ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

UN ESTUDIO SOBRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ISOMETRÍAS DEL PLANO CON LA MEDIACIÓN TECNOLÓGICA DE GEOGEBRA

LUIS FERNANDO AZCÁRATE MESA

Asesor
Dr. David Benitez Mojica

SANTIAGO DE CALI, 2019

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

UN ESTUDIO SOBRE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ISOMETRÍAS DEL PLANO CON LA MEDIACIÓN TECNOLÓGICA DE GEOGEBRA

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN

LUIS FERNANDO AZCÁRATE MESA

Asesor
Dr. David Benitez Mojica

SANTIAGO DE CALI, 2019

NOTA DE ACEPTACIÓN

Firma del director

Firma del jurado

Santiago de Cali, diciembre de 2019

DEDICATORIA

A Dios.
A mi madre, Leonilde.
A mi esposa, Paula Andrea.
A mis hijos, Felipe y Martin.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

En el presente trabajo de profundización se presenta el proceso de diseño, implementación y análisis de un de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las isometrías en el plano, basado en la estrategia de solución de problemas y con la mediación tecnológica del software GeoGebra.

El enfoque de la investigación es de tipo mixto. Los resultados se analizan cualitativamente, teniendo como referentes la teoría sobre estrategias de solución de problemas planteado por Shoenfeld. El análisis cuantitativo se realiza a través de pruebas estadísticas que comparan los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica con los de la prueba de salida y el desempeño de los estudiantes en las tres hojas de trabajo analizadas.

Se encontró que la intervención de aula generó avances significativos en el aprendizaje de las isometrías del plano, lo cual se manifiesta en una notable mejoría en el desempeño académico de los estudiantes que participaron del proceso.

Palabras clave: Solución de Problemas, GeoGebra, Isometrías del plano, Geometría, Heurísticas, Estrategias de Control, Sistema de Creencias.

SUMMARY

In this study, I aim to present a research work of fuller consideration of the process of design, implementation and analysis of a process of teaching and learning of isometrics in the plane, based on the problem-solving strategy and the technological mediation of GeoGebra software.

The research approach is eclectic. The results are analyzed qualitatively, based on the theory of problem-solving strategies posed by Polya and Schoenfeld. The quantitative analysis is performed through statistical tests that compare the results obtained in the diagnostic test with those of the end-of-term test and the performance of the students in worksheets.

It was found that intervention in the classroom generated significant progress in the learning of plane isometrics, which results in a remarkable improvement in the academic performance of the students who participated in the process.

Keywords: Problem Solving, GeoGebra, Plane Isometries, Geometry, Heuristics, Control Strategies, Assumptions System.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo presentaremos una experiencia didáctica relacionada con el uso del Software GeoGebra para la enseñanza de las isometrías del plano en un ambiente de resolución de problemas.

La investigación fue desarrollada con los estudiantes de las carreras de Diseño Industrial y Diseño de Medios Interactivos matriculados el curso de Matemáticas para el Diseño ofrecido por el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Icesi, ubicada en la cuidad se Santiago de Cali, Colombia.

Como profesor del curso de Matemáticas para el Diseño por más de diez años, he enfrentado grandes retos que van desde el poco interés de los estudiantes por el estudio de las matemáticas, hasta la supuesta falta de habilidades que manifiestan tener para comprender y resolver problemas matemáticos.

También es común encontrarse con creencias y concepciones personales frente a una supuesta falta de aplicabilidad de los contenidos estudiados en el curso a sus carreras de diseño. Lo anterior, sumado al hecho de que la mayoría de los estudiantes que toman el curso tienen grandes habilidades para el dibujo, la diagramación y el uso de medios computacionales, hace que semestre tras semestre el reto de motivarlos al estudio de las matemáticas requiera la implementación de cambios de tipo pedagógico, didáctico, y por supuesto, también metodológicos.

Motivado frente a estos retos y siendo consecuente con el modelo de aprendizaje activo que orienta los procesos de enseñanza y aprendizaje en la Universidad Icesi, para el segundo semestre del año 2018 realicé una implementación de aula orientada a la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías del plano. La intención de esta implementación era mejorar mis prácticas de aula y enfrentar a los estudiantes a situaciones que les permitieran acceder al conocimiento de forma significativa y siendo los actores principales de su proceso de aprendizaje.

A continuación, se presenta una visión general del informe final del trabajo de grado en la que se realizar una descripción de cada uno de los cinco capítulos que lo conforman.

En el primer capítulo se define el problema de investigación y se realiza la contextualización y la justificación de las razones por la que se decide hacer la intervención de aula. Además, se define y se acota el tema objeto de estudio a través de la formulación de la pregunta de investigación, las preguntas auxiliares y los objetivos general y específicos, tomando como referentes los resultados de cancelación y reprobación históricos que se han presentado en el curso.

En el segundo capítulo, se presentan los referentes teóricos que sirven de base para el presente trabajo de grado. Estos referentes aluden aspectos como la resolución de problemas desde la propuesta de Alan Shoenfeld, la mediación instrumental de tecnologías digitales en Educación Matemática y el uso de GeoGebra, el uso de múltiples representaciones, desde el punto de vista de Duval (1995), y las isometrías en el plano. Estos referentes conforman el marco teórico que constituyen la base para el análisis e interpretación de los resultados obtenidos en las pruebas diagnóstica y de salida, así como de las producciones escritas de los estudiantes que resultaron del diligenciamiento de las hojas de trabajo en las cuales consignaban los resultados de sus exploraciones de las cajas negras.

En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico, y se explica cada fase que conforma el proceso de investigación y las herramientas que fueron diseñadas para poder llevar a cabo la implementación. De manera general se puede decir que el proceso consiste de las etapas de diseño, de validación, de implementación y recolección de datos y finalmente la etapa de análisis. Igualmente se hace una descripción de los sujetos los participantes de la investigación y el lugar en el que ésta se desarrolló.

En el cuarto capítulo se realiza el análisis de los datos recolectados por medio de la prueba diagnóstica, la prueba de salida y las hojas de trabajo. El análisis de estos datos se realizó mediante un enfoque mixto: Análisis Cualitativo y Análisis Cuantitativo. Para ello fue necesario procesar y clasificar la información en Excel, elaborar criterios de calificación, construir tablas y gráficas en las que se organizó la información recogida. De las hojas de trabajo se hace un análisis tanto cuantitativo como cualitativo.

Finalmente, en el quinto capítulo se da respuesta a las preguntas de investigación que se definieron en el primer capítulo y que se encargaron de orientar la implementación y el desarrollo de las actividades de aula hacia el cumplimiento de los objetivos. De las respuestas a estas preguntas, se realizan una serie de sugerencias para trabajos posteriores y también se presentan reflexiones sobre el trabajo realizado.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. CONTEXTUALIZACIÓN

El problema planteado en este trabajo de profundización trata sobre la implementación de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las isometrías del plano, bajo el enfoque de la solución de problemas y con el uso de GeoGebra. La investigación se desarrolla en el marco del curso de *matemáticas para el diseño*.

Actualmente el curso de Matemáticas para el Diseño se ofrece para los programas académicos de Diseño Industrial y Diseño de Medios Interactivos, adscritos a la Facultad de Ingeniería de la Universidad Icesi, y hace parte de la línea de *experticia matemática*.

Históricamente, este curso ha tenido altos índices de reprobación y cancelación, generando retrasos considerables en el cubrimiento de las diferentes líneas de formación que contempla la malla curricular de estos programas académicos.

Según datos suministrados por la división de Registro Académico de la Universidad Icesi, para el semestre 2009-2, el curso reportó un 39% de cancelaciones, mientras que para el periodo académico 2016-2 el porcentaje de cancelaciones fue del 19%. (ver figura 1).

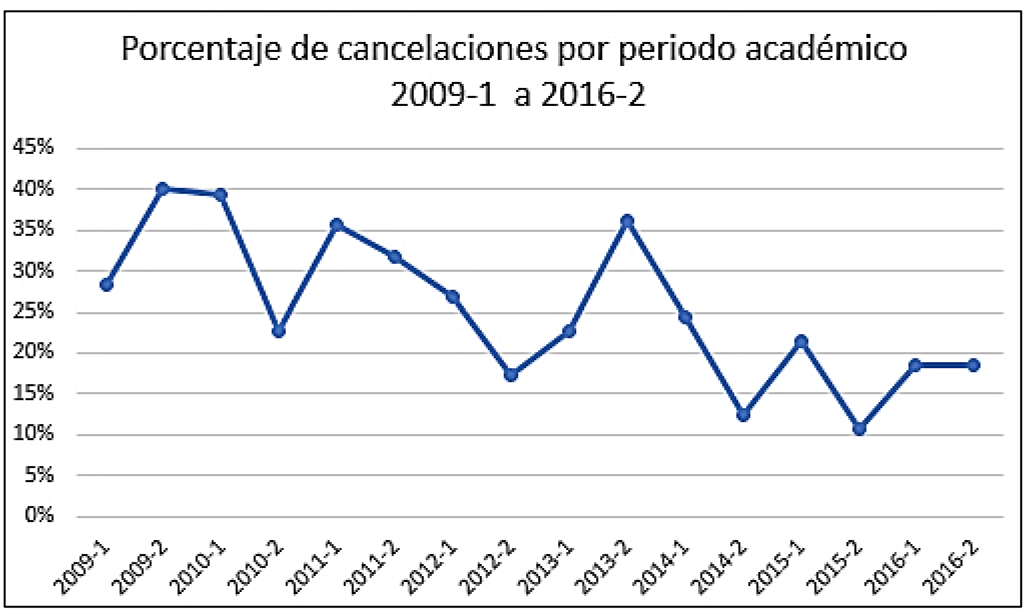


Fig. 1.

Para los mismos dos periodos académicos, los porcentajes de pérdida del curso reportados fueron del 54% y del 17%, respectivamente.

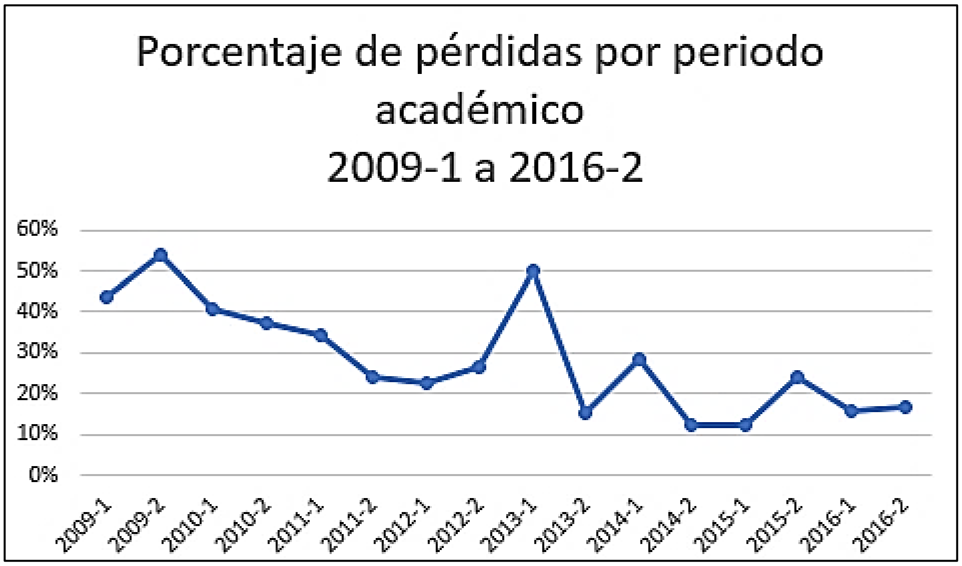


Fig. 2.

Ante este panorama académico tan complejo y los continuos pedidos por parte de los directores de programa de revisar lo que estaba sucediendo con el curso, decido revisar mis prácticas docentes y buscar estrategias que me permitieran impactar de manera positiva tanto la formación académica de los estudiantes como los índices de aprobación y cancelación del curso.

Es así como a partir del segundo periodo académico del año 2016 decido implementar cambios en la forma de presentar algunos los conceptos matemáticos que se estudian en el curso. Para esa época comienzo a participar de los talleres de formación ofrecidos por el *Instituto GeoGebra Cali* y reconozco el potencial que posee el software GeoGebra como herramienta didáctica que facilita el acercamiento de los estudiantes a las nociones de isometrías del plano y de simetrías de polígonos.

El trabajo se inicia mostrando algunas de las características y bondades del programa. Lo uso para ejemplificar temas como las líneas y puntos notables en el triángulo, propiedades de las isometrías, el concepto de simetría de polígonos regulares y su uso en el diseño de teselados. Muy pronto comienzo a darme cuenta del cambio de percepción de los estudiantes frente a las dinámicas de clase y al curso mismo. Se muestran más interesados y motivados por el estudio de los conceptos y comienzo a notar una ligera disminución de los índices de pérdida y cancelación del curso. A partir de ese momento decido que valdría la pena repensar formalmente las estrategias didácticas y metodológicas y comenzar a organizar y a sistematizar esta experiencia del uso de la mediación computacional en el curso de matemáticas para el diseño.

1.2. ANTECEDENTES

Para el año 2003, la malla curricular del programa de DI consideraba los cursos de *álgebra y funciones*, en primer semestre, y *cálculo de una variable*, en segundo semestre, como los cursos de componente matemática que debían tomar los estudiantes matriculados en el programa académico de DI, presentándose altos índices de reprobación y cancelaciones.

Para ese año el Departamento de Matemáticas y Estadística, bajo la jefatura del profesor Alfonso Bustamante Arias, se propone analizar el alcance y la pertinencia del curso de cálculo de una variable para los estudiantes de DI.

El estudio estuvo a cargo del profesor Hendel Yaker y su análisis se centró, tanto en el contenido del curso, como en los objetivos propuestos y las necesidades demandadas por el programa de DI. Este estudio mostró, en primer lugar, que los contenidos propuestos – que eran los mismos para las carreras de ingeniería y economía- excedían las necesidades de formación matemática de los estudiantes del programa de DI y, en segundo lugar, resultaba insuficiente con relación a algunas nociones de carácter geométrico tales como construcciones geométricas con regla y compás, transformaciones en el plano, transformaciones lineales, matrices y simetría de polígonos, que tampoco eran abordados en el curso de álgebra y funciones.

Con la idea de corregir estas dificultades se propone el diseño curricular del curso de *Matemáticas para el Diseño* como reemplazo del curso de cálculo de una variable. La propuesta fue liderada por el profesor Hendel Yaker, quién en compañía de la profesora María Eugenia Martínez, no sólo diseñan el curso, sino que también escriben las notas de clase para el curso.

Este nuevo curso se implementa, por primera vez, en el año 2003 para la carrera de Diseño Industrial y a partir del año 2005 comienza a hacer parte de la malla curricular del programa académico de Diseño de Medios Interactivos.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Desde su creación, en el año 2003, el curso de Matemáticas para el Diseño ha sufrido muy pocos cambios en lo que se refiere a sus contenidos disciplinares, al planteamiento de sus objetivos generales y específicos, a la propuesta metodológica y, por supuesto, a los procesos de evaluación.

Uno de los aspectos que más preocupa es la pertinencia de los contenidos del curso y su contribución a la formación de los futuros profesionales del diseño, no sólo en términos de contenidos disciplinares, sino también en el desarrollo de competencias y habilidades, de tal manera que puedan enfrentar, eficientemente, los retos que les imponen en la actualidad la sociedad y la industria.

Ante esta y otras situaciones propias de los procesos de acreditación de alta calidad, los programas de diseño industrial y diseño de medios interactivos llevaron a cabo reformas curriculares con el ánimo de responder a los estándares de calidad de la educación propuestos tanto por el Ministerio de

Educación Nacional como por la propia universidad Icesi en su PEI y su modelo de aprendizaje activo.

Estas reformas curriculares se fundamentaron en tres grandes aspectos: la antigüedad de más de diez años de los currículos que se venían implementando, la necesidad de incorporar desarrollos teóricos y tecnológicos que han reorientado los objetos de estudio de dichos programas académicos y la determinación institucional de ajustar sus diseños curriculares por competencias (Aguirre, 2014).

Como fruto de dichas reformas curriculares, el programa de DMI sugiere al Departamento de Matemáticas y Estadística una revisión del programa bajo la premisa que el curso “poco aporta” a la formación de habilidades en programación, más aún cuando es prerrequisito del curso diseñando con Algoritmos. Además de esta solicitud expresa de la dirección de dicho programa, también es importante destacar que los estudiantes de esta carrera llegan al curso desconociendo una buena parte de las nociones geométricas relacionadas con construcciones básicas con regla y compás, de las líneas y puntos notables en el triángulo y de las isometrías del plano.

Esta situación podría ser generada en primer lugar como consecuencia de la falta de formación en geometría elemental que es típica de las instituciones educativas de secundaria en nuestro país y, en segundo lugar, porque en su malla curricular no está presente el curso de *Geometría Descriptiva*, que toman los estudiantes de DI y que sin lugar a dudas que contribuye a la formación de pensamiento geométrico.

Este desbalance con el que llegan los estudiantes de DMI al curso me pone el reto de buscar estrategias didácticas y recursos computacionales que permitan disminuir la brecha cognitiva que se presenta entre los dos grupos de estudiantes que toman el curso. Es así como considero que la implementación de actividades basadas en el uso de GeoGebra parece haber contribuido, como se mencionó anteriormente, a mejorar el desempeño académico de los estudiantes, reducir los índices de cancelaciones y reprobaciones y conectar los contenidos del curso con situaciones y demandas propias del ámbito del diseño.

Atendiendo las demandas de los programas de diseño, el Departamento de Matemáticas y Estadística ha implementado, desde el año 2017, algunos cambios relacionados con el procesos de evaluación en lo que respecta al número de exámenes parciales que se aplica a los estudiantes (se pasó de dos exámenes parciales, tres pruebas cortas y un examen final acumulativo a tres exámenes parciales y dos pruebas cortas), pero también ha habido cambios en los procesos de seguimiento del trabajo realizado por los estudiantes durante el semestre.

En la actualidad, además de los exámenes parciales también se tienen en cuenta talleres de clase, entregas parciales y finales a través de la plataforma Moodle que implican el uso de GeoGebra como recurso de mediación computacional. Es también importante resaltar que el uso de la tecnología ha impactado, no sólo el tipo de actividades desarrolladas en clase, sino que también lo ha hecho de manera notable en la evaluación misma, en el sentido que los estudiantes presentan dos de los tres exámenes parciales haciendo uso de sus computadores y del software GeoGebra.

.

Por todo lo anterior, en el presente proyecto de investigación me propongo indagar cuales serían las características fundamentales de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las isometrías en el plano, fundamentado en la estrategia solución de problemas y basada en el uso de nuevas tecnologías, que contribuya a generar aprendizaje significativo y contribuir al desarrollo de competencias en la medida que se logre alinear el contenido del curso con tareas propias del diseño industrial y multimedial.

La anterior propuesta se fundamenta en el hecho de que el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) brindan a los maestros la posibilidad de estructurar y elaborar intervenciones de aula que dinamizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y particularmente de la geometría.

1.4. OBJETIVOS

1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Estudiar las características tiene un proceso de aprendizaje, fundamentado en la resolución de problemas, de las isometrías del plano, mediado por GeoGebra, con estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en la Universidad Icesi.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analizar el tipo de recursos que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra.
2. Caracterizar las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra.
3. Estudiar las estrategias de Control que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con la mediación de GeoGebra.

1.5. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1.5.1. PREGUNTA CENTRAL

¿Cuáles son las características que tiene un proceso de aprendizaje, fundamentado en la resolución de problemas, de las isometrías del plano, mediado por GeoGebra, con estudiantes del curso de matemáticas para el diseño, en la Universidad Icesi?

1.5.2. PREGUNTAS AUXILIARES

1. ¿Qué tipos de recursos matemáticos utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra?
2. ¿Cuáles son las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra?
3. ¿Cuáles son las estrategias de Control que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con la mediación de GeoGebra?

2. REFERENTES TEÓRICOS

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que dan soporte al problema de investigación planteado y que se constituyeron en el marco de referencia tanto para el diseño de los instrumentos de investigación como para el análisis de los resultados obtenidos a través de ellos. Este marco de referencia lo constituyen tres elementos fundamentales a saber: el proceso de resolución de problemas, el uso de las tecnologías digitales en Educación Matemática, el uso de múltiples representaciones y, finalmente, el concepto matemático de isometrías en el plano.

2.1. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En este apartado se presentan los aspectos teóricos que fundamentan la solución de problemas matemáticos. Iniciaremos haciendo un análisis sobre las propuestas, que, sobre resolución de problemas, se consideran en la actualidad como referentes y poseen cierto reconocimiento en la literatura relacionada con la Didáctica de las Matemáticas y por su puesto en las nuevas tendencias que sobre el tema se desarrollan en el ámbito de la Educación Matemática.

Se citan algunos de los trabajos que considero más importantes y en los cuales se documenta las diferentes maneras de cómo se plantean y resuelven problemas de matemáticas.

2.1.1. EL TRABAJO DE ALAN SCHOENFELD

Las investigaciones realizadas por Shoenfeld (1985), tanto con estudiantes como con profesionales de las matemáticas, lo llevó a encontrar evidencias claras para afirmar sobre la existencia de lo que él define como las cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas: las estrategias cognitivas, el dominio del conocimiento, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias.

A pesar de que Shoenfeld toma como referente teórico para sus investigaciones los trabajos de Polya y valora la importancia de las estrategias descritas por este autor, pone en evidencia que muchos de los estudiantes, que demuestran habilidad en la ejecución de dichas estrategias, comienzan a tener dificultades cuando el problema se les presenta con algunas variantes.

A continuación, se describen cada una de estas cuatro dimensiones consideradas por Shoenfeld en sus investigaciones sobre la resolución de problemas.

2.1.1.1 Los recursos

Los recursos se consideran los cimientos a partir de los cuales se fundamenta la solución de problemas y caracterizarlos implica analizar, desde la psicología, en primer lugar, el conocimiento que posee el individuo y, en segundo lugar, las maneras como accede a dicho conocimiento.

En Shoenfeld (1992), se presentan una gran variedad de recursos que, según el autor, contribuyen a potenciar las habilidades en resolución de problemas matemáticos. Entre ellos se pueden citar recursos como:

- **i.** El conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema.
- **ii.** El conocimiento de términos no definidos y términos definidos.
- **iii.** El manejo de postulados.
- **iv.** El conocimiento de teoremas.
- **v.** Habilidad para ejecutar procedimientos de rutina o procedimientos algorítmicos.
- **vi.** El conocimiento acerca de las reglas del lenguaje que son propias del domino del problema a resolver, entre otros.

Benítez (1998) reporta que los estudiantes universitarios de primer año tienen severas dificultades para saber cuándo usar un recurso o una técnica específica, y en oportunidades dejan de usarla cuando deberían hacerlo o las usan en momentos inapropiados. Por ejemplo, muchos estudiantes de primer año de universidad intentan usar el principio de inducción matemática en todo aquel problema que involucre propiedades de números naturales. Otros estudiantes no usan el citado principio porque el problema explícitamente en la redacción no dice: “pruebe usando el principio de inducción matemática”. Desde este punto de vista, se afirma que, a pesar de que se discuta con los estudiantes algunos contenidos, no necesariamente sabrán cuándo pueden usarlos.

