio de una **fracción o razón**.
Esto se conoce como la regla de Laplace: $P(A) = \dfrac{\sharp \text{ de CASOS FAVORABLES}}{\sharp \text{ de CASOS POSIBLES}}$

La **probabilidad** se puede representar a través de:
-Lenguaje verbal: **“poco probable”, “muy probable”, “imposible”, “seguro”, “dos de cuatro”, etc.**
-Lenguaje numérico: **Número fraccionario, decimal y en porcentaje.**
-Esquemas gráficos: **Escala de probabilidades, diagrama de árbol, tablas de doble entrada.**

Anexo 3: Pos-test pensamiento aleatorio-probabilidad

Nombre del estudiante: ____

Edad: ________ Grado: ________ Fecha: ___________________________

12. En una bolsa hay 30 pelotas, 8 de ellas son negras. Al sacar una pelota al azar ¿Cuál es la probabilidad de sacar una pelota que no sea negra?:

C. 8 de 30 ____ C. 30 de 8 ____ E. No sé ____

D. 22 de 30 ____ D. 30 de 22 ____

Porque: ____

____

13. Observa la ruleta y responde:

La probabilidad de que la flecha señale el color azul es:

F. La menor de las probabilidades ____
G. Menor que la probabilidad de sacar verde pero mayor que sacar rojo ____
H. La mayor de las probabilidades ____
I. No se puede decidir cuál evento tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir____
J. No sé ____

Porque: ____

____

14. Al lanzar una moneda dos veces pueden caer dos caras IGUALES o dos caras DIFERENTES ¿Cuál de las dos combinaciones crees que ocurra con mayor probabilidad?

F. Caras IGUALES ____
G. Caras DIFERENTES ____
H. Los dos eventos son igualmente probables ____
I. No se puede decidir cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir ____
J. No sé ____

Porque:

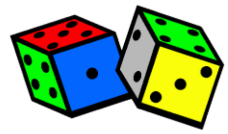
____

____

15. Si lanzas un par de dados ¿Cuál es la probabilidad de sacar un múltiplo de 3?:

F. $\frac{36}{12}$ B. $\frac{3}{6}$ C. $\frac{6}{3}$ D. $\frac{12}{36}$ E. No sé

Porque: ____
____



16. Según la respuesta de la pregunta 4 ¿cuál sería la representación con número decimal y en porcentaje?

A. 0,5 Y 50% ____ C. 0,33 Y 33% ____ E. No sé ____

B. 3 Y 300% ____ D. 2 Y 200% ____

17. Si una persona gana el baloto y meses después lo vuelve a ganar es por:

F. Bendición de Dios ____
G. Coincidencia ____
H. Suerte ____
I. Trampa ____
J. Otro ____ ¿cuál? ____________________________

18. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar ¿A qué crees que se debe?

____
____
____

19. Explica con tus propias palabras lo que entiendes por probabilidad.

____
____
____