2.1.1.2. Estrategias Heurísticas.

Las estrategias heurísticas se consideran como acciones de gran utilidad a la hora de resolver problemas. Polya (1945) se refiere a las heurísticas haciendo referencia a preguntas y sugerencias que se formula la persona que resuelve el problema y algunas de estas acciones son: pensar en un problema análogo y más sencillo, cambiar datos o las condiciones enunciadas en el problema, enunciar el problema en forma diferente.

Las estrategias cognitivas son entonces métodos heurísticos tales como: *descomponer el problema en casos especiales*, *establecer metas parciales*, *debilitar las hipótesis o condiciones del problema*, preguntarse *por casos especiales*, entre otras.

Es importante destacar que las diferentes estrategias de resolución de problemas toman algunas características que resultan ser específicas del tipo de problema que se resuelve y del contexto del problema en el que se usan. Por ejemplo, una de estas estrategias podría ser utilizar el estudio de casos especiales para lograr comprender el enunciado del problema. Optar por analizar casos especiales contribuye a la generación de conjeturas, aspecto que es considerado de gran importancia para desarrollar habilidades de generalización.

Cando de resolver problemas de Geometría se trata, resulta conveniente poner atención en casos especiales que ofrezcan una complejidad mínima. Por ejemplo, pensar primero en polígonos regulares antes de pensar en una variedad más amplia de polígonos o considerar casos especiales en los que las medidas de las figuras estudiadas sean iguales o cumplan cierta condición, como paso previo del estudio con medidas arbitrarias.

Por ejemplo, si el problema consistiera encontrar las relaciones geométricas existentes entre el cuadrilátero $\square ABCD$ y el cuadrilátero interior $\square MNOP$, mostrados en la figura 3(Caja Negra 4), con el propósito de determinar la manera como el segundo cuadrilátero se construye a partir del primero.

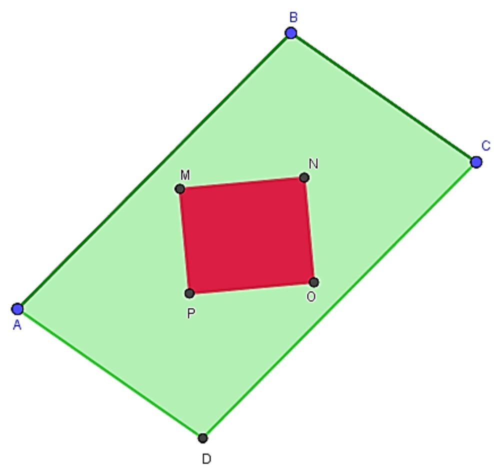


Fig. 3 Caja Negra 4

Una estrategia heurística que se puede poner en acción es la de pensar primero en un caso especial en el que el cuadrilátero $\square ABCD$ sea, por ejemplo un cuadrado, encontrándose en una situación como la descrita en la figura 4 , y en la cual el cuadrilátero $\square MNOP$ se deforma en un único punto que corresponde al centro del cuadrado $\square ABCD$. En la figura 5 podemos visualizar otro caso especial en el que dos de los lados del cuadrilátero $\square MNOP$ se encuentran sobre dos de los lados del cuadrilátero $\square ABCD$.

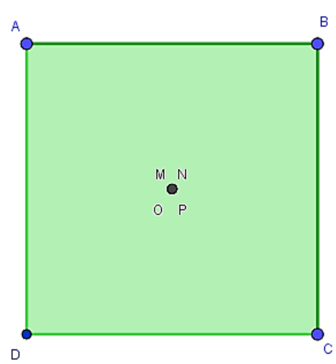


Fig. 4.

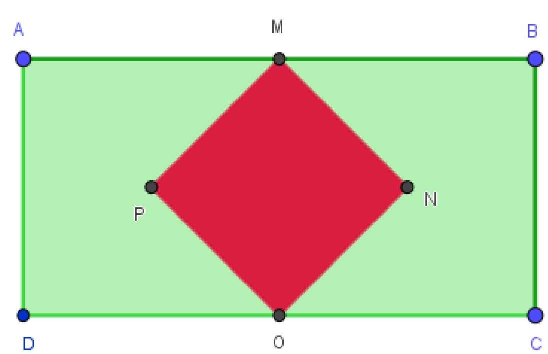


Fig. 5.

Como solución al ejercicio planteado en el apartado anterior encontramos que los vértices del cuadrilátero $\square MNOP$ se construyen encontrando los puntos de corte entre las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $\square ABCD$.

2.1.1.3. Estrategias metacognitivas.

Las estrategias metacognitivas son habilidades de control que despliega un resolutor de problemas, con los siguientes propósitos:

- Entender el enunciado del problema
- Seleccionar los recursos apropiados
- Seleccionar las estrategias heurísticas más indicadas para construir la solución
- Encontrar errores de procedimiento o de definición.
- Detectar caminos sin salida o sin potencial en el proceso de solución.
- Saber si un resultado es una solución pertinente de un problema.
- Buscar caminos alternativos que revistan sencillez o elegancia matemática.

La realización de una tarea en matemáticas depende no solamente de los recursos disponibles, sino también de la manera y la eficiencia con que se usen esos conocimientos, es decir, dependen del uso que se le dé a la información potencialmente útil que se encuentra a disposición del resolutor. Las denominadas estrategias metacognitivas constituyen un monitoreo al proceso y ayudan a tomar decisiones en momentos claves como: la selección de las estrategias o el cambio de dirección, cuando sea necesario.

Schoenfeld, (1992) reporta que las personas que tienen mucha experiencia en solución de problemas matemáticos (expertos) dedican prácticamente la mitad de tiempo de solución a entender y buscarle el sentido al problema. También destaca que estas personas permanentemente están revisando lo que están haciendo y en la parte final verifican la respuesta. Por su parte, los estudiantes no le dedican tanto tiempo a entender, y más bien emplean el tiempo en poner en práctica una estrategia de solución; estas personas no cambian la estrategia pese a que los resultados que arroje el proceso sean poco prometedores. A diferencia de los expertos, los estudiantes, en su mayoría, no tienen la costumbre de revisar las respuestas obtenidas al resolver los problemas en cuanto a su validez y pertinencia en el contexto del problema.

2.1.1.4. Sistema de creencias.

Todo lo que una persona crea que son las matemáticas, o sobre una parte de ellas, afectará su desempeño en la resolución de problemas.

Veamos varios ejemplos de sistemas de creencias:

a. Creencia N°1: "las matemáticas son para personas muy inteligentes. Yo no soy inteligente". Conclusión: Las matemáticas no son para mí.
b. Creencia 2: "El proceso de solución de un problema de matemáticas dura 10 minutos o menos. Llevo más de diez minutos en el proceso". Conclusión: El problema no tiene solución.
c. Varios estudiantes de los niveles básicos tienen la creencia que, si se tienen dos triángulos de diferente tamaño, entonces el triángulo más grande tendrá una suma de ángulos mayor que el otro.
d. Existen personas que creen que, si una propiedad matemática se cumple para pocos casos, también se cumplirá para todos los casos. Es decir que, si se encuentra un patrón, lo que se puede inducir de allí es un teorema y no una conjetura.

2.2. TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

2.2.1. Introducción.

En la actualidad se reconoce que el empleo de diversas herramientas digitales influye de manera significativa en el desarrollo, comprensión y asimilación de las ideas y conceptos matemáticos. Una de las premisas fundamentales es que el uso de la tecnología en la práctica matemática ha influido en los métodos y en el tipo de problemas que se investigan y por tal motivo afecta, necesariamente, los diseños curriculares y los ambientes de aprendizaje (Artigue 2002).

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 2000) propone el principio tecnológico que afirma: "La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Influye en las matemáticas que se enseñan y ayuda al aprendizaje de los estudiantes" (P30). En la actual era digital, los estudiantes acceden de manera rápida y eficiente a la información y al uso de dispositivos electrónicos como tabletas, celulares y computadores personales que les permiten hacer uso de innumerables aplicaciones y estar en contacto con comunidades académicas de diversa índole.

Existe, por ejemplo, El Instituto Internacional GeoGebra (IIG), entidad sin ánimo de lucro que pone a disposición de todo el mundo el software libre de matemáticas y geometría dinámica GeoGebra y una gran cantidad de materiales de apoyo, experiencias y guías de desarrollo tanto para maestros como para estudiantes, con el ánimo de mejorar nuestra práctica docente. De igual manera fomenta y promueve la colaboración entre profesionales e investigadores con el objetivo de establecer comunidades de conocimiento.

En este proyecto de investigación se busca promover el uso de GeoGebra porque les permite a los estudiantes construir, explorar, visualizar y manipular de manera directa figuras geométricas. Un seguimiento detallado de los cambios que se producen en la transformación de estos objetos geométricos puede conducir al estudiante a la búsqueda de patrones y la formulación y verificación de conjeturas.

En lo que respecta al carácter dinámico, autores como Arcavi y Hadas (2000) plantean que trabajar en dichos ambientes dinámicos le permite al estudiante no sólo construir y visualizar figuras a partir de sus propiedades geométricas, sino también "transformarlas" en tiempo real y aprovechar esta ventaja para realizar conjeturas acerca de las características invariantes y desarrollar ideas intuitivas que le permitan construir justificaciones de tipo formal. En este orden de ideas, se puede agregar lo manifestado por Cassina e Iturbe (2000) que el mismo software permite la validación inmediata de los resultados, en el sentido que al variar datos se puede establecer si varían o no las condiciones establecidas.

El mundo de hoy se distingue por la difusión y la apropiación de la tecnología en todos los ámbitos de la vida, así como por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas, que imponen un extraordinario dinamismo a la sociedad. En la actual era computacional y de la información, los estudiantes acceden con relativa facilidad al uso de los computadores, calculadoras, tabletas y celulares con diferentes fines.

El uso de la tecnología, en actividades de aprendizaje, tiene ya una historia de más de 40 años. Sin embargo, su incorporación a los sistemas escolares ha sido mucho más reciente y aún más lo han sido los estudios sobre la evaluación del impacto, que dan cuenta de los resultados de ese proceso. En la historia reciente de la Educación Matemática, se destaca la importancia del empleo de las tecnologías digitales en el aprendizaje de las matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, (1998); Laborde, (2001); Ministerio de; National Council of Teachers of Mathematics, (2000); Moreno, (2002a); Benítez, D. (2006); Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, (2013); Moreno y Santos, (2016)).

El Ministerio de Educación Nacional (2013) publica el libro denominado Competencias TIC para el Desarrollo Profesional Docente, que tiene como objetivo ofrecer pautas, criterios y parámetros tanto para quienes diseñan e implementan los programas de formación de maestros, como para los docentes y directivos docentes en ejercicio, dispuestos a asumir el reto de hacer uso reflexivo de las TIC en Educación.

2.2.2. Mediación Instrumental.

Toda acción humana es mediada por un instrumento material o simbólico. Por ejemplo, cuando nos vamos a comunicar usamos el instrumento simbólico que nos provee el lenguaje. Mientras que cuando nos transportarnos usamos una tecnología material como un automóvil o un avión.

El aprendizaje de las matemáticas también está mediado por instrumentos simbólicos como lo son el leguaje matemático y las representaciones semióticas. Mientras que utilizamos instrumentos materiales como el papel, el lápiz, las escuadras, las reglas, el compás, el libro de texto, el tablero, las calculadoras, las tabletas o los computadores.

El efecto de usar instrumentos materiales, como los computadores, genera una mediación que puede producir dos efectos:

- *La amplificación cognitiva*: con el apoyo de un computador el estudiante puede ver amplificado los recursos y estrategias para resolver problemas. En este sentido, con la tecnología el estudiante puede ver más respecto a aquello que ve usando medios análogos, por ejemplo.

- *La reorganización*: cuando una persona resuelve un problema con lápiz y papel y con tecnología, los recursos y estrategias que emplea en ambos casos pueden ser diferentes. En este caso el estudiante puede ver distinto con la presencia de las tecnologías digitales.

2.2.3. ¿Por qué utilizar GeoGebra en la investigación?

En la investigación se promovió el uso de GeoGebra. La utilización sistemática de este micro mundo computacional, les permite a los estudiantes construir, explorar, visualizar y manipular en forma directa las figuras geométricas. Un seguimiento de los cambios que se producen en la transformación de los objetos geométricos, puede conducir a la búsqueda de patrones y a la construcción de conjeturas.

El empleo del software GeoGebra permitió a los estudiantes la transformación, en tiempo real, de los objetos geométricos, de modo que después de hacer una construcción es posible mover libremente ciertos componentes de la misma y observar cómo se van transformando en otros, mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen. Lo anterior permite al estudiante entender que el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas como atributos esenciales de la construcción original. El hecho de que nuestros estudiantes puedan identificarlas mediante la exploración constituye una posibilidad única, ofrecida por la mediación computacional, y constituye un elemento fundamental para desarrollar en ellos habilidades para la solución de problemas.

Algunas características tomadas en cuenta para usar GeoGebra en la presente investigación, son las siguientes:

- El micro mundo GeoGebra permite hacer construcciones con regla y compás que son necesarias en el curso en el cual se insertó la investigación.
- GeoGebra permite estudiar la deformación continua de una construcción geométrica, o el lugar geométrico de un cierto objeto, mientras que otros se transforman de una manera continua.
- El software puede ayudar a los estudiantes a explorar, visualizar, medir, arrastrar, buscar invariantes, formular conjeturas y a darle seguimiento a cada una de estas estrategias.
- Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas geométricos.
- Facilita el empleo de diferentes registros de representación (gráfico, verbales, tabular y algebraico).
- La aproximación geométrica puede ser importante para relacionar la solución de un problema con diferentes líneas de contenido de la geometría (triángulos, sistema de coordenadas cartesianas, las secciones cónicas, la ecuación cuadrática y las funciones trigonométricas), con temas propios del cálculo (variación, límite, derivada, máximos y mínimos, tendencias, razón de cambio, etc.).

- Con el uso de GeoGebra se pueden explorar *Cajas Negras*. El profesor entrega al estudiante un archivo de cual el estudiante no tiene conocimiento sobre la manera como fue construido. Sin usar la tecla de ocultar/mostrar, el estudiante arrastra, mide, visualiza, busca propiedades y formula regularidades que le permiten construir conjeturas con el propósito de develar el paso a paso que siguió el profesor o diseñador de la Caja Negra.

- La formulación del paso a paso para rehacer la construcción que contiene la caja negra permite desarrollar en los estudiantes tanto habilidades de pensamiento sistémico como comunicativas relacionadas con la lecto-escritura cuando se le pide a los estudiantes hacer la transposición del medio digital al medio análogo.

2.3. USO DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES.

Para el desarrollo y análisis de lo propuesto en este trabajo de investigación es necesario considerar lo que propone Duval (1995), quien plantea que un sistema semiótico de representación es caracterizado como un sistema de representación, si permite las siguientes actividades cognitivas:

- ***La presencia de una representación identificable.*** A través de cualquiera de sus representaciones, el estudiante debe identificar de qué objeto se trata. Por ejemplo, si dibujamos un polígono, el estudiante debe identificar qué tipo de polígono es y cómo se llama. Si se escribe $L \| M$, debe entender que se trata de dos rectas paralelas.

- ***El tratamiento de una representación.*** Lo que hace referencia a las transformaciones de la representación dentro del mismo registro. Ejemplos de tratamientos geométricos son los trazos con regla y compás y las transformaciones elementales del plano.

- ***La conversión de una representación.*** Hace referencia a las transformaciones de una representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Por ejemplo, dada una definición de una isometría en lenguaje natural, se puede hacer una representación gráfica de ella.

2.4. ISOMETRÍAS EN EL PLANO

El estudio de las transformaciones en el plano, y en especial el de las isometrías, permite el desarrollo de habilidades y competencias importantes para la interacción con el mundo físico y la conexión de las matemáticas, y más específicamente de la geometría, con la cultura, el arte y el diseño. Desde la antigüedad, muchas culturas lograron desarrollar habilidades para el uso de diversas figuras geométricas y sus transformaciones en el diseño de elementos decorativos, artísticos y arquitectónicos.

Las transformaciones en el plano se estudian por primera vez en el Libro I de los Elementos de Euclides, donde son descritas como el resultado del desplazamiento y la superposición de figuras, pero sin llegar a realizar una formalización matemática del concepto. Para Moriena (2006) "tales desplazamientos no se consideran como transformaciones, es decir, no existe un concepto claro de transformación, sino el de una simple correspondencia entre figuras por medio de la superposición, dando por hecho la igualdad de las figuras". Ya en el renacimiento la preocupación por la descripción de los objetos tridimensionales y el manejo de la luz y la sombra ocupó de manera natural a los artistas y pintores de la época. Aparecen en escena grandes artistas del renacimiento con una gran habilidad e interés por el estudio de la geometría como Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leonardo Da Vinci (1452- 1519) y Albert Durero, quién hizo aportes teóricos para el desarrollo de técnicas de pintura y perspectiva (Klein, p 314). Hacia finales del siglo XIX con los avances teóricos en geometría se hace necesaria la caracterización y clasificación de las propiedades que resultaban invariantes y las trasformaciones que estaban asociadas a esa invarianza; es allí donde nace la noción de grupo desarrollada por Evariste Galois (1811- 1832).

Las transformaciones en el plano o isometrías se conciben como movimientos que producen cambios en la posición de las figuras geométricas a las que se le aplican, pero sin producir alteraciones en su forma ni en su tamaño.
A continuación, presentaré formalmente el concepto de isometría del plano ($\mathbb{R}^2$), que son el objeto de estudio en la secuencia didáctica implementada en la investigación. Para este desarrollo teórico he tomado como referencia el libro Simmetries de D. L Johonson (2001) y las Notas de Clase para el curso de Matemáticas para el Diseño de Yaker y Martínez (2007).

Definición 1. *Una* ***métrica o distancia*** *en un conjunto X es una aplicación $d: X \times X \to \mathbb{R}$ para la cual se verifican las siguientes propiedades:*

a. $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$ *, presentándose la igualdad si y solo sí $x = y$.*

b. *Propiedad simétrica:* $d(x,y) = d(y,x), \forall x,y \in X$.

c. *Desigualdad Triangular:* $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \forall x,y,\mathrm{z} \in \mathrm{X}$.

Al par (X,d), que denotaré simplemente por X se le denomina espacio métrico.

Definición 2. *Una* ***isometría****, en un espacio métrico, es una función biyectiva $u: X \to X$ que preserva la distancia, esto es, se satisface que:*

$$d\big(u(x),u(y)\big) = d(x,y), \forall x,y \in X.$$

Al conjunto de todas las isometrías del espacio métrico (X,d) se denota como $Isom(X,d)$

A continuación se presenta una descripción de las isometrias del plano Euclideo $(\mathbb{R}^2)$ denotadas como $Isom(\mathbb{R}^2,d)$, donde d representa la métrica usual de $\mathbb{R}^2$.

Definición 3. *Una* ***traslación*** $\tau_{\vec{a}}$ *en dirección al vector $\vec{a} = (a_1,a_2)$ de $\mathbb{R}^2$, es una aplicación que, a cada punto $P(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, en coordenadas rectangulares, le hace corresponder el punto $P' = \tau_{\vec{a}}(P)$ donde $P'(x_1+a_1, x_2+a_2)$, es decir, $\tau_{\vec{a}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \mapsto (x_1+a_1, x_2+a_2)$*

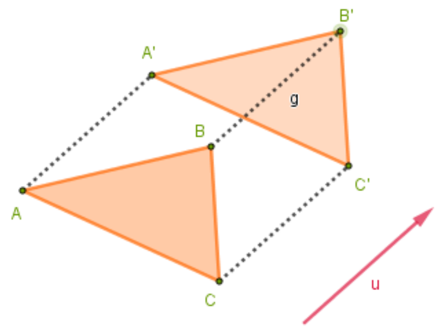
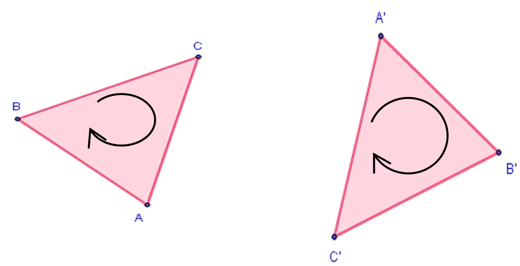


Fig. 6. Traslación en dirección al vector $\vec{u}$

Una propiedad fundamental de la traslación es que se considera una isometría directa en el sentido que conserva el sentido en el plano.

Reordemos que si para cualquier triángulo $\triangle ABC$ los vértices del triangulo imagen $\triangle A'B'C'$, obtinido a tarvés de la aplicación de una transformación en el plano, estan organizados en el mismo sentido (horario o antihorario) en el que se organizan los vértices del triángulo original, entonces la transformación se denomina directa. En caso contrario, se denomina inversa.



Definición 4. *Una* ***simetría axial*** *, o reflexión, respecto a una recta fija $\ell \in \mathbb{R}^2$, es una aplicación que a cada punto $P \in \mathbb{R}^2$, le hace corresponder un único punto $P' = r_\ell(P) \in \mathbb{R}^2$ que cumple la propiedad de ser el simétrico del punto P respecto a la recta ℓ*

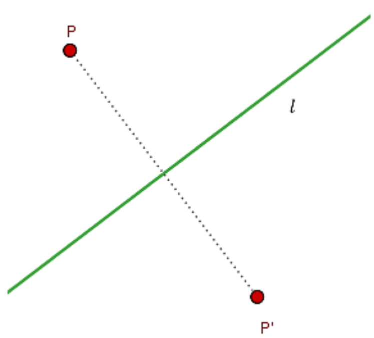


Fig. 7. Simetría axial del punto P respecto a la recta L

En el caso de la simetría axial tenemos que es, a diferencia de la traslación, una isometría inversa, dado que cambia el sentido en el plano, como se puede observar en la siguiente gráfica para la simetría axial del triángulo $\triangle ABC$ respecto a la recta ℓ.

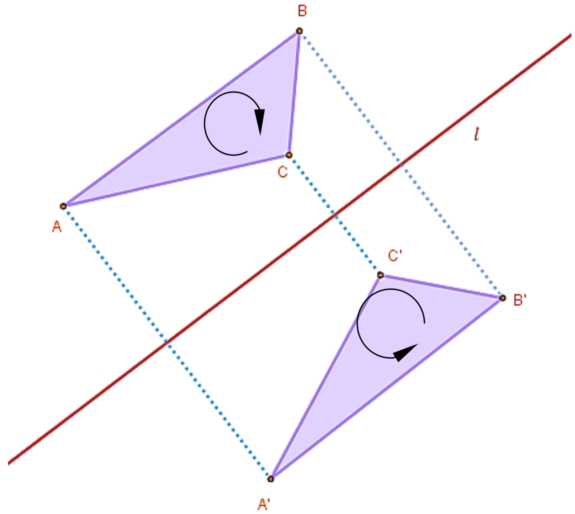


Fig. 8. Simetría axial del triángulo $\triangle ABC$ respecto a la recta ℓ

Definición 5. *Un* ***giro o rotación*** $\gamma(o,\alpha)$ *de centro* O *y amplitud* $\alpha \in \mathbb{R}$, *módulo* 2π, *es una aplicación que a cada punto* $P \in \mathbb{R}^2$ *le hace corresponder un único punto* $P' \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $OP = OP'$ *y* $\measuredangle POP' = \alpha$, *como se indica en la siguiente figura.*

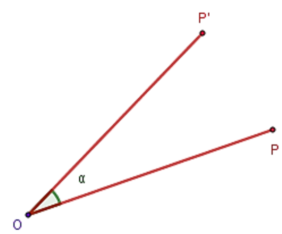


Figura 9. Rotación del punto P con centro O y ángulo α

Al igual de la traslación, el giro o rotación es una isometría directa, como se puede ver en la gráfica siguiente en la que se muestra la rotación con centro en el punto O y un ángulo $\alpha = 180°$ aplicada el triángulo $\triangle ABC$.

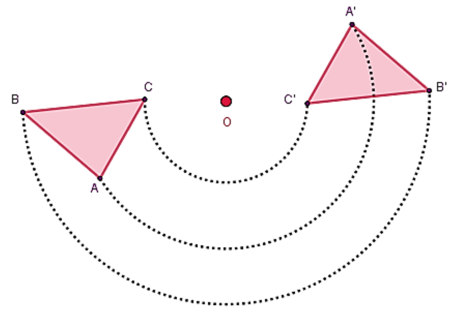


Fig. 10. Rotación del triángulo $\triangle ABC$

Definición 6. *Una **simetría** central, $C(O)$, de centro O, es una aplicación que a cada punto $P \in \mathbb{R}^2$ le hace corresponder un único punto $P' \in \mathbb{R}^2$ tal que O es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, como se muestra en la siguiente figura:*

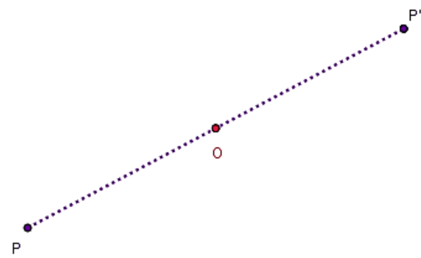


Fig. 11. Simetría central del punto P y centro O.

Para la simetria central tenemos, como propiedades importantes, que es una tranformación directa (mantiene el sentido), corresponde a una rotación de 180 grados con centro en el punto O y no cambia la amplitud de los angulos, ni el área de los polígonos, ni la longitud de los segmentos.

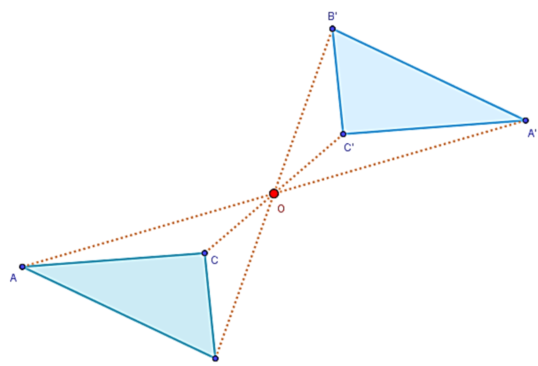


Fig. 12. Simetría Central del triángulo $\triangle ABC$ con centro en O

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se hace una descripción del tipo de investigación realizado, su mitología y las diferentes fases tenidas en cuenta para su desarrollo. También se expone la metodología utilizada para el análisis de los resultados obtenidos y se hace una descripción detallada tanto de los sujetos que hicieron parte de la investigación como de los materiales e instrumentos que fueron utilizados para la recolección y análisis de los datos y la información recogida, a partir de los cuales se puede dar respuesta a la pregunta de investigación planteada y dar cuenta de los objetivos propuestos en la investigación.

3.2. TIPO DE ESTUDIO

Retomando la definición que del concepto de investigación da Roberto Hernández Sampieri y al que se refiere como "*un conjunto de procesos sistemáticos, críticos y empíricos que se aplican al estudio de un fenómeno o problema"* (2010), y teniendo en cuenta que existen diferentes tipos de investigación, se propuso para el desarrollo del presente proyecto de investigación un tipo de enfoque mixto.

Es mixta en el sentido que los procesos de investigación que se usaron para su desarrollo implicaron la recolección y análisis de datos, tanto de tipo cuantitativo como cualitativo que permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación a partir de la interpretación y análisis de las producciones escritas de los estudiantes que participaron de la intervención de aula.

3.2.1. ANÁLISIS CUALITATIVO

El enfoque cualitativo se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni predeterminados que pretenden obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes. En este caso estaba interesado en obtener información acerca de las estrategias heurísticas usadas por los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño, en la solución de problemas geométricos, así como en sus sistemas de creencias, sus estrategias de control y sus habilidades en el uso del software GeoGebra, como instrumento de mediación computacional.

Según Sampieri (2010), los propósitos del análisis cualitativo son, a grandes rasgos, los de explorar los datos, categorizarlos, hacer una descripción de las experiencias de los participantes, reconstruir hechos, descubrir categorías y patrones que estén presentes en ellos, con la idea de interpretarlos, darles sentido y explicarlos en función del planteamiento del problema.

Desde este enfoque cualitativo, se analizaron las hojas de trabajo buscando darles valor a sus reflexiones, a las estrategias de resolución de problemas utilizadas, a su sistema de creencias y las estrategias de control propias de los estudiantes que participaron de la investigación.

Este análisis se hizo a partir de la lectura detallada de sus producciones escritas presentes tanto en las pruebas diagnósticas de entrada y de salida como en las hojas de trabajo que orientaron la intervención didáctica. También se comentan algunas de las intervenciones de los estudiantes durante las etapas de exploración y desarrollo de las cajas negras, así como las que se dieron en el proceso de socialización.

Para el análisis de los manuscritos generados por los estudiantes, se hizo especial énfasis tanto en la etapa exploratoria como el proceso de formulación de los protocolos de construcción, esto con la intención de determinar las herramientas cognitivas empleadas por ellos para descifrar la caja negra, pero también, para documentar las diferentes estrategias de construcción de isometrías en el plano que proponen los estudiantes y que resultan ser diferentes a la construcciones típicas conocidas.

3.2.2. ANÁLISIS CUANTITATIVO

Para el análisis cuantitativo se analizó el desempeño de los estudiantes tanto en las pruebas diagnóstica y de salida, como en las hojas de trabajo aplicadas durante la intervención didáctica. Se uso el software Excel para procesar la información con el fin de cuantificar porcentualmente dicho desempeño en cada una de las preguntas que hacían parte de las pruebas y de las hojas de trabajo.

El análisis estadístico implicó el uso de estadística inferencia haciendo uso del programa Minitab y las pruebas estadísticas de Bonnet y Leven para analizar los datos tanto por grupos como por programa académico.

3.3. SUJETOS PARTICIPANTES DE LA INVESTIGACIÓN

La propuesta didáctica se desarrolló en la Universidad Icesi, cuyo campus está ubicado en la Calle 18 N° 122-135 Pance, de la ciudad de Santiago de Cali, Colombia.

La Universidad Icesi es una institución educativa de educación superior cuyo proyecto educativo institucional se estructura alrededor de tres grandes ejes: el macro curricular, en el cual se discute qué son las áreas de desarrollo humano, las capacidades y las competencias con las que nos comprometemos como institución educativa, el meso curricular, que presenta las líneas de formación y los programas transversales que hacen posible, en la práctica, trabajar por competencias, y el micro curricular, que describe el aprendizaje activo como la pedagogía constructivista que rige los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El modelo de aprendizaje activo implica el desarrollo y la implementación de estrategias de aula que promuevan el uso de ambientes de aprendizaje retadores para los estudiantes y que logren promover en ellos el desarrollo de competencias y la consolidación autónoma del saber. Según nuestra propuesta pedagógica, lo anterior se logra bajo la orientación de un docente que en sus acciones supera la mera instrucción y se sitúa como un guía que invita y acompaña al estudiante a pensar por sí mismo y a aprender a aprender. Un docente que busca recursos y propone intervenciones didácticas que hagan del aprendizaje de las matemáticas una tarea agradable y con sentido para el estudiante (PEI, 2017).

Los sujetos que participaron de la investigación fueron los estudiantes de los programas académicos de *Diseño Industrial (DI)* y *Diseño de Medios Interactivos (DMI)* matriculados en el curso de *Matemáticas para el Diseño* durante el segundo semestre académico del año 2018.

Para ese periodo académico del 2018 se matricularon en el curso 56 estudiantes. De ellos cancelaron cuatro estudiantes, y dos no fueron tenidos en cuenta para la investigación por su baja asistencia a las actividades propuestas. Por tanto, se tomó una muestra de 50 estudiantes, de los cuales 27 eran de sexo femenino y 23 de sexo masculino. Además, 22 estudiantes eran del programa académico de diseño industrial y 28 del programa académico de diseño de medios interactivos.

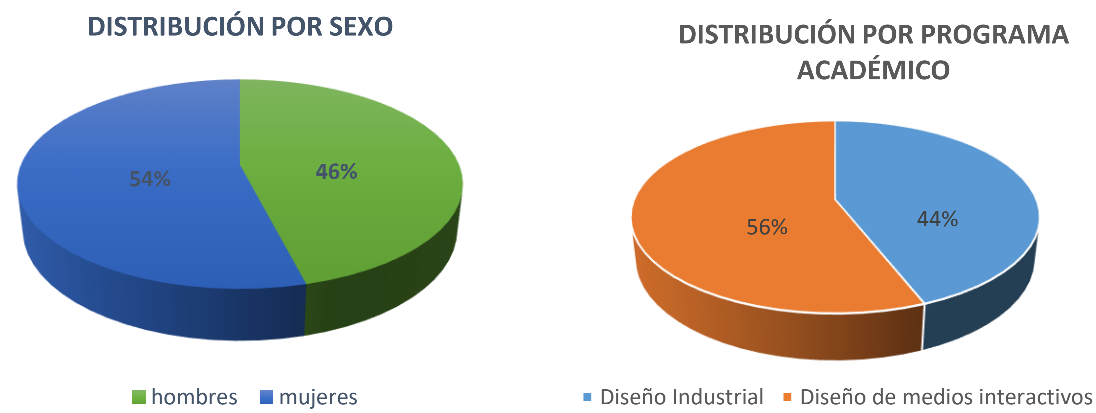


Fig. 13. Porcentajes de distribución de los sujetos de la investigación por sexo y carrera.

Vale la pena aclarar que de los 50 estudiantes cuyas producciones se analizaron para el desarrollo de la investigación no todos presentaron las pruebas diagnostica y de salida y otros tantos faltaron a las actividades con las hojas de trabajo. El número de participantes por cada una de las actividades es descrito detalladamente en el capítulo cuatro, donde se desarrolla el análisis de cada una de las actividades desarrolladas a lo largo de la intervención didáctica.

3.4. FASES DE DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

En la figura 14 se detallan las seis fases que conforman el presente trabajo de investigación y que serán detalladas a lo largo de la presente sección.

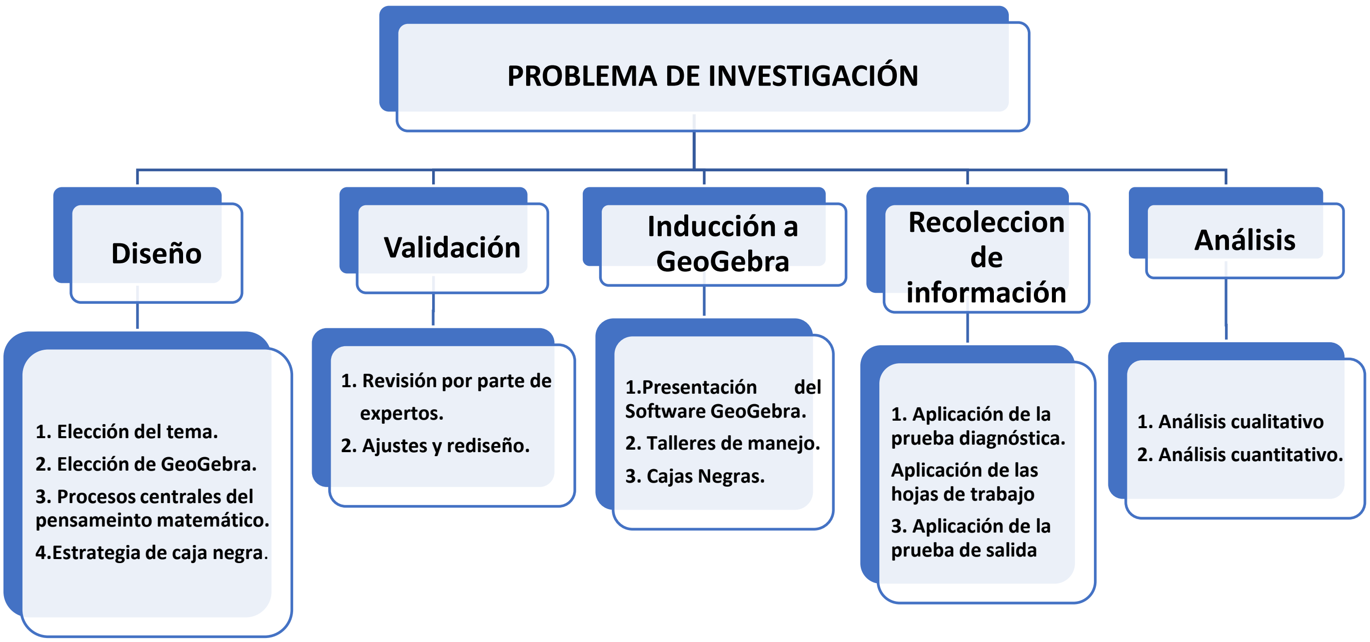


Fig. 14. Fases del estudio (elaboración propia)

3.4.1. FASE DE DISEÑO

En la fase de diseño de la intervención didáctica se pueden considerar varias subetapas que se consideraron para el planteamiento de las actividades y en el diseño de los instrumentos que se iban a aplicar durante la investigación.

3.4.1.1. ELECCIÓN DEL TEMA

Mi experiencia, de más de once años, en la enseñanza del curso de Matemáticas para el Diseño me permite considerar el tema de las transformaciones en el plano (isometrías en el plano) como un tema ideal para el desarrollo de la presente investigación. Si bien es cierto que este tema se aborda desde los primeros años de escolaridad en el sistema educativo colombiano, como se puede leer en el documento *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* del Ministerio de Educación Nacional (2003), dadas las características de las carreras de diseño industrial y diseño de medios interactivos a las que se dirige el curso, su enseñanza ha sido considerada como fundamental para el desarrollo de competencias geométricas.

La experiencia me ha permitido detectar que a pesar de que el tema está considerado en los estándares básicos de competencias en lo referente al *pensamiento espacial y sistemas geométricos*, la realidad es que la mayoría de los estudiantes del curso poco o nada conocen al respecto. Por ejemplo, en la página 82 del documento *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* se puede leer que, para los grados cuarto a quinto, se pretende que los estudiantes "*Conjeturen y verifiquen los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano para construir diseños"*, mientras que para los grados sexto a séptimo los estándares proponen que los estudiantes "*Predigan y comparen los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte."*

Por tanto, y dada la importancia de las isometrías en el plano para los estudiantes de diseño industrial, en lo que respecta al diseño de estructuras modulares, y en el diseño de video juegos y animaciones en dos y tres dimensiones, para los estudiantes de diseño de medios interactivos, decidí realizar mi intervención didáctica en torno al tema de las isometrías en el plano, más allá de que es un tema prerrequisito para el estudio de la noción de simetría y el diseño de teselados y frisos en el plano y que corresponden a la tercera unidad del curso de matemáticas para el diseño.

3.4.1.2. DISEÑO DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA Y LAS HOJAS DE TRABAJO

El diseño de la prueba diagnóstica tuvo como referente central los resultados históricos alcanzados por los estudiantes en el tema de las isometrías en el plano. Dentro de la malla curricular de la carrera de diseño industrial se encuentra un curso previo al curso de matemáticas para el diseño llamado *Geometría Descriptiva*, y en el cual se abordan conceptos geométricos. Este curso no lo toman los estudiantes de diseño de medios interactivos y por tal motivo se hace evidente la falta de fundamentación, de una buena parte de los estudiantes de este programa, en el uso de instrumentos de dibujo, construcciones básicas con regla y compás y nociones geométricas fundamentales.

La idea de la prueba diagnóstica era poder determinar el nivel de formación con el que llegan los estudiantes al curso de matemáticas para el diseño, en lo que respecta a algunos conceptos geométricos relacionados con las isometrías en el plano. El propósito de la prueba fue el de indagar sobre las nociones fundamentales de paralelismo y perpendicularidad de líneas rectas, sobre las isometrías en plano en cuanto a su definición, elementos característicos y propiedades fundamentales. De igual manera se pretendía indagar sobre algunas construcciones básicas con regla y compás y la habilidad de los estudiantes para encontrar regularidades y definir estrategias de construcción. A partir de lo encontrado en la prueba diagnóstica se procedió al diseño de las tres hojas de trabajo sobre isometrías (simetría axial, simetría central y traslación) y de las actividades de caja negra diseñadas, como archivos digitales de GeoGebra (diez en total), y que fueron utilizadas tanto en la fase de fundamentación sobre el uso del software GeoGebra, como en la fase de intervención didáctica propiamente dicha.

Finalmente, se diseña la prueba de salida, teniendo como referentes lo indagado en la prueba diagnóstica y las actividades planteadas en las hojas de trabajo. Para esta prueba de salida se plantean un total de doce preguntas, de las cuales un total de cuatro también hicieron parte de la prueba diagnóstica. Los cuestionarios de las pruebas diagnóstica y de salida pueden ser consultadas en el Anexo 1 y Anexo 5, respectivamente.

3.4.1.3. SELECCIÓN DE ACTIVIDADES Y EJERCICIOS

Se diseñaron diez cajas negras como archivos digitales de GeoGebra, de las cuales las primeras cinco se usaron en la etapa de fundamentación y uso de la herramienta computacional y las otras cinco en la implementación de las tres hojas de trabajo. Los archivos fueron compartidos con los estudiantes a través de la plataforma Moodle y las hojas de trabajo fueron entregadas físicamente para su diligenciamiento.

Las actividades diseñadas tenían el interés de explorar y desarrollar en los estudiantes procesos centrales del pensamiento matemático, en el sentido que lo expresa Schoenfeld (1992), y para quien pensar matemáticamente consiste en:

- **a.** Investigar posibles soluciones, y no solo en memorizar procedimientos.
- **b.** Explorar patrones y regularidades, y no en el simple uso de fórmulas.
- **c.** Formular conjeturas e hipótesis, y no sólo dedicarse a la solución rutinaria de ejercicios.

En este sentido uso como referente teórico lo propuesto por Schonfeld, quien considera que los cuatro rasgos fundamentales que caracterizan el pensamiento matemático son: *el dominio de conocimientos o uso de recursos, los métodos heurísticos, las estrategias de control y el sistema de creencias*.

Si bien es cierto que algunos los elementos mencionados anteriormente están íntimamente relacionados con la lógica y la heurística, también aparecen, en la propuesta de Shonfeld, elementos propios de la subjetividad del individuo como el sistema de creencias, y que, sin lugar a dudas, constituye una herramienta fundamental y de gran valor en el proceso de solución de problemas.

3.4.2. FASE DE VALIDACIÓN

Una vez diseñados los instrumentos que se aplicarían a lo largo de la intervención didáctica y que en esencia son: el cuestionario de prueba diagnóstica, que constaba de diez preguntas, y las tres hojas de trabajo: la hoja de trabajo N° 1 para simetría axial, la hoja de trabajo N°2 para la simetría central y la hoja de trabajo N° 3 para la traslación fueron puestas a consideración, para su proceso de validación, del doctor David Benitez, experto en educación matemática y director del presente trabajo de investigación.

Los instrumentos también fueron valorados por el profesor Henry Arley Taquez, quien se desempeña como coordinador de los procesos de enseñanza y Tic en el Centro de Recursos para el Aprendizaje (CREA), organismos adscrito a la Escuela de Ciencias de la Educación, de la Universidad Icesi. Fue el profesor Taquez quien hizo algunas recomendaciones sobre la estructura de la prueba diagnóstica y los objetivos de ella y las hojas de trabajo.

A partir de las recomendaciones de los expertos se procedió a realizar los ajustes necesarios de dichos insumos para poder compartirlos con los estudiantes.

3.4.3. FASE DE INDUCCIÓN AL SOFTWARE GEOGEBRA

Esta fase del proceso de investigación en realidad se desarrolla desde la primera semana de clase del curso. Si bien es cierto que los temas considerados en la intervención didáctica corresponden, como se indicó anteriormente, al segundo corte del curso, el uso de GeoGebra se implementa desde las primeras sesiones de clase del curso.

La primera unidad del curso corresponde a los fundamentos de Geometría Analítica y vectorial. En ella se estudian las nociones de recta numérica y plano cartesiano y se plantea y resuelve el problema de división de un segmento en una razón dada. Este problema se estudia en una y dos dimensiones y se hace especial énfasis en la división áurea de un segmento.

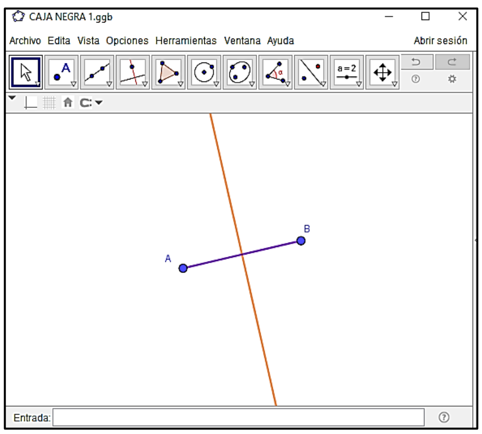
Dada la importancia de este problema para las carreras de diseño, su estudio se aborda haciendo uso del software GeoGebra porque facilita la visualización y la práctica de las construcciones básicas, con regla y compás, de un punto que divide a un segmento en razón áurea y de rectángulos áureos. Es esta primera unidad, los estudiantes conocen la interfaz del programa, aprenden a crear, abrir y guardar archivos de GeoGebra, a reconocer las herramientas básicas con las que cuenta el programa, a cambiar atributos como el color, el tamaño y el etiquetado de objetos, entre otras habilidades.

Es importante resaltar que durante esta primera unidad los estudiantes aprenden a generar nuevas herramientas mediante el diseño de macros que reproducen las construcciones básicas asociadas al problema de división de un segmento en una razón dada y en razón áurea, y hacen su primera entrega a través de la plataforma Moodle de un archivo en GeoGebra con el diseño de una herramienta que dibuja un rectángulo áureo de base dada y otra que divide un segmento en razón áurea.

En el desarrollo de esta primera unidad también se usa GeoGebra para trabajar con la noción de vector. Los estudiantes aprenden a medir ángulos, magnitudes, a verificar igualdad de vectores y a realizar operaciones con vectores desde el punto de vista gráfico.

Este trabajo inicial desarrollado con el software durante la primera unidad del curso se usa durante el desarrollo de la segunda unidad de curso, en la cual se estudian algunas de las construcciones elementales con regla y compás (mediatriz de un segmento, paralela a una recta dada por un punto exterior a ella, entre otras) y el concepto de transformaciones en el plano con el estudio de las isometrías del plano: *la traslación*, *la simetría axial*, *la simetría central* y *la rotación*.

El uso del software en esta unidad se fundamentó en la aplicación de actividades de trabajo en clase, individuales y grupales, basadas en la estrategia de caja negra, mencionada anteriormente. La idea consistió en que los estudiantes exploraran un total de cinco cajas negras y dos actividades taller en las que se les plantearon ejercicios de exploración, de diferente nivel y que consideraban conceptos geométricos variados. Por ejemplo, en la caja negra 1 se explora el concepto de mediatriz de un segmento, mientras que en la caja negra 4 se exploran relaciones en un paralelogramo a partir del trazado de las bisectrices de sus ángulos internos.



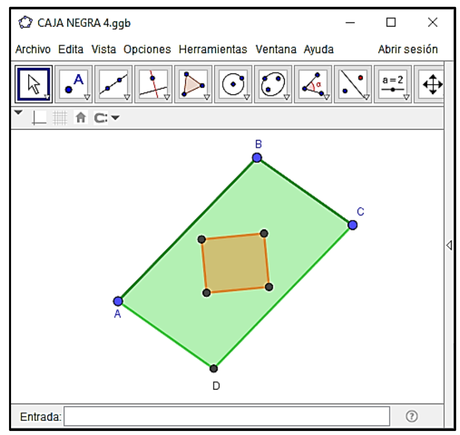


Fig.15. Ejemplos de cajas negras 1 y 4 usadas en la fase de inducción.

3.4.4. FASE DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

La fase de recolección de información se llevó a cabo, como se mencionó antes, en el marco del curso de Matemáticas para el Diseño, ofrecido por el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Icesi, para los programas de Diseño Industrial y Diseño de Medios Interactivos.

La fase de recolección de datos se llevó a cabo, en los dos grupos que tuve a cargo durante el semestre, durante las sesiones de clase, y las fuentes fueron, fundamentalmente, los siguientes instrumentos:

1. La prueba diagnóstica.
2. El desarrollo de tres hojas de trabajo sobre: la simetría axial, la simetría central y la traslación.
3. La prueba de salida.

Los resultados obtenidos a través de estos instrumentos son analizados en el capítulo 4 del presente trabajo.

3.4.5. FASE DE ANÁLISIS DE RESULTADOS

La fase de análisis, que se presenta en el capítulo siguiente, se desarrolló a partir del análisis de las producciones escritas de los estudiantes y de su interacción con las cajas negras. Este análisis se desarrolla desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo y teniendo encuentra los referentes teóricos propuestos en los capítulos 1 y 2 del presente documento.

Dicho análisis me permitió dar respuesta a la pregunta de investigación, como también evaluar el impacto que tuvieron las actividades propuestas durante la implementación en los procesos de aprendizaje, por parte de los estudiantes, de las isometrías en el plano mediadas por el uso de la tecnología, particularmente el software de Geometría dinámica GeoGebra.

Para el análisis cuantitativo se revisaron las pruebas de diagnóstico y de salida y se tabularon los resultados haciendo uso de Excel. Después se hizo el análisis estadístico de estos resultados usando el software Minitab.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se realiza el análisis de los datos obtenidos tanto en la prueba diagnóstica como en las tres hojas de trabajo aplicadas durante la propuesta didáctica. El análisis comprende un estudio cuantitativo y otro cualitativo, considerados fundamentales y complementarios para lograr evaluar el progreso de los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño semestre 2018-2, en la Universidad Icesi.

La información presentada en el presente capítulo se hará de la siguiente manera: En la primera parte se presentarán los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica, haciendo un análisis de la hallado por grupos y por carrera. Seguidamente se presentará el análisis de cada una de las tres hojas de trabajo desarrolladas por los estudiantes a lo largo de la secuencia didáctica, mostrando evidencias de algunos manuscritos que dan cuenta de los tipos de razonamientos, las heurísticas, las estrategias de control y los sistemas de creencias más representativos. Este análisis implica la reconstrucción, en GeoGebra, de lo realizado en la etapa de exploración, así como de los pasos que los estudiantes siguieron para realizar la reconstrucción de cada una de las cajas negras presentadas.

Finalmente, se realiza un análisis comparativo de la encuesta diagnóstica y cada hoja de trabajo, a fin de presentar una idea clara del impacto de la propuesta.

4.1. ANÁLISIS DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA Y LA PRUEBA DE SALIDA

En este análisis hago una descripción cualitativa y cuantitativa de los resultados obtenidos por los estudiantes del curso tanto en la prueba diagnóstica como en la prueba de salida, que fue aplicada después de la intervención didáctica realizada con las hojas de trabajo bajo la dinámica de Caja Negra y con la mediación computacional de GeoGebra.

4.1.1. OBJETIVO Y DESCRIPCIÓN DE LA PRUEBA DIAGNÓSTICA

La prueba diagnóstica está compuesta por un total de 10 preguntas (Ver Anexo 1). Cada una de estas preguntas buscaba indagar por el conocimiento que tenían, en su momento, los estudiantes matriculados en el curso de matemáticas para el diseño sobre conceptos básicos de Geometría y que están estrechamente relacionados con el concepto de isometrías en el plano.

Los propósitos de cada una de las preguntas se pueden organizar de la siguiente manera:

- **a.** Indagar sobre su sistema de creencias: preguntas 1, 2 y 4.
- **b.** Indagar sobre sus habilidades para realizar construcciones geométricas con regla y compás, detectar heurísticas y estrategias de solución de problemas: preguntas 3,7 y 8.
- **c.** Indagar sobre elementos, propiedades y características de las isometrías en el plano: preguntas 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Es importante aclarar que la clasificación anterior no es restrictiva, debido a que algunas preguntas se pueden agrupar en dos o más de los propósitos descritos.

4.1.2. CONDICIONES DE APLICACIÓN

La prueba diagnóstica se aplica al inicio de la segunda unidad de estudio del curso de Matemáticas para el diseño. En esta unidad se presentan algunas construcciones básicas con regla y compás y se estudian las trasformaciones en el plano: simetría axial (reflexión), simetría central y traslación. Aunque el programa del curso considera el estudio de la rotación y de la homotecia, estas dos transformaciones no fueron incluidas en el presente estudio; la primera por asuntos de tiempo y la segunda por no tratarse, en términos generales de una isometría (no lo es cuando el factor de homotecia $k \neq \pm 1$).

Para dar respuesta a la prueba cada estudiante contó con una copia análoga del cuestionario y un tipo total de 90 minutos para su desarrollo. La prueba diagnóstica fue presentada por 46 estudiantes de un total de cincuenta (50) que hicieron parte del proceso de intervención didáctica. No presentaron esta prueba los estudiantes E24, E34, E42 y E47. La prueba de salida fue presentada por 28 estudiantes.

4.1.3. ANÁLISIS CUALITATIVO

Para el procesamiento de la información recogida en las pruebas aplicadas se definió una escala de valoración para cada una de las preguntas, en términos de las habilidades y capacidades sobre las que se querían indagar. Esta escala de valoración es descrita, para la prueba diagnóstica, en la tabla siguiente:

N° DE PREGUNTA	ESCALA DE VALORACIÓN	DESCRIPCIÓN
Pregunta 1	**0**	El estudiante no tiene conocimiento del concepto o no contesta.
	1	El estudiante muestra dominio de algunos recursos teóricos relacionados con el concepto que le permiten aproximarse a la definición.
	2	El estudiante define correctamente el concepto.
Pregunta 2	**0**	El estudiante manifiesta no saber realizar la construcción.
	1	El estudiante manifiesta saber realizar la construcción.
	0	El estudiante no hace la descripción ni la construcción o son totalmente equivocadas.
	1	Faltan elementos en la construcción propuesta por el estudiante, pero su descripción del procedimiento es correcta.

Pregunta 3	**2**	La construcción propuesta por el estudiante es correcta, pero falta precisión en la descripción del procedimiento.
	3	Faltan elementos tanto en la construcción como en la descripción propuestas por el estudiante.
	4	La construcción y la descripción propuestas son correctas.
Pregunta 4	**0**	El estudiante no tiene conocimiento de las propiedades de la transformación.
	1	El estudiante muestra dominio de algunos recursos teóricos relacionados con las propiedades de la transformación que le permiten hacer una descripción aproximada.
	2	El estudiante describe correctamente las propiedades de la transformación.
Preguntas 5.1, 5.2, 6 y 10	**0**	La respuesta seleccionada por el estudiante es incorrecta.
	1	La respuesta seleccionada por el estudiante es correcta.
Preguntas 7 y 8	**0**	El estudiante no hace la descripción ni la construcción o son totalmente equivocadas.
	1	Faltan elementos en la construcción propuesta por el estudiante, pero su descripción del procedimiento es correcta.
	2	La construcción propuesta por el estudiante es correcta, pero falta precisión en la descripción del procedimiento.
	3	La construcción propuesta por el estudiante es correcta, pero falta precisión en la descripción del procedimiento.
	4	La construcción y la descripción propuestas son correctas.
Pregunta 9	**0**	Hay error en la reflexión de la exclamación ¡PAZ!, o en la palabra o en los signos de admiración o en ambos en una o más de las direcciones.
	1	La reflexión de la exclamación ¡PAZ! es correcta en todas las direcciones.

Tabla 1. Descriptores de valoración para las pruebas diagnóstica y de salida.

Para la prueba de salida se formularon un total de 12 preguntas y la escala de valoración planteada para su calificación fue prácticamente la misma de la prueba diagnóstica. En la pregunta 9 de la prueba de salida (ver Anexo 5) se le pide a los estudiantes identificar la isometría que se le ha aplicado al triángulo $\triangle ABC$ para obtener el triángulo imagen $\triangle A'B'C'$, encontrar los elementos que la definen y explicar el protocolo de construcción. Para esta pregunta se definió la escala de valoración que se muestra en la tabla siguiente:

N° DE PREGUNTA	ESCALA DE VALORACIÓN	DESCRIPCIÓN
Pregunta 9	**0**	No reconoce la isometría aplicada y no hace la descripción del proceso de construcción.
	1	Reconoce la isometría aplicada y sus elementos, pero no realiza la descripción del proceso usado o es equivocado.
	2	Identifica la isometría aplicada y sus elementos y realiza una descripción correcta de los pasos realizados para hallarlos.

Tabla 2. Escala de valoración para la pregunta 9 de la prueba de salida.

Los resultados obtenidos a partir de esta clasificación muestran los siguientes aspectos:

1. En la **pregunta 1** se encuentra que la mayoría de los estudiantes cuentan con recursos intuitivos e informales acerca de las nociones de paralelismo y perpendicularidad de líneas rectas, pero no respecto a las nociones de rotación, traslación y simetría. Esta falta de recursos conceptuales sobre las definiciones formales y las propiedades geométricas de las isometrías del plano se hace más evidente en la **pregunta 4**, en la cual la mayoría de los estudiantes clasifican en la categoría cero (0), con porcentajes que oscilan entre el 72% y el 90% de los estudiantes ubicados en ella.

   Para la pregunta 1 presento como ejemplo el manuscrito del estudiante E21. En su respuesta el estudiante expresa que para la simetría central "sucede lo mismo que en la simetría axial", es decir, está realizando un proceso de generalización con la diferencia de que en este caso debería haber dos ejes de simetría.

Transformaciones en el plano	Descripción de propiedades
Rotación	Es cuando se desplaza una figura cierta cantidad de angulos en su mismo eje
Traslación	es cuando se desplaza una figura en el plano cierta cantidad de distancia
Simetría axial	este tipo tiene un eje de simetria que refleja lo que se haga en un lado de este al otro de manera exacta
Simetría central	es lo mismo que la simetria axial solo que tiene dos ejes de simetria

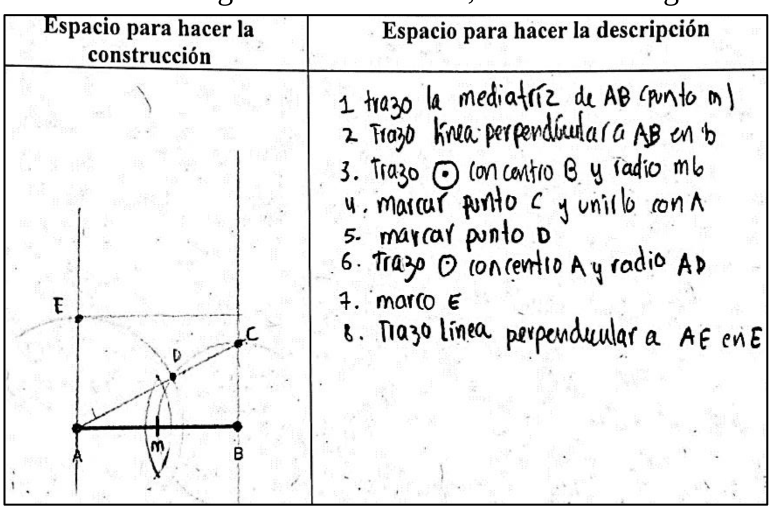
Fig. 16. Manuscrito del estudiante E21

2. Para la **pregunta 2** se encuentra que un alto porcentaje de los estudiantes manifiesta no tener habilidad para la construcción de simetrías axiales, simetrías centrales y ni rotaciones de

polígonos, haciendo uso de regla y compás. Por ejemplo, para el grupo 1, el 84% de los estudiantes manifiesta no saber realizar una simetría axial, mientras que en el grupo 3 lo hace el 95% de los estudiantes. Lo anterior refleja que un alto porcentaje de los estudiantes manifiestan no contar con los recursos procedimentales necesarios para realizar isometrías en el plano. Ante esta situación el uso de medios computacionales para estudiar las construcciones elementales mediante el uso del Software GeoGebra resulta muy pertinente.

3. En la **pregunta 3** encuentro que el 88% de los estudiantes del grupo 1 y el 57% de los estudiantes del grupo 3 se ubican en las categorías 2 y 3 descritas en la tabla anterior. Esto significa que, para ambos grupos, se presentan dificultades en la realización de la construcción geométrica. Estas dificultades se relacionan con el uso de los instrumentos de dibujo para el trazado de arcos de circunferencia. También se encuentran dificultades en el uso de un lenguaje matemático adecuado para describir la secuencia de pasos realizados, que incluya nociones geométricas de paralelismo y perpendicularidad de líneas rectas. En esta pregunta, el 12% de los estudiantes del grupo 1 no responden o lo hace de forma equivocada, mientras que para el grupo 3 este porcentaje es del 33%.

   En el manuscrito del estudiante E33, que se presenta en la Fig. 17 se puede notar que, a pesar de contar con recursos procedimentales para el trazado de mediatrices y arcos de circunferencias, hay ausencia de estrategias de control que le permitan detectar, por ejemplo, que con su construcción no genera un cuadrado, sino un rectángulo.



Espacio para hacer la construcción	Espacio para hacer la descripción
E C D A m B	1 trazo la mediatríz de AB (punto m) 2 Trazo línea perpendicular a AB en b 3. Trazo ⊙ con centro B y radio mb 4. marcar punto C y unirlo con A 5. marcar punto D 6. Trazo ⊙ con centro A y radio AD 7. marco E 8. Trazo línea perpendicular a AE en E

Fig. 17. Manuscrito del estudiante E33

En la respuesta dada a la pregunta 3 por el estudiante E36 se puede ver que carece de recursos procedimentales para hacer construcciones con regla y compás, como lo propone el enunciado de la pregunta. En su lugar, el estudiante decide hacer uso de las escuadras de 60° y 45° para realizar el trazado de rectas perpendiculares al segmento dado y poder construir el cuadrado solicitado. Se puede ver también que el estudiante implementa una estrategia de control que consiste en medir con el compás la longitud del segmento $\overline{AB}$ y de esa manera garantiza que su construcción, efectivamente, genera un cuadrado.

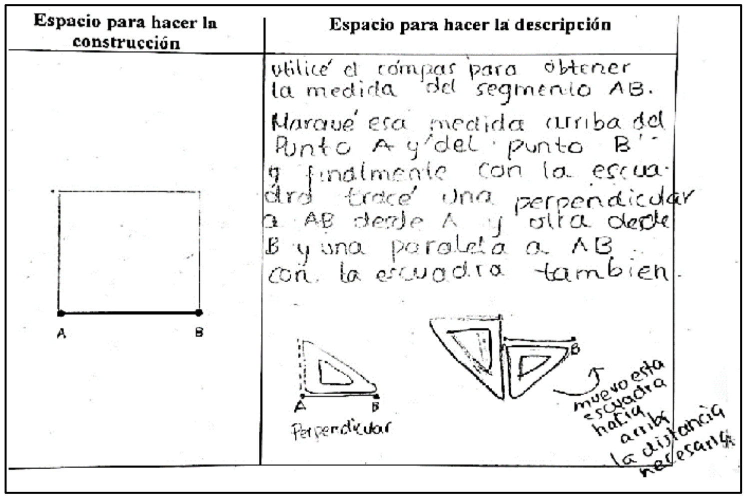


Fig. 18. Manuscrito de E36

4. En las preguntas 7 y 8 se les solicita encontrar el centro de una simetría central (pregunta 7) y el eje de simetría de una simetría axial (pregunta 8). Se evidencia, en algunos casos, la ausencia de estrategias heurísticas que les permita encontrar estos elementos característicos de esas isometrías. De otro lado, como se puede leer en el manuscrito de la estudiante E40, la ausencia de estrategias de control no le permite darse cuenta que la situación planteada corresponde a una simetría central, mientras que en su argumentación indica que se trata de una reflexión y que el centro de simetría es "el vector C", cuando en realidad este es uno de los vértices del triángulo original.

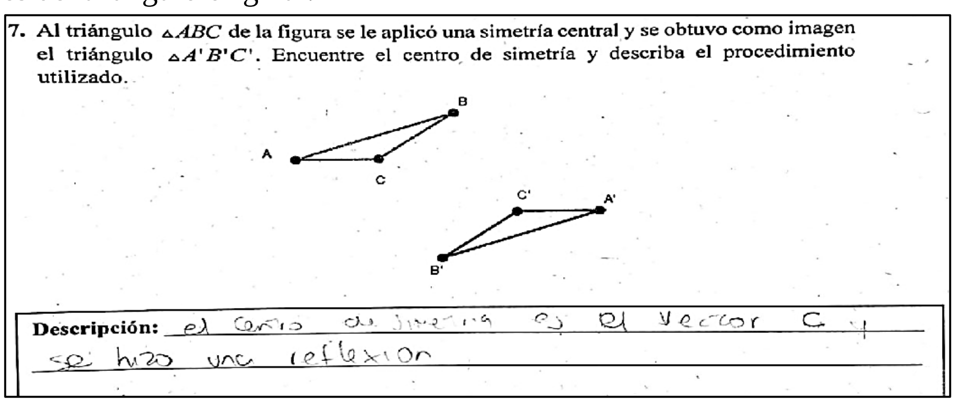


Fig. 19. Manuscrito del estudiante E40.

4.1.4. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LAS PRUEBAS DIAGNÓSTICA Y DE SALIDA.

Resulta importante mencionar que, dadas las características de estos dos programas académicos y las altas demandas de actividades en el taller de diseño, para los estudiantes de diseño industrial, y las salas de programación, para los estudiantes de diseño de medios interactivos, la prueba de entrada fue presentada únicamente por 46 de los 50 estudiantes que estuvieron matriculados en el curso. La prueba de salida solo la presentaron 40 estudiantes, entonces para el análisis comparativo de ambas pruebas solo se tuvo en cuenta un total de 38 estudiantes que fueron los que presentaron ambas pruebas.

Después de haber aplicado la prueba diagnóstica y haber desarrollado las actividades con las hojas de trabajo, se encuentra que los promedios obtenidos por los estudiantes en la prueba de salida mejoran considerablemente en comparación con los obtenidos en la prueba diagnóstica. Este avance en el desempeño de los estudiantes se puede ver en el siguiente gráfico comparativo por programa académico.

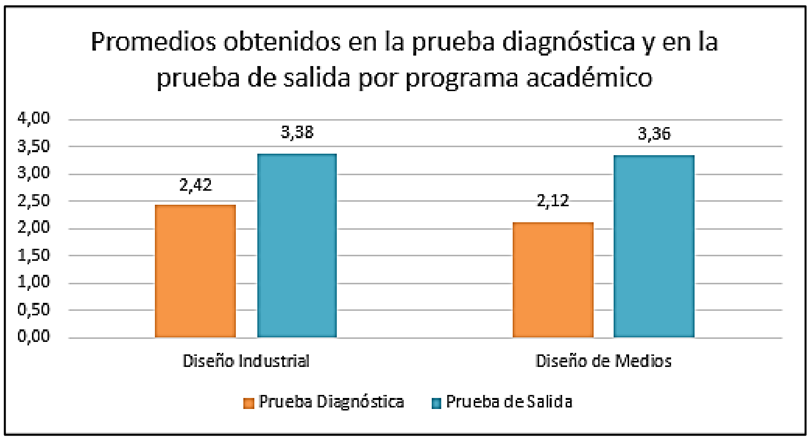


Fig. 20. Promedios por carrera para la prueba diagnóstica.

Con el ánimo de verificar estadísticamente estas diferencias de promedios, que indican claramente un avance en el desempeño de los estudiantes, se hace un análisis estadístico de los datos obtenidos, usando el programa *Minitab*.

Se aplica una *prueba T para muestras pareadas* con un nivel de confiabilidad del 95%. Se usa este tipo de prueba estadística porque contamos con datos relacionados de los mismos individuos que han sido tomados en tiempos diferentes.

El análisis se hizo sobre la diferencia entre la prueba de salida y la prueba diagnóstica. Se realizó por totales, por grupos y por programa académico, encontrándose que en los tres casos la diferencia siempre resulta ser positiva, lo que indica que el desempeño de los estudiantes fue mejor en la prueba de salida que en la prueba diagnóstica.

Este análisis estadístico confirma que la intervención de aula realizada a través de las hojas trabajo y la mediación tecnológica con el uso GeoGebra logró movilizar el aprendizaje de las isometrías del plano, sus características y propiedades, en los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño. A continuación, se presentan los resultados del análisis estadístico realizado en cada uno de los tres casos:

1. PRUEBA T PAREADA: ANÁLISIS POR PROGRAMA ACADÉMICO.

Diseño Industrial

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
DI-salida	17	3,380	0,414	0,100
DI-diagn	17	2,424	0,717	0,174

Estimación de la diferencia pareada

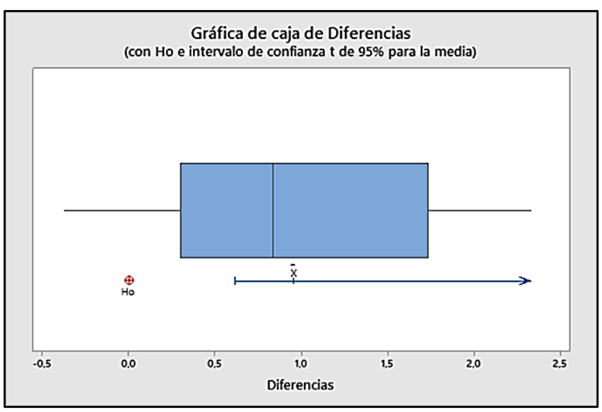
Media	Desv.Est.	Error estándar de la media	Límite inferior 95% para la diferencia_μ
0,956	0,804	0,195	0,615

diferencia_μ: media de (DI-salida - DI-diagn)

Prueba

Hipótesis nula H₀: diferencia_μ = 0
Hipótesis alterna H₁: diferencia_μ > 0

Valor T	Valor p
4,90	0,000



Diseño de Medios Interactivos

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
DMI-salida	21	3,362	0,595	0,130
DMI-diagn	21	2,120	0,969	0,211

Estimación de la diferencia pareada

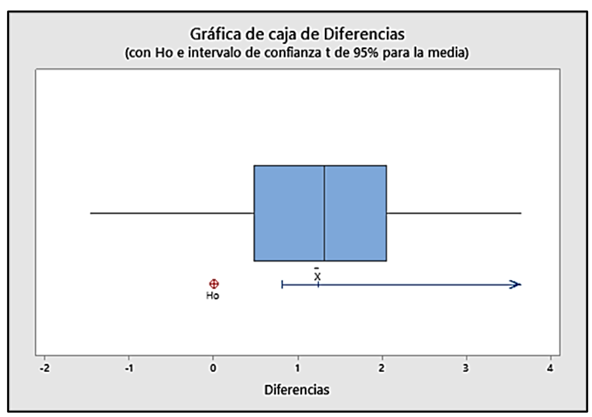
Media	Desv.Est.	Error estándar de la media	Límite inferior 95% para la diferencia_μ
1,242	1,124	0,245	0,819

diferencia_μ: media de (DMI-salida - DMI-diagn)

Prueba

Hipótesis nula H₀: diferencia_μ = 0
Hipótesis alterna H₁: diferencia_μ > 0

Valor T	Valor p
5,07	0,000



2. PRUEBA T PAREADA: ANÁLISIS POR GRUPOS.

GRUPO 1

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
G1-salida	20	3,271	0,567	0,127
G1-diagn	20	2,417	0,951	0,213

Estimación de la diferencia pareada

Media	Desv.Est.	Error estándar de la media	Límite inferior 95% para la diferencia_µ
0,855	1,143	0,255	0,413

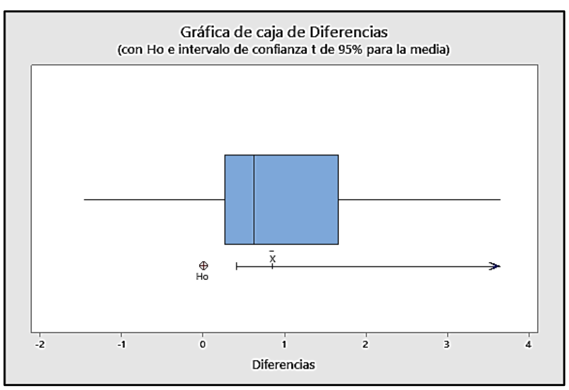
diferencia_µ: media de (G1-salida - G1-diagn)

Prueba

Hipótesis nula H_0: diferencia_µ = 0

Hipótesis alterna H_1: diferencia_µ > 0

Valor T	Valor p
3,34	0,002



GRUPO 3

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
G3-salida	18	3,480	0,441	0,104
G3-diagn	18	2,077	0,751	0,177

Estimación de la diferencia pareada

Media	Desv.Est.	Error estándar de la media	Límite inferior 95% para la diferencia_µ
1,403	0,717	0,169	1,109

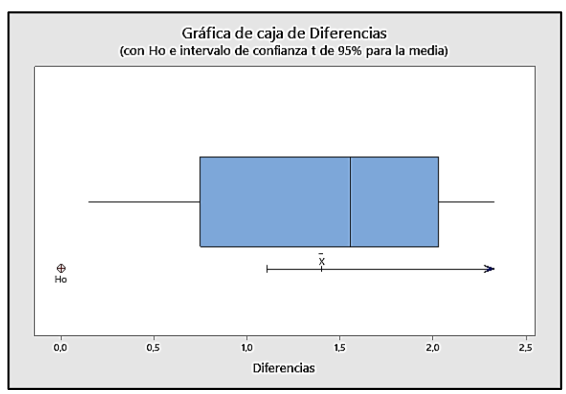
diferencia_µ: media de (G3-salida - G3-diagn)

Prueba

Hipótesis nula H_0: diferencia_µ = 0

Hipótesis alterna H_1: diferencia_µ > 0

Valor T	Valor p
8,30	0,000



3. PRUEBA T PAREADA: ANÁLISIS POR TOTALES.

Esta prueba nos muestra, con un 95% de confiabilidad, que la diferencia entre la prueba de salida y la prueba diagnóstica, por totales es positiva, lo que significa que, en general, la intervención didáctica generó un avance significativo en el nivel de conceptualización de las construcciones con regla y compás y las isometrías del plano.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
salida	38	3,370	0,515	0,084
diagnostica	38	2,256	0,868	0,141

Estimación de la diferencia pareada

Media	Desv.Est.	Error estándar de la media	Límite inferior 95% para la diferencia_µ
1,114	0,992	0,161	0,843

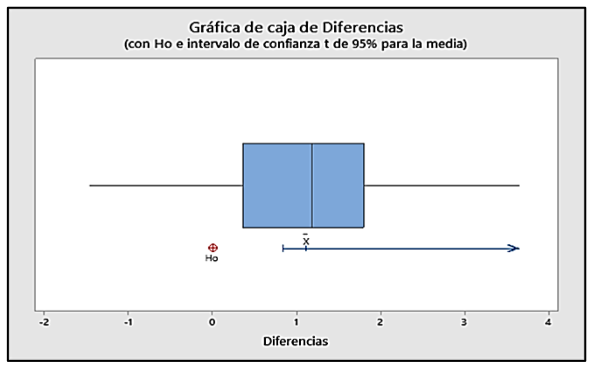
diferencia_µ: media de (salida - diagnostica)

Prueba

Hipótesis nula H_0: diferencia_µ = 0

Hipótesis alterna H_1: diferencia_µ > 0

Valor T	Valor p
6,93	0,000



Después de haber realizado la implementación de la propuesta de trabajo, de los momentos de socialización y formalización se puede notar que los estudiantes comienzan a manifestar sus ideas acerca de las isometrías del plano con un lenguaje matemático más acorde al contexto. Después de tener un alto porcentaje de estudiantes que manifestaban no tener conocimiento de las propiedades y los elementos característicos de estas isometrías y que oscilaban entre en el 72% y el 90%, en la prueba de salida disminuye al 20%, para el grupo 1, y al 5% para el grupo 3.

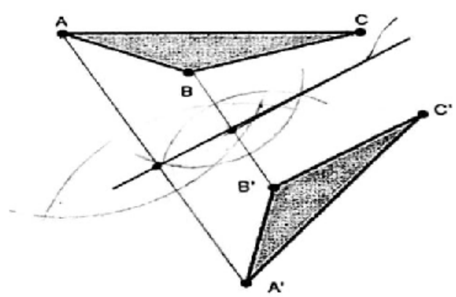
Un ejemplo de avance es el caso de la estudiante E37, quien mostró un bajo desempeño en la pregunta 4 de la prueba diagnóstica. El manuscrito siguiente, que corresponde a la misma estudiante, si bien es cierto, no muestra dominio sobre las propiedades de las isometrías del plano, si muestra un avance importante en la descripción de los elementos característicos de las isometrías del plano que fueron estudiadas durante la intervención.

Transformaciones en el plano	Descripción de propiedades
Rotación	– Debe tener un centro de rotación – Debe tener un ángulo para rotar
Traslación	– Vector con el cual trasladar
Simetría axial	– Debe tener un eje de simetría (recta)
Simetría central	– Debe tener un punto a partir del cual se hará la simetría

Fig. 21. Manuscrito de la estudiante E37 – Pregunta 4 de la prueba de salida

En cuanto a la descripción de procesos para hallar centros de simetría y ejes de simetría (preguntas 9 y 10), el manuscrito del estudiante E45, muestra bastante dominio de las construcciones con regla y compás y una mayor fluidez para describir el proceso utilizado.

10. Al triángulo $\triangle ABC$ de la figura se le aplica una simetría axial (reflexión) respecto a una línea recta ℓ y se obtiene el polígono $\triangle A'B'C'$. Encuentre el eje de simetría y describa el procedimiento utilizado.



Descripción: Se trazan las Segmentos respectivos en $\overline{BB'}$ $\overline{AA'}$ y se encuentra el punto medio en ambos segmentos. Esas puntos medios se unen y forman el eje de simetría

Fig. 22. Manuscrito del estudiante E45

4.2. ANÁLISIS DE LAS HOJAS DE TRABAJO

Las tres hojas de trabajo empleadas en la investigación (ver Anexos 2, 3 y 4) que fueron analizadas en este apartado (constan de los mismos cuatro objetivos de aprendizaje que se enuncian a continuación.

- Diferenciar, en una construcción dada, los puntos que tiene libre desplazamiento de aquellos que no lo tienen.
- Reconocer, en una construcción dada, los elementos dados y los elementos obtenidos mediante construcción.
- Usar las herramientas de GeoGebra para medir longitudes, ángulos y determinar relaciones de tipo geométrico entre los elementos de una construcción dada.
- Encontrar y enunciar la secuencia de pasos que se deben seguir para realizar la construcción geométrica dada.
- Identificar el tipo de transformación en el plano que corresponde a cada construcción, sus elementos y propiedades.

Es importante aclarar que, aunque los objetivos planteados son los mismos para las tres hojas de trabajo, cada una de ellas trata de una *isometría en el plano* diferente. La primera hoja de trabajo se ocupa de la *simetría axial*, la segunda de la *simetría central* y la tercera de la *traslación*. Para el estudio de cada una de estas transformaciones se diseñaron, haciendo uso del Software de geometría dinámica GeoGebra, construcciones bajo el enfoque de *cajas negra*s.

Es a partir de la interacción con las cajas negras que los estudiantes, mediante el uso de estrategias heurísticas como la visualización, la particularización, el arrastre y la medición de ángulos, longitudes y áreas, logran encontrar regularidades, reconocer propiedades geométricas y establecer relaciones entre los elementos geométricos que constituyen cada una de las cajas negras.

Finalmente, esta etapa de exploración conduce a determinar el tipo de isometría considerada en el diseño, en la formalización de sus propiedades y elementos fundamentales, así como en la formulación de un protocolo de construcción, a manera de pasos secuenciales, que les permita reconstruir cada una de las construcciones.

En la hoja de trabajo N°1 los estudiantes desarrollan las actividades 1 y 2, realizando la exploración de las cajas negras 6 y **7.** En la hoja de trabajo N°2 se desarrolla la actividad 3 planeada en la caja negra 8 y, finalmente, en la hoja de trabajo N°3 se les plantea la actividad 4, que considera la exploración de la caja negra 9. Las hojas de trabajo pueden consultarse en los Anexos 2, 3 y 4.

Para las tres hojas de trabajo se aplicaron pruebas estadísticas para comparación de varianzas y de promedios. Para ello se usó el software Minitab y se aplicaron los métodos de Bonnet y Leven, encontrando, con un nivel de confiabilidad del 95%, que las muestras de cada hoja tienen varianzas iguales y que al hacer el análisis por diferencia de promedios correspondiente no se encuentran diferencias significativas en el desempeño de los estudiantes, ni por carrera, ni por grupos.

Lo anterior significa que en todas las hojas de trabajo los estudiantes están asimilando de la misma manera la intervención realizada.

4.2.1. ANÁLISIS DE LA HOJA DE TRABAJO 1: SIMETRIA AXIAL

Como se mencionó en el párrafo anterior, la hoja de trabajo 1 se desarrolla a partir de la exploración de las cajas negras 6 y 7. Con ambas cajas su pretende enfrentar a los estudiantes a la transformación geométrica conocida como ***simetría axial*** (reflexión en una recta).

4.2.1.1. DESCRIPCIÓN DE LA HOJA DE TRABAJO

La **actividad 1** se refiere a la **caja negra 6**, que consta de una línea recta L y dos puntos del plano P y P', donde el punto P' es la imagen del punto P a través de una simetría axial respecto a la línea recta L. Se debe resaltar que los estudiantes reciben un archivo en calidad de caja negra, esto es, reciben la construcción hecha en un archivo digital en formato GeoGebra y la tarea consiste en visualizar, arrastrar, medir, encontrar invariantes para develar el paso a paso de la construcción. Mientras que la **actividad 2** está referida a la **caja negra 7** y en ella se les presenta una recta L y los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, para los cuales se cumple que el segundo triángulo es la simetría axial del primero respecto a dicha recta.

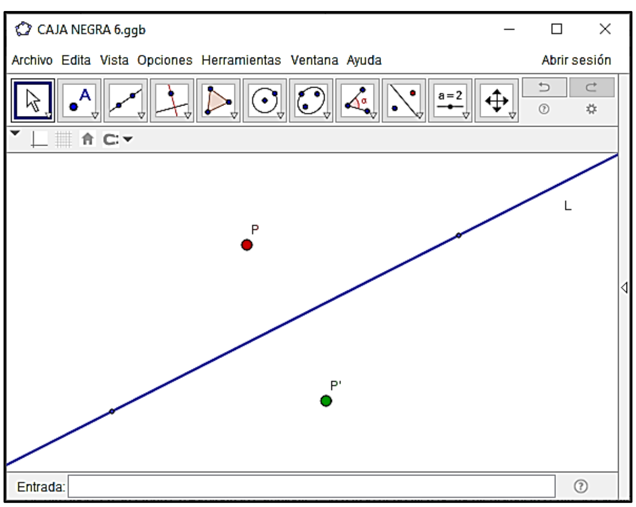


Fig. 23. Caja Negra 6 – Actividad 1

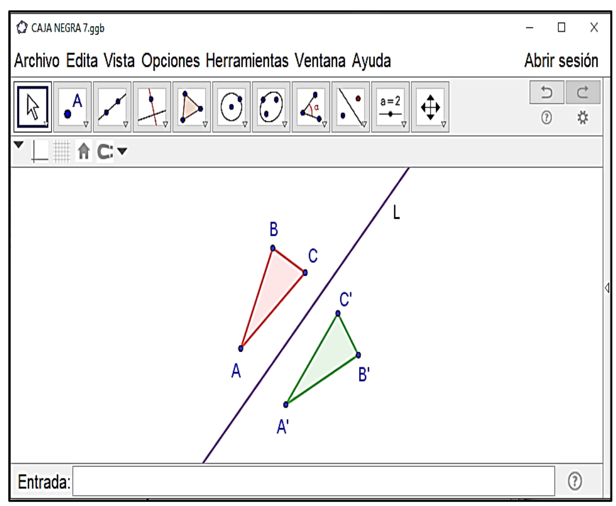


Fig. 24. Caja Negra 6–Actividad 2

4.2.1.2. CONDICIONES DE APLICACIÓN

La hoja de trabajo N°1 fue desarrollada por 48 estudiantes matriculados en el curso de Matemáticas para el Diseño, semestre 2018–2. De estos 48 estudiantes 23 eran de sexo masculino y 25 de sexo femenino. Un total de 26 estudiantes pertenecían al programa académico de diseño de medios interactivos (DMI) y 22 al programa académico de diseño industrial (DI).

El tiempo de aplicación de la hoja de trabajo fue de dos horas de clase (120 minutos) y la idea era hacer un trabajo individual. Aquí aparece la primera dificultad y es que a pesar de que se les había pedido asistir a clase con su computador portátil, muchos de ellos no lo tienen disponible y deben trabajar en parejas y algunos hacer uso de la aplicación de GeoGebra en su teléfono celular. A pesar de esta situación, los estudiantes desarrollan la hoja de trabajo de manera individual y escriben sus conclusiones en el documento que se les entrega para tal efecto.

A medida que los estudiantes van explorando las cajas el profesor pasa por sus estaciones de trabajo para aclarar situaciones que así lo ameriten. Dentro las situaciones más frecuentes están las de la descarga inicial de los archivos de GeoGebra y su apertura en el portátil o teléfono celular. Los estudiantes muestran bastante destreza en el manejo de las herramientas básicas que ofrece el software como medir ángulos, distancias e indagar por relaciones entre objetos de la construcción. También muestran destreza y una inusual tendencia de hacer uso de la herramienta circunferencia en la mayoría de las construcciones dadas.
Cuarenta minutos antes de finalizar la actividad de clase se inicia el proceso de socialización grupal. Los estudiantes tienen la oportunidad de manifestar las dificultades que surgieron durante el proceso, así como las conclusiones a las que llegaron a partir de la exploración de la construcción.

4.2.1.3. ANÁLISIS CUANTITATIVO

La hoja de trabajo N°1 consta de dos actividades en las que se plantean dos ejercicios de exploración que lleven a los estudiantes a concluir que la transformación presentada es una simetría axial. La primera actividad se plantea para la simetría axial del punto P respecto a la línea recta L. En la segunda actividad se busca generalizar noción de simetría axial a un polígono, en este caso un triángulo (ΔABC). A la actividad 1 se le otorga un valor del 60% y a la actividad 2, por tratarse de una generalización, se le otorga un valor del 40% de la nota.

El 97.9% de los estudiantes aprueba la hoja de trabajo y sólo un estudiante (E43), que corresponde al 2.1% obtiene una nota no aprobatoria.

La nota promedio general de la prueba fue de 4.5 (en la escala de 0 a 5). Haciendo distinción por programa académico se encuentra que los estudiantes de DI obtuvieron un promedio de 4.4, frente a un promedio de 4.6 de los estudiantes de DMI.

Respecto a los resultados por pregunta se tiene que son las preguntas 4.1 y 4.2 las que presentan menor desempeño, con notas de 0.9 y 0.85 sobre una ponderación 1.0 dada a esas preguntas. En estas preguntas los estudiantes obtienen resultados por debajo de su ponderación debido a los errores comunicativos que se presentan y que son en términos generales los siguientes:

- Definir el punto P' o el triángulo $\Delta A'B'C'$ como objetos dados en la construcción.
- No hacen claridad acerca de que las rectas perpendiculares al eje de simetría L se deben trazar por los vértices del triángulo y no por "cualquier punto del triángulo".
- No tener clara la diferencia entre segmento y recta.
- Tener la idea errónea de que el punto P es perpendicular a la línea recta L.

La nota promedio general de la pregunta 3 en ambas actividades es de 1.35 (en una escala de 0 a 5) sobre un valor de 1.5 dado a esa pregunta. Estas preguntas son especialmente importantes porque son aquellas donde los estudiantes ponen en acción la etapa exploratoria de la caja negra. La mayoría de los problemas se relación con aspectos comunicativos relacionados con nociones de la geometría elemental como lo son: segmento, recta, paralelismo y perpendicularidad. El uso de la herramienta relación que ofrece el software GeoGebra no es muy generalizado por parte de los estudiantes, llevándolos, como se verá en el apartado siguiente, a cometer errores de percepción, en sus conjeturas, respecto a las posiciones relativas de los elementos geométricos que hacen parte de la construcción. Lo anterior evidencia poco desarrollo de las estrategias de control.

Los siguientes son los resultados de obtenidos en el análisis estadístico:

1. **Diferencia de promedios por carrera, suponiendo igualdad de varianzas.**

Método

σ_1: desviación estándar de DI
σ_2: desviación estándar de DMI
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

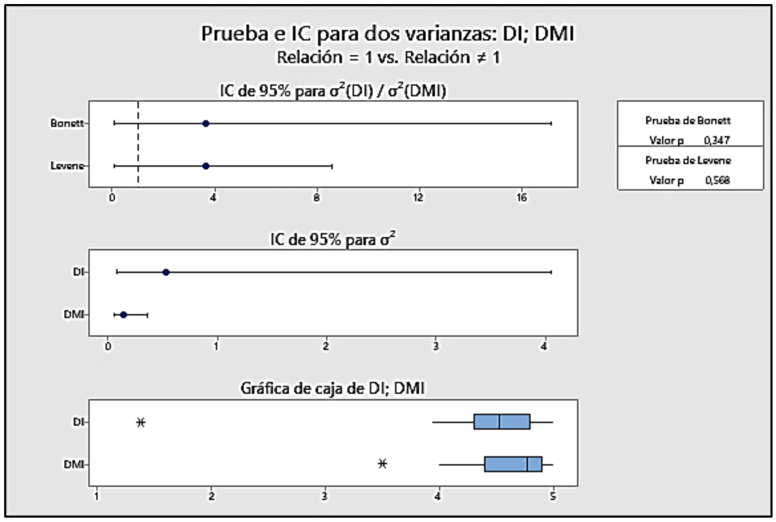
Prueba

Hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna H_1: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia $\alpha = 0,05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	*			0,347
Levene	0,33	1	46	0,568

Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
DI	22	0,726	0,527	(0,083; 4,059)
DMI	26	0,378	0,143	(0,064; 0,371)



Método

μ_1: media de DI
μ_2: media de DMI
Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
DI	22	4,407	0,726	0,15
DMI	26	4,642	0,378	0,074

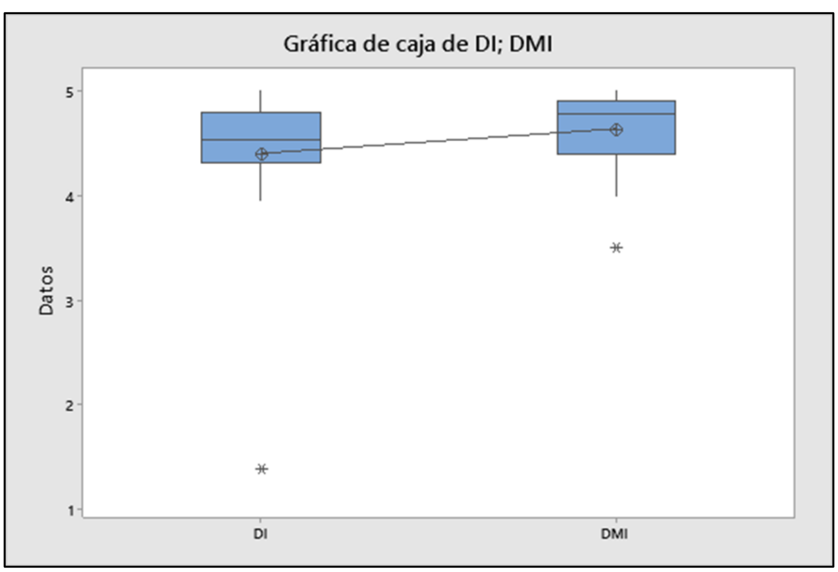
Estimación de la diferencia

Diferencia	Desv.Est. agrupada	IC de 95% para la diferencia
-0,236	0,564	(-0,565; 0,093)

Prueba

Hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
Hipótesis alterna H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Valor T	GL	Valor p
-1,44	46	0,156



2. Diferencia de promedios por grupos, suponiendo igualdad de varianzas.

Método

σ_1: desviación estándar de GRUPO 1
σ_2: desviación estándar de GRUPO 3
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

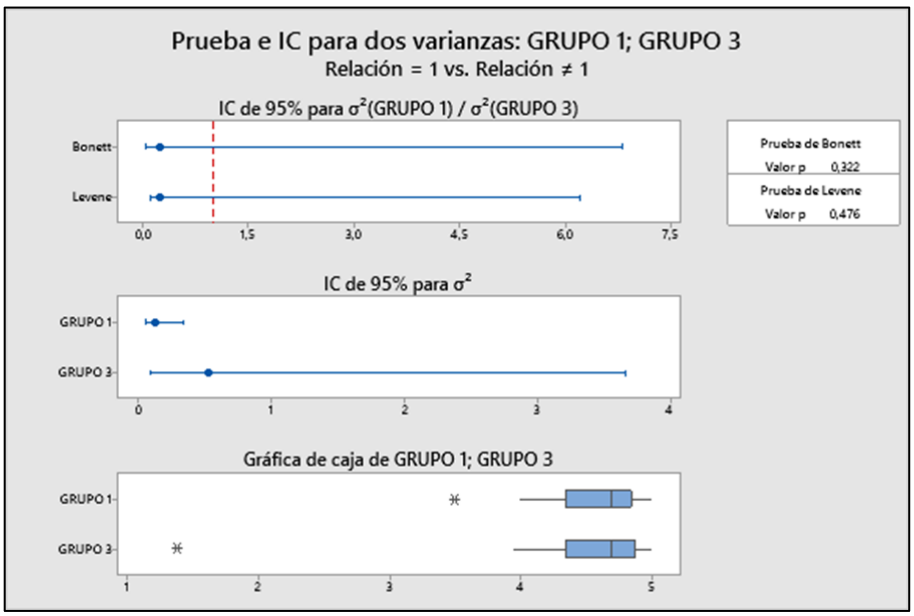
Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
GRUPO 1	24	0,363	0,132	(0,059; 0,349)
GRUPO 3	24	0,729	0,531	(0,091; 3,667)

Prueba

Hipótesis nula	H_0: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna	H_1: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia	$\alpha = 0,05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	0,98	1		0,322
Levene	0,52	1	46	0,476



Método

μ_1: media de GRUPO 1
μ_2: media de GRUPO 3
Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
GRUPO 1	24	4,572	0,363	0,074
GRUPO 3	24	4,497	0,729	0,15

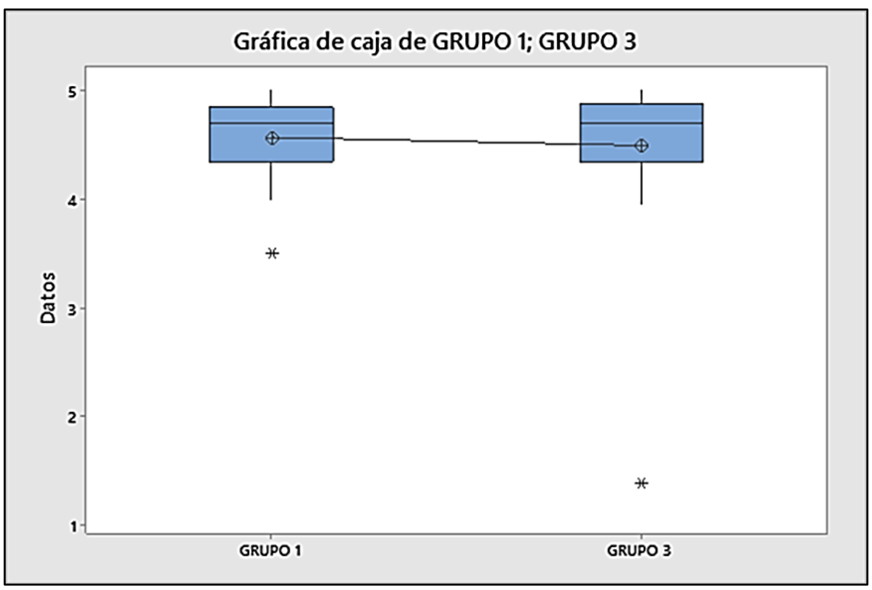
Estimación de la diferencia

Diferencia	Desv.Est. agrupada	IC de 95% para la diferencia
0,075	0,576	(-0,259; 0,410)

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
Hipótesis alterna $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

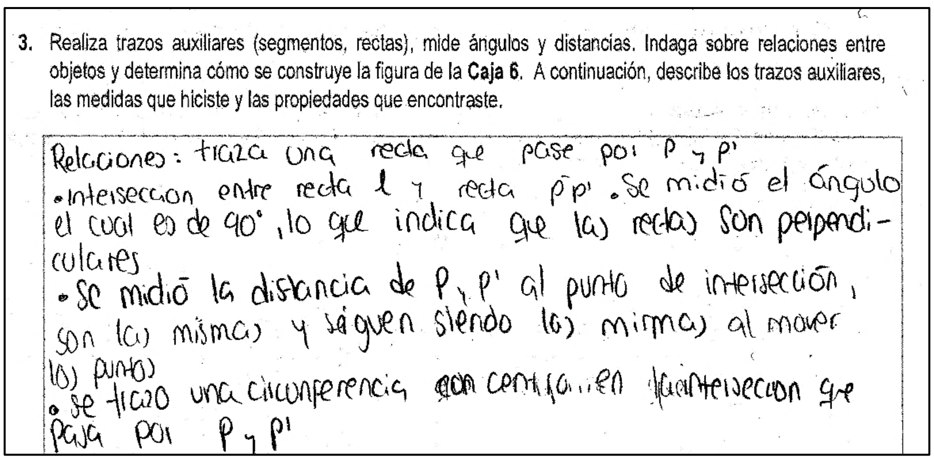
Valor T	GL	Valor p
0,45	46	0,653



4.2.1.4. ANÁLISIS CUALITATIVO

Como se mencionó anteriormente, el desarrollo de la hoja de trabajo se hizo de manera individual y las producciones escritas de los estudiantes son el insumo para el desarrollo de la presente sección. A continuación, se presentarán algunos ejemplos de las producciones de los estudiantes que dan cuenta del uso de diversas estrategias heurísticas utilizadas, recursos, creencias y estrategias de control.

Ejemplo 1: la estudiante E7 usa como estrategia heurística el medir. Para ello hace uso de las herramientas de medida que le ofrece GeoGebra y logra comprobar, mediante la medición del ángulo entre ellas, que las rectas $\overleftrightarrow{PP'}$ y L son perpendiculares. De igual manera mide las distancias entre los puntos P y P' respecto al punto de intersección de dichas rectas, encontrando que son iguales y se mantienen así a pesar de que los puntos cambien de posición. Lo anterior lo verifica a través de la prueba de arrastre que permite el software, propiedad de invarianza esta, que sin lugar a dudas no sería sencillo de determinar en una construcción con lápiz y papel.

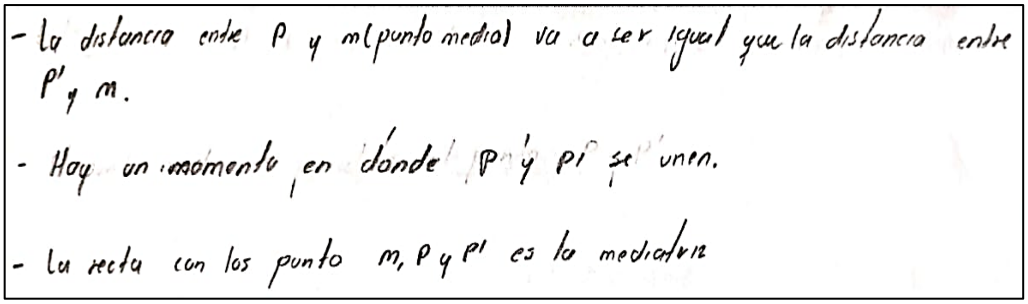


3. Realiza trazos auxiliares (segmentos, rectas), mide ángulos y distancias. Indaga sobre relaciones entre objetos y determina cómo se construye la figura de la **Caja 6**. A continuación, describe los trazos auxiliares, las medidas que hiciste y las propiedades que encontraste.

Relaciones: traza una recta que pase por P y P'
• interseccion entre recta l y recta PP' . Se midió el ángulo el cual es de 90°, lo que indica que las rectas son perpendi-culares
• Se midió la distancia de P y P' al punto de intersección, son las mismas y siguen siendo las mismas al mover los puntos
• se trazo una circunferencia con centro en la intersección que pasa por P y P'

Fig. 25. Manuscrito del estudiante E7

Es justamente la prueba de arrastre citada anteriormente la que le permite al estudiante E8 usar la estrategia heurística de particularizar, encontrando, como como lo manifiesta en su manuscrito, un caso en el que el punto P y el punto P' coinciden en el plano. Esta situación pudo haber sido aprovechada por el estudiante como una estrategia de control para entender lo que sucede con la simetría axial de un punto cuando éste está ubicado sobre el eje de simetría, pero desafortunadamente no hace más exploraciones ni comentarios al respecto.



- la distancia entre P y m(punto medio) va a ser igual que la distancia entre P' y m.
- Hay un momento en donde P y P' se unen.
- la recta con los punto m, P y P' es la mediatriz

Fig. 26. Manuscrito del estudiante E8.

<u>**Ejemplo 2**</u>**:** En la fase de exploración de la caja negra 6, la estudiante E27 utiliza la estrategia heurística de realizar trazos auxiliares y medidas similares a las siguientes:

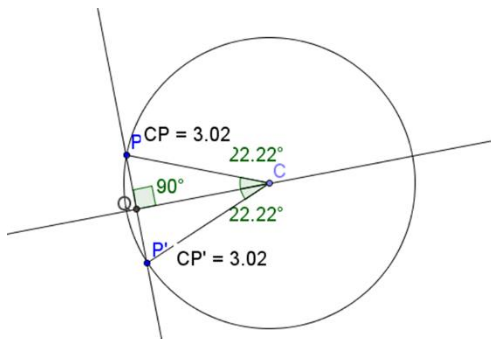


Fig. 27. Reconstrucción de los trazos y medidas realizadas por la estudiante E27

A partir de esta exploración, el estudiante logra determinar las distancias de CP y CP', pero no consigue reconocer que estos segmentos son radios de la misma circunferencia y que por tanto son congruentes. Al no usar este recurso, tuvo que utilizar la *estrategia heurística* de medir y llegó a concluir que estas distancias eran iguales. También midió ángulos como $\measuredangle PCQ$, $\measuredangle QCP'$ y $\measuredangle PQC$. Logra concluir que el ángulo $\measuredangle PQC$ es de 90º.

Existen dos elementos importantes en la exploración: (i) el trazo de la circunferencia con centro en un punto arbitrario C sobre la recta dada y (ii) la relación de perpendicularidad entre las rectas. Después de este proceso realiza la descripción paso a paso para construir la simetría axial y cuyo manuscrito se muestra a continuación.

De acuerdo a lo que has explorado hasta el momento, completa la siguiente tabla	
Listado de objetos dados	**Listado de pasos para hacer la construcción**
Recta L. L> Puntos A y B Punto P	1 Dada la recta L y el punto P se traza una perpendicular a dicha recta que pase por P 2 Se traza una circunferencia ~~que~~ con centro en algún punto de la recta y que llegue hasta P 3 En la intersección entre la perpendicular y la circunferencia será la P'. (la intersección que no es P).

Fig. 28. Manuscrito de la Estudiante E27 para construir la simetría Axial

Como se puede leer en punto 2 del manuscrito anterior, el estudiante E27 indica que el centro de la circunferencia a trazar podría ser cualquier punto de la recta, siempre que dicha circunferencia pase por el punto P. De este asunto también se da cuenta el estudiante E9, cuyo aporte es comentado en el ejemplo siguiente.

<u>Ejemplo 3</u>: en sus pasos de construcción, el estudiante E9 propone construir una circunferencia con centro en un punto C, arbitrario, sobre la recta L. Posteriormente, trazar una línea recta que pase por el punto P y que sea perpendicular a la recta L, y encontrar el punto de intersección de dicha perpendicular y la circunferencia, que será el punto P' buscado. Lo interesante de su construcción es la libertad que se tiene sobre la ubicación del centro de la circunferencia en la recta L, encontrándose que no necesariamente debería ser el punto de intersección de la perpendicular a L que pasa por el punto P, como lo considera la construcción estándar. En la siguiente gráfica se muestra la construcción propuesta por E9 para tres centros diferentes, ubicados de manera arbitraria sobre la recta L, notándose que la ubicación del punto P' no depende del centro que se elija.

Punto P recta L Punto A Punto B	*Se traza una recta que pase por A y B *se hace una circunferencia con centro en la recta L y radio CP se traza una linea perpendicular a P y L y donde intersecte con circunferencia, es el punto P'

Fig. 29. Manuscrito de construcción E9

En la siguiente figura se muestra la reconstrucción del protocolo de construcción propuesto por E9, donde se muestran tres posibles circunferencias, todas pasando por el punto P, pero con centros diferentes, y las cuales permiten encontrar el punto P'

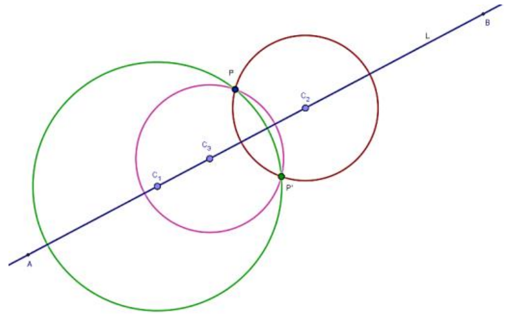


Fig. 30. Construcción propuesta por el estudiante E9

<u>Ejemplo 4</u>: En el caso del estudiante E32, su fase exploratoria consiste en usar la estrategia heurística de arrastre, toma de medidas, particularización y visualización. Las usa para concluir que los puntos P y P' se mueven generando un efecto de "espejo" respecto a la recta L, que la perpendicularidad entre los segmentos $\overline{PP'}$ y $\overline{AB}$ se mantiene sin importar la posición del punto P y, finalmente, que las distancias de los puntos P y P' a los puntos A y B serán siempre iguales, lo que indica que los triángulos ΔAPB y $\vartriangle AP'B$ son isósceles.

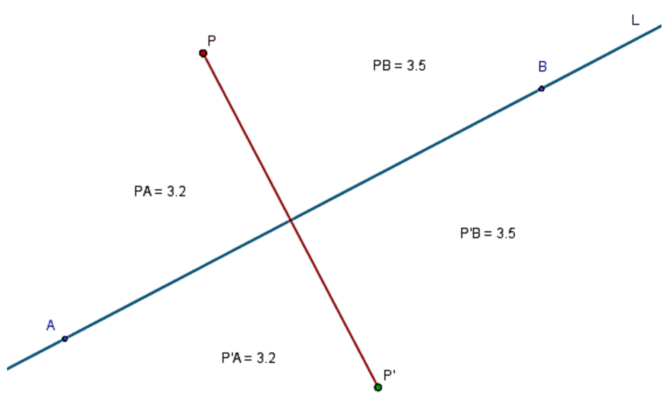
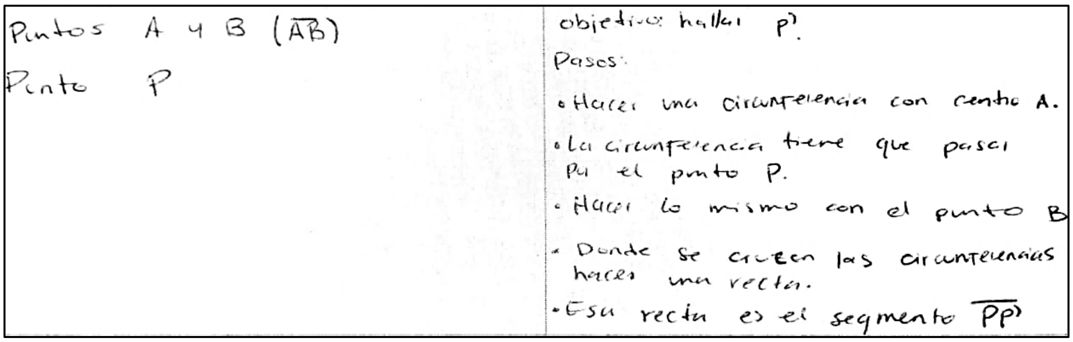


Fig. 31. Reconstrucción de los trazos y medidas del estudiante E32

Para generar la construcción de la simetría axial del punto P respecto a la recta L, E32 usa como referencia los puntos A y B, que son los que definen el eje de simetría L. Seguidamente, construye dos circunferencias con centros en los puntos A y B que pasan por el punto P (esta condición no se hace explícita en el texto generado en su fase exploratoria, pero sí cuando enuncia los pasos para realizar la construcción). Finalmente encuentra los puntos de corte de las dos circunferencias, uno de los cuales corresponde al punto P y el otro al punto P'. Para terminar, propone trazar la línea recta $\overleftrightarrow{PP'}$, manifestando, como se puede leer en su manuscrito, que esta recta es el segmento $\overline{PP'}$.

Resulta importante aclarar que en esta construcción la recta $\overleftrightarrow{PP'}$ no corresponde a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y que del discurso de E32 se puede inferir que para él no está clara la diferencia entre las nociones de recta y segmento.



Puntos A y B ($\overline{AB}$)
Punto P

objetivo: hallar P'.
Pasos:
• Hacer una circunferencia con centro A.
• La circunferencia tiene que pasar por el punto P.
• Hacer lo mismo con el punto B
• Donde se crucen las circunferencias hacer una recta.
• Esa recta es el segmento $\overline{PP'}$

Fig. 32. Manuscrito del estudiante E32 para construir la simetría Axial

A partir de los pasos descritos en el manuscrito anterior por el estudiante E32 se hace la siguiente reconstrucción de usando el software GeoGebra.

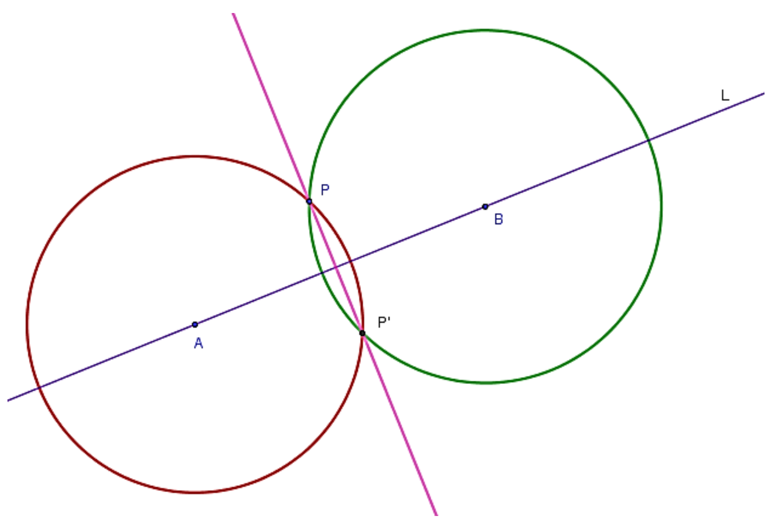


Fig. 33. Reconstrucción de la construcción propuesta por el estudiante E32

4.2.2. ANÁLISIS DE LA HOJA DE TRABAJO N°2: SIMETRÍA CENTRAL

La hoja de trabajo N°2 se desarrolla a partir de la exploración de la **caja negra 8**. En esta caja se pretende enfrentar a los estudiantes a la transformación geométrica conocida como ***simetría central*** (reflexión respecto a un punto).

4.2.2.1. DESCRIPCIÓN DE LA HOJA DE TRABAJO

La actividad 3 propuesta en la hoja de trabajo N°2 está referida a la caja negra 8 y en ella se les presentan el punto O y los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, para los cuales se cumple que el segundo triángulo es la simetría central del primero respecto al punto O, conocido como centro de simetría.

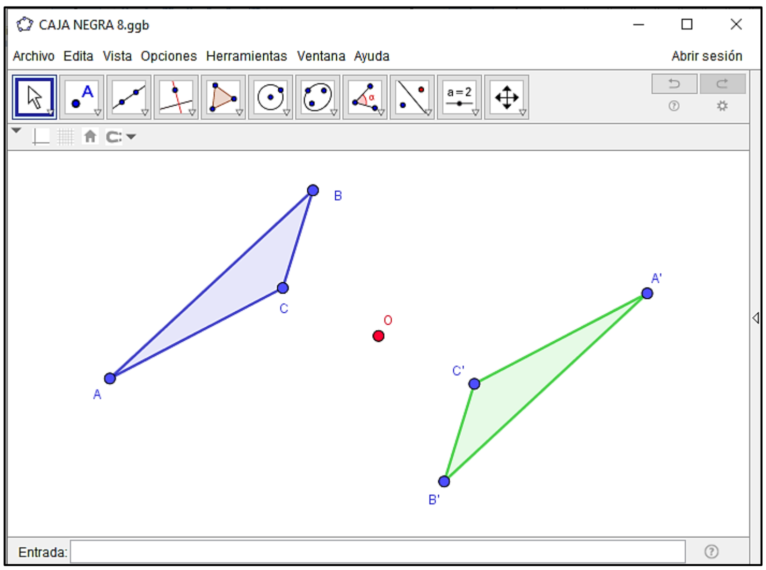


Fig. 34. Caja Negra 8

4.2.2.2. CONDICIONES DE APLICACIÓN

La hoja de trabajo N°2 fue desarrollada por 48 estudiantes matriculados en el curso de Matemáticas para el Diseño, semestre 2018–2. De estos 48 estudiantes 22 eran de sexo masculino y 26 de sexo femenino. Un total de 26 estudiantes pertenecían al programa académico de diseño de medios interactivos (DMI) y 22 al programa académico de diseño industrial (DI).

Al igual que la hoja de trabajo N°1, el tiempo de aplicación de la hoja de trabajo fue de dos horas de clase (120 minutos) y se desarrolla de forma individual. Los estudiantes escriben sus conclusiones en el documento que se les entrega para tal efecto.

Cuarenta minutos antes de finalizar la actividad de clase se inicia el proceso de socialización grupal. Los estudiantes tienen la oportunidad de manifestar las dificultades que surgieron durante el proceso, así como las conclusiones a las que llegaron a partir de la exploración de la construcción. La sesión de trabajo termina con la formalización del concepto de simetría central, sus elementos característicos y sus propiedades.

4.2.2.3. ANÁLISIS CUANTITATIVO

La hoja de trabajo N°2 consta de una actividad en la que se plantea un ejercicio de exploración que lleve a los estudiantes a concluir que la transformación aplicada al triángulo $\triangle ABC$ para obtener como imagen el triángulo $\triangle A'B'C'$ consiste en una simetría central respecto al punto O

El 91.7% de los estudiantes aprueba la hoja de trabajo y sólo cuatro estudiantes (E11, E24, E30 y E39), que corresponde al 8.3% obtiene una nota no aprobatoria. La nota promedio general de la hoja de trabajo fue de 4.5. Por programa académico, se encuentra que los estudiantes de DI obtuvieron un promedio de 4.4, frente a un promedio de 4.6 de los estudiantes de DMI.

Los siguientes son los resultados de obtenidos en el análisis estadístico:

1. **diferencia de promedios por carrera, suponiendo igualdad de varianzas.**

Método

σ_1: desviación estándar de DI
σ_2: desviación estándar de DMI
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

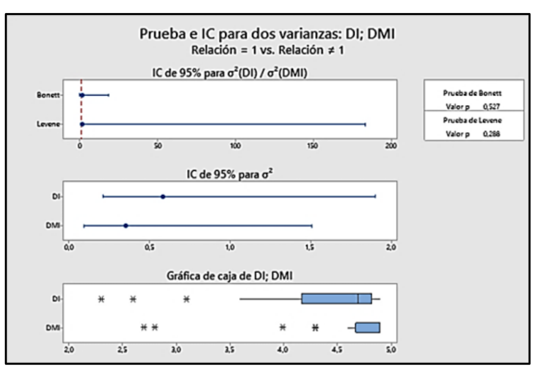
Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
DI	22	0,764	0,584	(0,216; 1,903)
DMI	26	0,594	0,353	(0,097; 1,507)

Prueba

Hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna H_1: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia $\alpha = 0,05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	*			0,527
Levene	1,16	1	46	0,288



Método

μ_1: media de DI
μ_2: media de DMI
Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

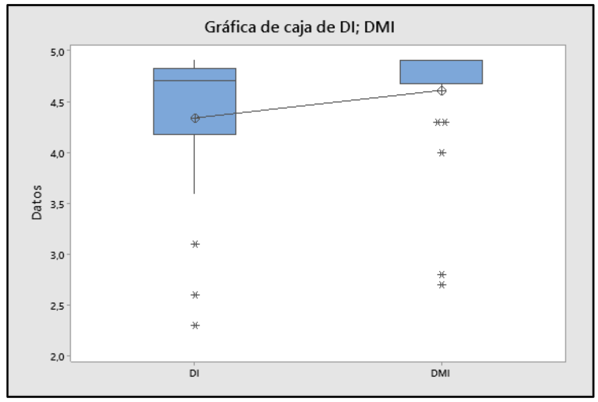
Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
DI	22	4,336	0,764	0,16
DMI	26	4,608	0,594	0,12

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
Hipótesis alterna $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Valor T	GL	Valor p
-1,38	46	0,173



2. Diferencia de promedios por grupos, suponiendo igualdad de varianzas.

Método

σ_1: desviación estándar de Grupo1
σ_2: desviación estándar de Grupo3
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

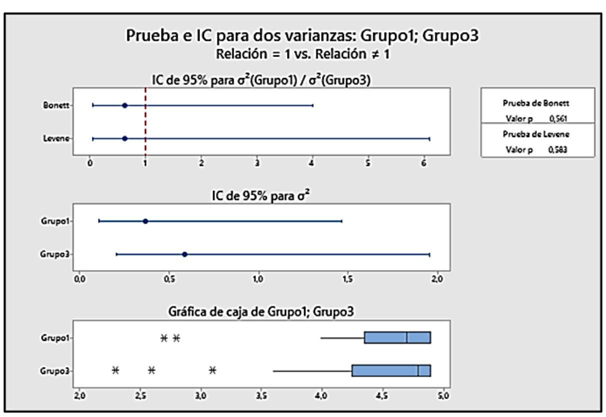
Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
Grupo1	24	0,606	0,367	(0,109; 1,468)
Grupo3	24	0,765	0,585	(0,207; 1,958)

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna $H_1: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	0,34	1		0,561
Levene	0,31	1	46	0,583



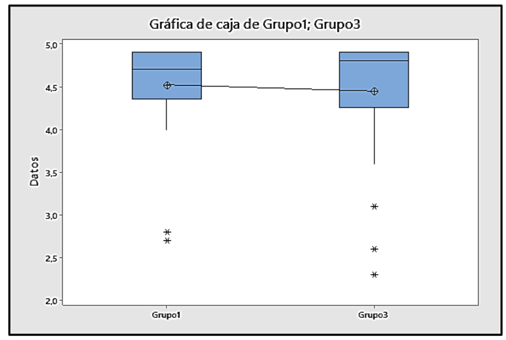
Método

μ_1: media de Grupo1
μ_2: media de Grupo3
Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
Grupo1	24	4,521	0,606	0,12
Grupo3	24	4,446	0,765	0,16



Prueba

Hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
Hipótesis alterna H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Valor T	GL	Valor p
0,38	46	0,708

4.2.2.4. ANÁLISIS CUALITATIVO

A continuación, se presentarán algunos ejemplos de las producciones de los estudiantes que dan cuenta del uso de diversas estrategias heurísticas utilizadas, recursos, creencias y estrategias de control. De igual manera, se busca con este análisis resaltar aquellos procesos de construcción ideados por los estudiantes, a partir de su proceso de exploración, y que se diferencian del método estándar para construir una simetría central.

Ejemplo 1: la fase exploratoria de la caja negra 8 de la estudiante E27 inicia con el trazado de líneas rectas $\overleftrightarrow{BO}, \overleftrightarrow{CO}$ y $\overleftrightarrow{AO}$. Al hacer este trazado de líneas verifica, mediante la estrategia heurística de visualización, que los puntos B', C' y A' también pertenecen a estas líneas rectas.

Aquí resulta importante mencionar lo valiosas que resultan ser las estrategias de control que deberían implementar los estudiantes para encontrar este tipo de relaciones entre los objetos geométricos de la construcción. El software GeoGebra ofrece herramientas que posibilitan la verificación de estas relaciones de una forma más precisa. Por ejemplo, la herramienta relación le hubiese permitido encontrar, no mediante visualización, que efectivamente estos puntos imagen también pertenecen a las rectas trazadas.

En esta etapa de exploración realizada por E27 hay otro elemento importante para resaltar y que es producto del uso de la estrategia heurística de arrastre, que posibilita el uso del software. Haciendo uso de esta estrategia, E27 logra detectar que al mover cualquiera de los vértices del triángulo original $\triangle ABC$ el vértice correspondiente en el triángulo imagen $\triangle A'B'C'$ lo hace, pero en sentido contrario. Este hecho resulta de gran importancia en la etapa de socialización realizada al final de la actividad porque constituye una de las características fundamentales de la simetría central, que es la de tratarse de una trasformación inversa, en el sentido que cambia la orientación de los vértices del triángulo original.

Estos hallazgos realizados por la estudiante E27 se pueden leer en el siguiente manuscrito:

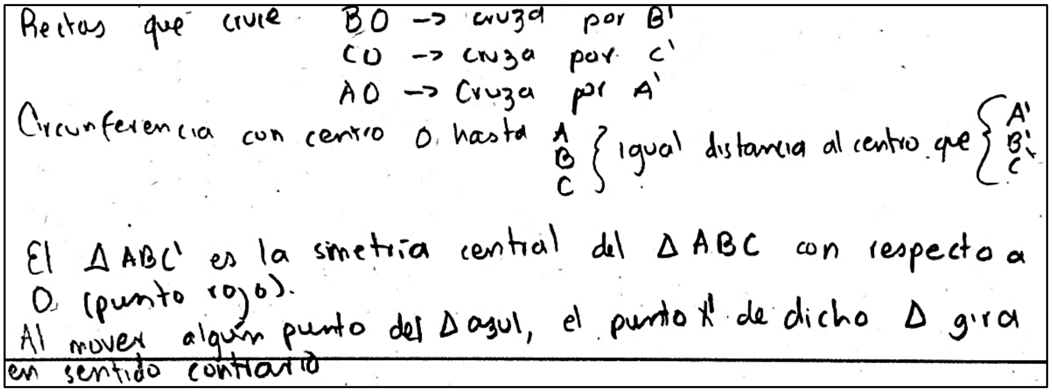
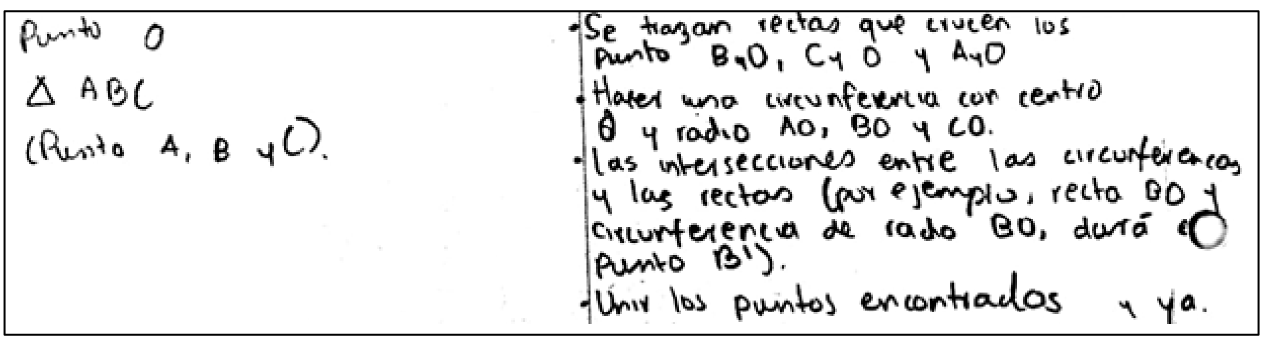

Rectas que cruce BO -> cruza por B'
CO -> cruza por C'
AO -> cruza por A'
Circunferencia con centro O hasta A B C { igual distancia al centro que { A' B' C'
El Δ ABC' es la simetría central del Δ ABC con respecto a O (punto rojo).
Al mover algún punto del Δ azul, el punto X' de dicho Δ gira en sentido contrario

Fig. 35. Manuscrito de E27 – Exploración

En el protocolo de construcción definido por E27 se considera el trazado de líneas recta y circunferencias centradas en el punto O y radios $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{CO}$, como se puede leer en el siguiente manuscrito de su construcción:


Punto O
Δ ABC
(Punto A, B y C).

- Se trazan rectas que crucen los punto B y O, C y O y A y O
- Hacer una circunferencia con centro O y radio AO, BO y CO.
- Las intersecciones entre las circunferencias y las rectas (por ejemplo, recta BO y circunferencia de radio BO, dará el punto B').
- Unir los puntos encontrados y ya.

Fig. 36. Manuscrito de construcción de E27 – simetría central

La siguiente imagen es una recreación de los pasos descritos por E27 para construir la simetría central del vértice B del triángulo $\triangle ABC$, con centro en el punto O.

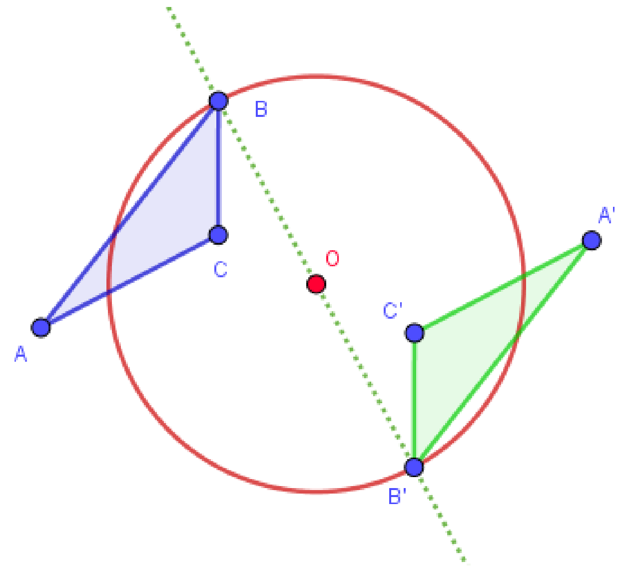


Fig. 37. Reconstrucción del protocolo de construcción de E27

En el proceso de socialización de la actividad, la estudiante E27 manifiesta que la simetría central con centro en el punto O también se puede construir a través de la composición de dos simetrías axiales respecto a dos líneas rectas que pasen por O y sean perpendiculares. A continuación, se muestra la reconstrucción de lo propuesto por la estudiante E27 como manera alterna para construir la simetría central del triángulo $\triangle ABC$ respecto al centro O.

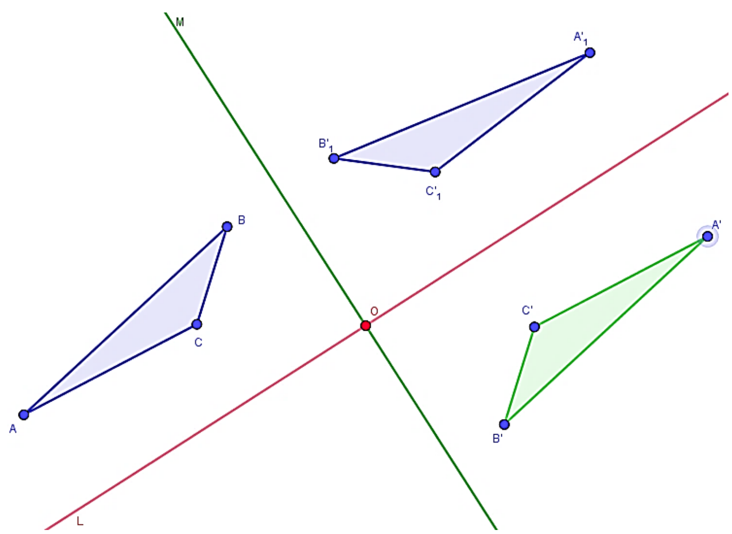


Fig. 38. Reconstrucción de la propuesta de la estudiante E27

En la construcción anterior se puede ver que las líneas rectas L y M pasan por el punto O y son perpendiculares entre sí. El triángulo $\triangle A'B'C'$ es la simetría central del triángulo ΔABC respecto al punto O y coincide con la secuencia de simetrías axiales del triángulo $\triangle ABC$, primero respecto a la recta M (generando el triángulo de vértices $\triangle A_1'B_1'C_1'$) y después respecto a la recta a la recta L (generando el triángulo $\triangle A'B'C'$).

Cabe anotar que el resultado de la composición no depende de las direcciones de las rectas que pasen por el punto O, siempre y cuando sean perpendiculares. Puede verse a continuación que el triángulo $\triangle A'B'C'$ no cambia su posición al cambiar la dirección de la recta L.

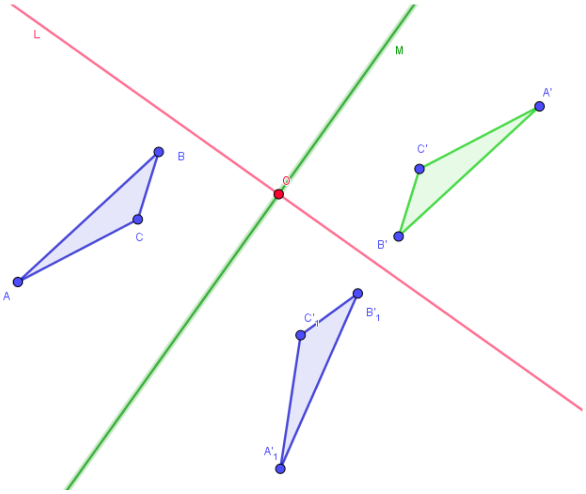
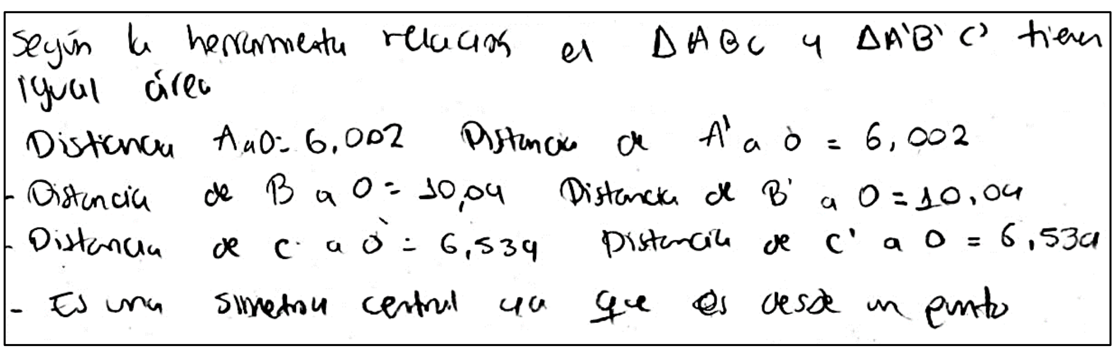


Fig. 39. Simetría central como composición de simetrías axiales (E27)

De otro lado, en su etapa exploratoria la estudiante E38 usa la heurística de medir distancias entre los vértices de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ al centro de simetría O, encontrando que son iguales. Hace lo mismo para las áreas de ambos polígonos (Ver manuscrito de E38)

<u>Ejemplo 2</u>: en su etapa exploratoria la estudiante E38 usa la estrategia heurística de medir distancias entre los vértices de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ al centro de simetría O, encontrando que son iguales. Hace lo mismo para las áreas de ambos polígonos (Ver manuscrito de E38)



Según la herramienta relacion el ΔABC y ΔA'B'C' tienen igual área
Distancia A a O: 6,002 Distancia de A' a O = 6,002
- Distancia de B a O = 10,04 Distancia de B' a O = 10,04
- Distancia de C a O = 6,539 Distancia de C' a O = 6,539
- Es una simetria central ya que es desde un punto

Fig. 40. Manuscrito de E38 -Exploración Caja Negra 8

Al 48% de los estudiantes que realizaron la hoja de trabajo le cuesta usar términos geométricos adecuados para referirse a la construcción de las circunferencias que usan para determinar los vértices del triángulo imagen. Se refieren a circunferencias con “centro en el punto O y radio el punto A” o “radio en los puntos ABC”, cuando lo correcto es escribir: circunferencia de centro en el punto O y radio el segmento $\overline{OA}$, por ejemplo.

4.2.3. ANÁLISIS DE LA HOJA DE TRABAJO 3: TRASLACIÓN

La hoja de trabajo N°3 se desarrolla a partir de la exploración de la caja negra 9. En esta caja se pretende enfrentar a los estudiantes a la transformación geométrica conocida como ***traslación en dirección de un vector***.

4.2.3.1. DESCRIPCIÓN DE LA HOJA DE TRABAJO

La actividad 4 propuesta en la hoja de trabajo N°3 está referida a la caja negra 9 y en ella se les presentan los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, para los cuales se cumple que el segundo triángulo es la traslación del primero en dirección a un vector dado.

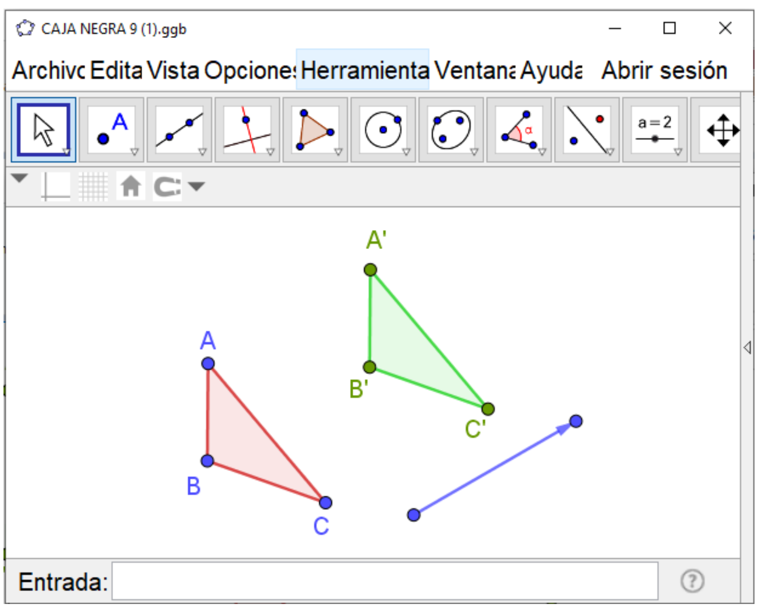


Fig. 41. Caja Negra 9

4.2.3.2. CONDICIONES DE APLICACIÓN

La hoja de trabajo N°3 fue desarrollada por 46 estudiantes matriculados en el curso de Matemáticas para el Diseño, semestre 2018–2. De estos 46 estudiantes 21 eran de sexo masculino y 25 de sexo femenino. Un total de 25 estudiantes pertenecían al programa académico de diseño de medios interactivos (DMI) y 21 al programa académico de diseño industrial (DI).

Al igual que las anteriores hojas de trabajo, el tiempo de aplicación fue de dos horas de clase (120 minutos) y se desarrolla de forma individual. Los estudiantes escriben sus conclusiones en el documento que se les entrega para tal efecto.
Cuarenta minutos antes de finalizar la actividad de clase se inicia el proceso de socialización grupal. Los estudiantes tienen la oportunidad de manifestar las dificultades que surgieron durante el proceso, así como las conclusiones a las que llegaron a partir de la exploración de la construcción. La sesión de trabajo termina con la formalización del concepto de traslación, sus elementos característicos y sus propiedades.

4.2.3.3. ANÁLISIS CUANTITATIVO

Como se mencionó antes, esta hoja de trabajo N°3 consta de una actividad en la que se plantea un ejercicio de exploración que lleve a los estudiantes a concluir que la transformación aplicada al triángulo $\triangle ABC$ para obtener como imagen el triángulo $\triangle A'B'C'$ consiste en una traslación en dirección a un vector.

Como resultado de la revisión de las producciones de los estudiantes se encuentra que el 97.8% de los estudiantes aprueba la hoja de trabajo y sólo un estudiante (E47), que corresponde al 2.2% obtiene una nota no aprobatoria de 2.0 en una escala de uno a cinco.
La nota promedio general de la hoja de trabajo fue de 4.6. Por programa académico, se encuentra que los estudiantes de DI obtuvieron un promedio de 4.3, frente a un promedio de 4.7 de los estudiantes de DMI.

Los siguientes son los resultados de obtenidos en el análisis estadístico:

1. **Diferencia de promedios por carrera, suponiendo igualdad de varianzas.**

Método

σ_1: desviación estándar de DMI
σ_2: desviación estándar de DI
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

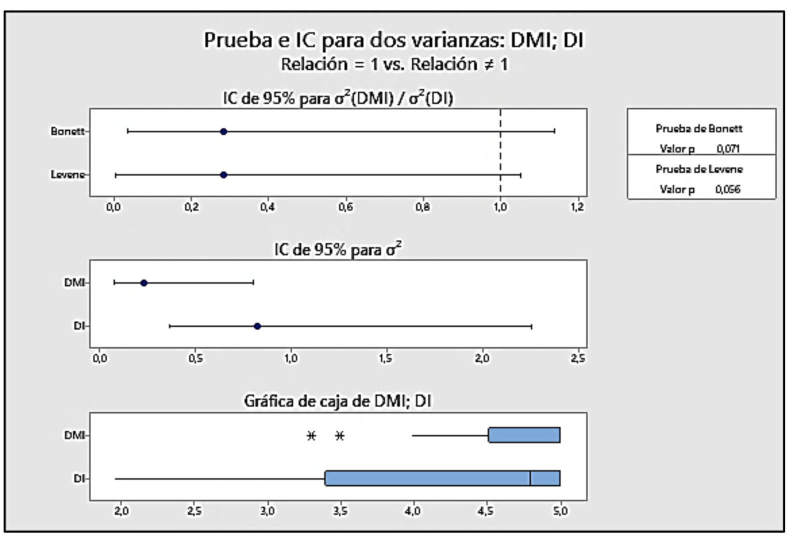
Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
DMI	25	0,484	0,234	(0,080; 0,805)
DI	21	0,908	0,825	(0,366; 2,261)

Prueba

Hipótesis nula H_0: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna H_1: $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia $\alpha = 0{,}05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	*			0,071
Levene	3,86	1	44	0,056



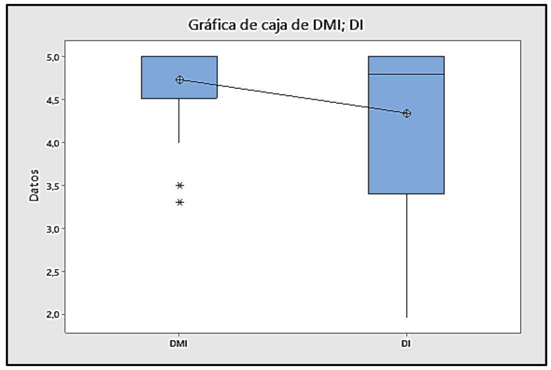
Método

μ_1: media de DMI
μ_2: media de DI
Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
DMI	25	4,733	0,484	0,097
DI	21	4,343	0,908	0,20



Prueba

Hipótesis nula $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
Hipótesis alterna $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Valor T	GL	Valor p
1,86	44	0,069

2. Diferencia de promedios por grupo, suponiendo igualdad de varianzas.

Método

σ_1: desviación estándar de Grupo 1
σ_2: desviación estándar de Grupo 3
Relación: σ_1/σ_2
Los métodos de Bonett y Levene son válidos para cualquier distribución continua.

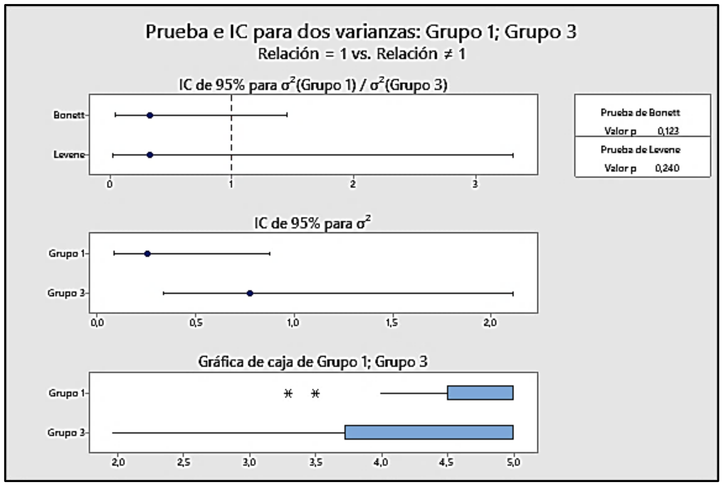
Estadísticas descriptivas

Variable	N	Desv.Est.	Varianza	IC de 95% para σ^2
Grupo 1	22	0,502	0,252	(0,087; 0,882)
Grupo 3	24	0,880	0,775	(0,336; 2,116)

Prueba

Hipótesis nula $H_0: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$
Hipótesis alterna $H_1: \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$
Nivel de significancia $\alpha = 0,05$

Método	Estadística de prueba	GL1	GL2	Valor p
Bonett	*			0,123
Levene	1,42	1	44	0,240



Método

μ_1: media de Grupo 1

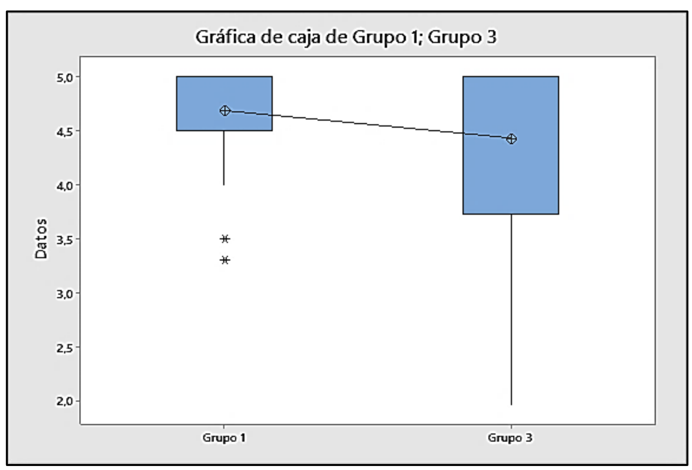
μ_2: media de Grupo 3

Diferencia: $\mu_1 - \mu_2$

Se presupuso igualdad de varianzas para este análisis.

Estadísticas descriptivas

Muestra	N	Media	Desv.Est.	Error estándar de la media
Grupo 1	22	4,688	0,502	0,11
Grupo 3	24	4,433	0,880	0,18



Prueba

Hipótesis nula H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Hipótesis alterna H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Valor T	GL	Valor p
1,19	44	0,240

4.2.3.4. ANÁLISIS CUALITATIVO

A continuación, se presentarán algunos ejemplos de las producciones de los estudiantes que dan cuenta del uso de diversas estrategias heurísticas utilizadas, recursos, creencias y estrategias de control. De igual manera, se busca con este análisis resaltar aquellos procesos de construcción ideados por los estudiantes, a partir de su proceso de exploración, y que se diferencian del método estándar para construir una simetría central. Del análisis de las producciones de los estudiantes se pueden citar tres procesos diferentes para construir la traslación del triángulo $\triangle ABC$ en dirección a un vector $\vec{v}$ dado, las cuales son presentadas en los tres ejemplos dados a continuación.

<u>Ejemplo 1</u>: la fase exploratoria, de la caja negra 9, llevada a cabo por la estudiante E10 inicia aplicando la estrategia heurística de medición de distancias, en este caso, entre los vértices homólogos de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$, para seguidamente, hacer la comparación de dichas distancias con la magnitud del vector que, en su manuscrito, llama $\overrightarrow{FG}$. En dicha exploración, E10 también usa como recurso la noción de congruencia entre triángulos.

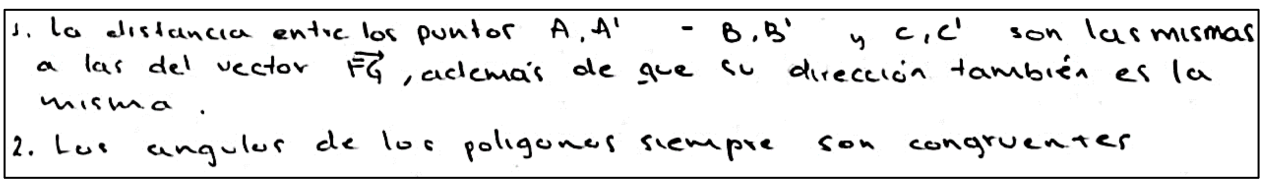

1. la distancia entre los puntos A, A' - B, B' y C, C' son las mismas a las del vector $\overrightarrow{FG}$, además de que su dirección también es la misma.
2. Los angulos de los poligonos siempre son congruentes

Fig. 42. Manuscrito de E10 – Exploración

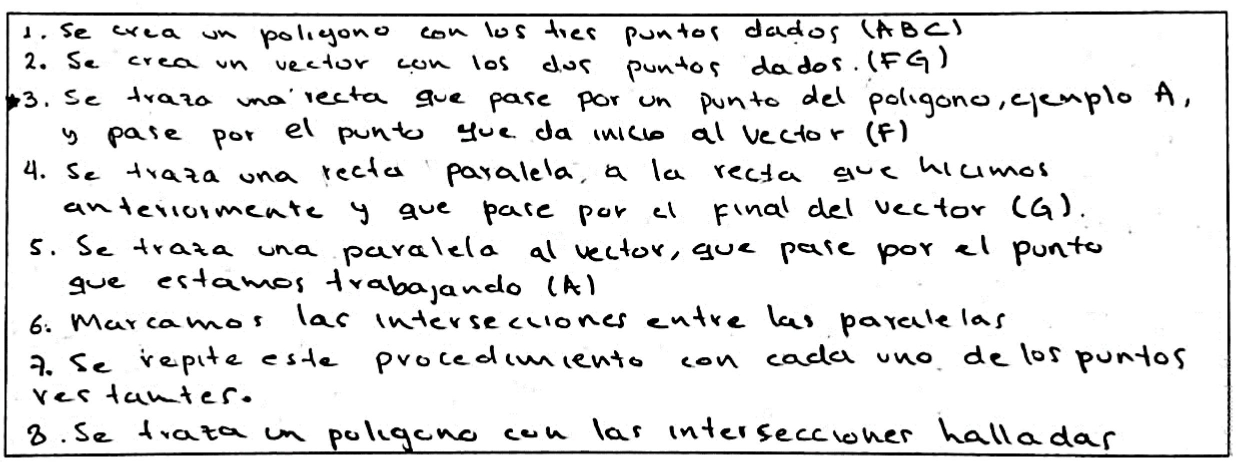

1. Se crea un poligono con los tres puntos dados (ABC)
2. Se crea un vector con los dos puntos dados. (FG)
3. Se traza una recta que pase por un punto del poligono, ejemplo A, y pase por el punto que da inicio al Vector (F)
4. Se traza una recta paralela, a la recta que hicimos anteriormente y que pase por el final del vector (G).
5. Se traza una paralela al vector, que pase por el punto que estamos trabajando (A)
6. Marcamos las intersecciones entre las paralelas
7. Se repite este procedimiento con cada uno de los puntos restantes.
8. Se traza un poligono con las intersecciones halladas

Fig. 43. Manuscrito de E10 – Protocolo de construcción.

En su protocolo de construcción, la estudiante E10, propone la siguiente secuencia de pasos para hallar la traslación en dirección de un vector $\vec{u}$, por ejemplo, del vértice C del triángulo $\triangle ABC$:

1. Trazar una línea recta que pase por el vértice C y por el punto de aplicación del vector dado (recta L)
2. Trazar una recta paralela a la primera, pero esta vez que pase por el punto final del vector (recta M).
3. Trazar una línea recta paralela al vector $\vec{u}$ que pase por el vértice C (recta N)
4. Encontrar el punto de intersección entre las rectas M y N, el cual será el punto C', que corresponde a la traslación del vértice C en dirección al vector $\vec{u}$.
5. Realizar el mismo procedimiento para los demás vértices del triángulo $\triangle ABC$.

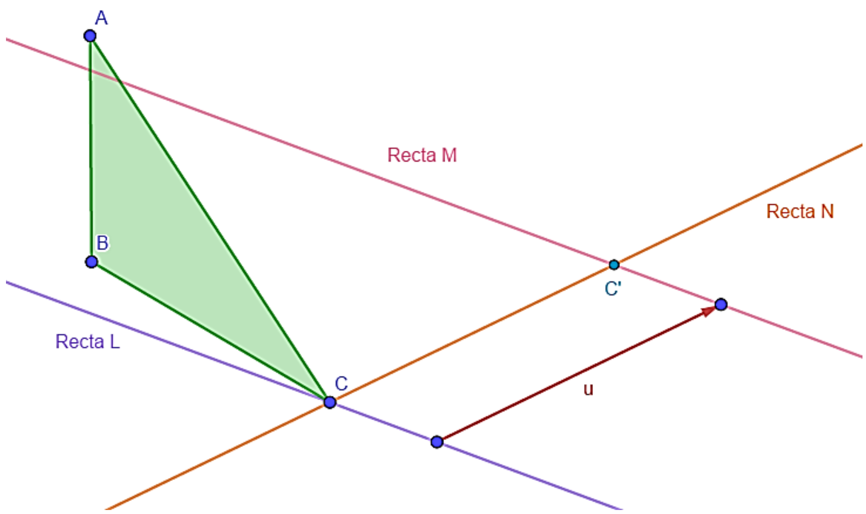


Fig. 44. Reconstrucción del protocolo propuesto por E10

__**Ejemplo 2**__**:** El estudiante E4, en su manuscrito indica que usa la herramienta *Equipolente* para construir la traslación del triángulo $\triangle ABC$, como se indica en la figura siguiente.

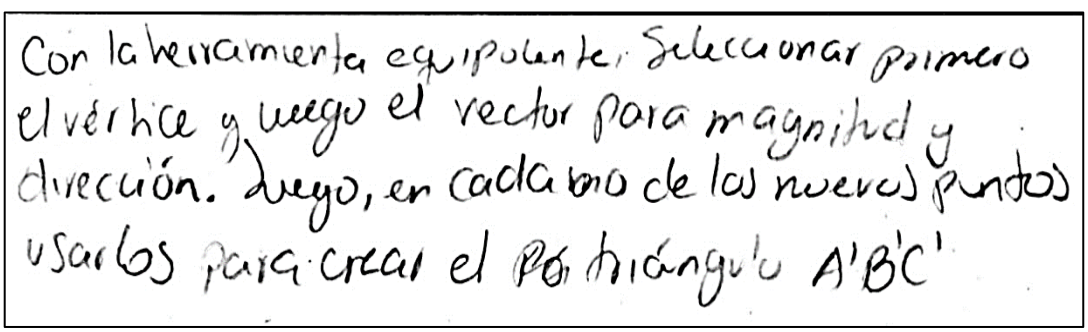

Con la herramienta equipolente, Seleccionar primero el vértice y luego el vector para magnitud y dirección. Luego, en cada uno de los nuevos puntos usarlos para crear el ~~Po~~ triángulo A'B'C'

Fig. 45. Manuscrito del estudiante E4

En la figura 46 se recrea el uso que de dicha herramienta hace el estudiante E4.

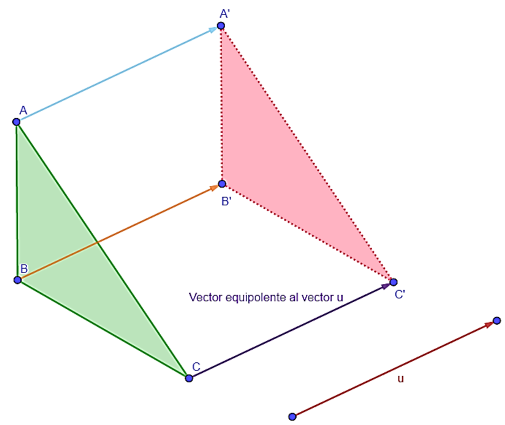


Fig. 46. Reconstrucción de la construcción propuesta por E4

Ejemplo 3: En su fase de exploración, la estudiante E18 muestra el uso de estrategias heurísticas como medir áreas y ángulos internos del triángulo y la longitud del vector. Usa la medición como estrategia de control para mostrar que las longitudes entre vértices homólogos son igual a la magnitud del vector.

También usa la estrategia heurística de arrastre y mediante ella encuentra que, al mover el triángulo original, el triángulo imagen cambia de posición en el plano, pero el vector que orienta la traslación permanece invariante.

En las dos imágenes siguientes se muestran el manuscrito que el estudiante E18 produce en su etapa exploratoria y una reconstrucción de las medidas realizadas mediante el uso de las herramientas provistas por GeoGebra.

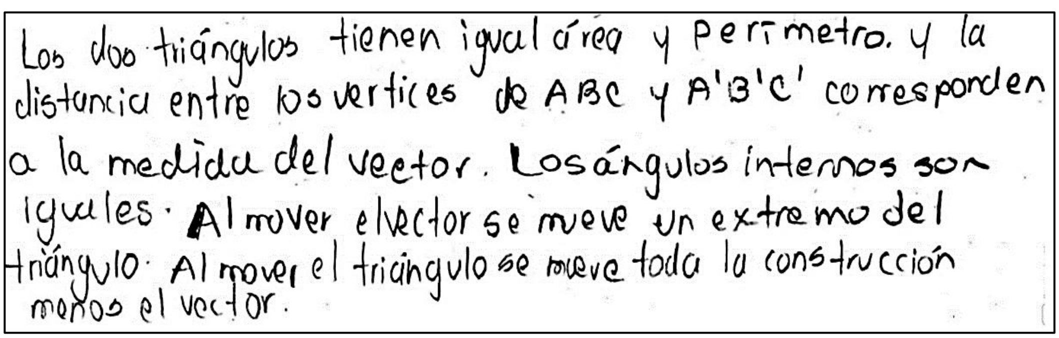

Los dos triángulos tienen igual área y perímetro. y la distancia entre los vertices de ABC y A'B'C' corresponden a la medida del vector. Los ángulos internos son iguales. Al mover el vector se mueve un extremo del triángulo. Al mover el triángulo se mueve toda la construcción menos el vector.

Fig. 47. Manuscrito del estudiante E18

El estudiante E18, como lo indica su manuscrito, realiza mediciones de las longitudes entre lados homólogos y ángulos homólogos, esto es, mide las distancias y verifica que dicha distancia es igual a la magnitud del vector $\vec{v}$, es decir, verifica la siguiente igualdad:

$$d\left(A,A'\right)=d\left(B,B'\right)=d\left(C,C'\right)=\left\|\vec{v}\right\|\cong 3.16$$

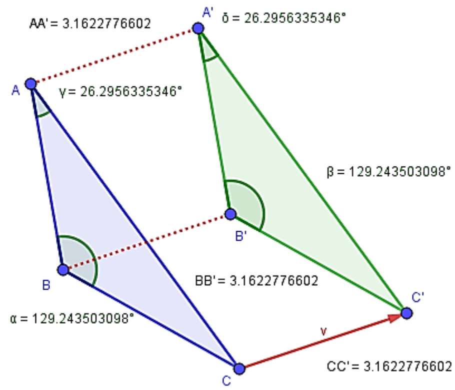


Fig. 48. Reconstrucción exploración realizada por el estudiante E18

5. CONCLUSIONES, APORTES Y RECOMENDACIONES

El propósito del presente capítulo es presentar las conclusiones y las sugerencias del trabajo, que fueron construidas con la experiencia empírica sustentada en el capítulo IV y con fundamento en el marco teórico. El presente capítulo tiene dos secciones: la respuesta a las preguntas de investigación y las sugerencias a diferentes actores de la comunidad e instituciones.

5.1. RESPUESTA A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

5.1.1 RESPUESTA A LA PREGUNTA CENTRAL DE INVESTIGACIÓN

¿Cuáles son las características que tiene un proceso de aprendizaje, fundamentado en la resolución de problemas, de las isometrías del plano, mediado por GeoGebra, con estudiantes del curso de matemáticas para el diseño, en la Universidad Icesi?

a. La implementación de las actividades en el aula, se realizó mediante una innovación didáctica que tuvo las siguientes fases:

FASE	DESCRIPCIÓN
Formulación del problema de la caja negra	El profesor presenta el problema. Lee la hoja de trabajo y describe las actividades que deben realizar los estudiantes en cada una de las fases de la clase. Los estudiantes reciben un archivo realizado por el profesor, su tarea es explorar con ayuda de GeoGebra y escribir el paso a paso para reconstruir el archivo recibido.
Exploración con la mediación de GeoGebra	Los estudiantes dibujan y miden ángulos, longitudes de segmentos. Exploran propiedades de paralelismo, perpendicularidad, distancia. Visualizan, encuentran regularidades y formulan conjeturas y contraejemplos. Al final del proceso redactan el paso a paso (protocolo de construcción) para rehacer el archivo recibido.
Comunicación de ideas mediante uso del lenguaje escrito	Los estudiantes completan los espacios en blanco de la hoja de trabajo, llenan tablas, hacen gráficos y describen con lenguaje verbal las propiedades. Redactan el paso a paso para develar la caja negra y reconstruir el archivo.
Socialización	En este momento los estudiantes socializaron los resultados por la vía oral, en pequeños grupos y con toda la clase. El profesor hizo de moderador.
Institucionalización	Esta es la fase donde el profesor presenta la versión formal o institucional del conocimiento. La institucionalización se divide en dos fases: • El profesor mejora las redacciones iniciales de los estudiantes, corrigiendo errores de redacción y ortografía. • El profesor presenta la definición o el teorema en su versión formal. • El profesor realiza la demostración formal.

Tabla 3. Fases de desarrollo de la intervención didáctica

b. El tipo de tareas implementadas en el aula.

Las hojas de trabajo constituyen un espacio de mediación entre la enseñanza y el aprendizaje. Contienen un archivo electrónico denominado Caja Negra. El estudiante la explora y resuelve las actividades que propone la hoja para dejar registro sobre la resolución de ejercicios, resolución de problemas, construcción de diferentes registros semióticos de representación de las ideas matemáticas, encontrar invariantes y construir conjeturas.

Se diseñaron tareas que privilegian la construcción de conjeturas sobre las isometrías del plano. En este proceso el estudiante debe medir, visualizar, usar varias representaciones, usar diversas heurísticas como particularizar, generalizar y buscar invariantes. En este proceso el uso de algoritmos es necesario, pero no es suficiente para culminar con éxito el proceso de solución.

c. El proceso de comunicación de ideas.

Se potencia la comunicación de ideas matemáticas por las vías oral y escrita. Al inicio fue común la dificultad que tuvieron los estudiantes en este proceso. A medida que avanzó el estudio los avances en este aspecto son notables. Este resultado se puede explicar desde dos perspectivas: (i) El uso de GeoGebra hace que el estudiante amplifique el dominio de sus recursos y estrategias y que pon tanto vea más cosas sobre los objetos geométricos. Al ver más, tiene posibilidades de narrar mejor. (ii) La experiencia matemática de comunicar. En el método tradicional el estudiante solo escribe lo que el profesor le dicta. En este proceso de innovación didáctica los estudiantes deben hacer sus propias exploraciones y deben describir las propiedades de los objetos geométricos con sus propias palabras. En la medida que van adquiriendo experiencia a través de la interacción con GeoGebra, con sus compañeros de clase y con el profesor, la calidad de sus comunicaciones mejora notablemente.

d. El proceso de hacer preguntas.

En el método tradicional de enseñanza y aprendizaje, generalmente el estudiante no hace preguntas. Y en la mayoría de los casos teme a las reacciones de su profesor o de sus compañeros de clase.

En el proceso de resolución de problemas de isometrías con el apoyo de GeoGebra el estudiante debe desarrollar la capacidad para indagar con ayuda del software. En este proceso el estudiante debe formular preguntas y contestarlas con ayuda del software. Por ejemplo, se pregunta cosas como: “¿estas dos rectas son perpendiculares?”, para contestarlo debe medir ángulos, explorar propiedades o usar las herramientas que provee el programa (herramienta relación)

En el estudio se encontró evidencia empírica que sustenta que los estudiantes van desarrollando la capacidad para hacerse preguntas a sí mismos y contrastar sus respuestas con las de otros compañeros de clase. Este esto constituye un avance en el desarrollo de las estrategias de metacognición.

e. Cambio de roles.

En la estrategia didáctica que se implementó en la investigación el estudiante asumió un rol muy activo. Explora, mide, visualiza, pregunta, comunica por las vías oral y escrita, comparte sus puntos de vista con sus compañeros de clase entablando diálogos cordiales mediante los cuales se reconstruyen ideas y se socializa el conocimiento adquirido.

Por su parte, el profesor asume un rol menos protagónico, diseña la caja negra, diseña las hojas de trabajo, propone el problema, resuelve dudas, coordina el debate e institucionaliza las ideas construidas por los estudiantes. Esta característica del rol del docente en la intervención realizada va en la línea de lo propuesto en el modelo de Aprendizaje Activo que se implementa en la Universidad Icesi y mediante el cual se busca que el estudiante sea parte activa en la construcción de su propio conocimiento cuando es expuesto a situaciones retadoras, que desarrollen aprendizaje significativo.

5.2. RESPUESTA A LAS PREGUNTAS AUXILIARES.

5.2.1. Respuesta a la pregunta: ¿Qué tipos de recursos matemáticos utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra?

En el proceso se diagnosticó a los estudiantes sobre el dominio básico de conocimientos de geometría. Los objetivos del estudio diagnóstico fueron la siguientes: (i) Indagar sobre su sistema de creencias, (ii) estudiar sobre sus habilidades para realizar construcciones geométricas con regla y compás, detectar heurísticas y estrategias de solución de problemas, (iii) Indagar sobre el dominio que tienen los estudiantes sobre elementos, propiedades y características de las isometrías en el plano.

Quedó evidenciado que los estudiantes tienen dificultades para comunicar las definiciones de las isometrías, para redactar sus propiedades y dificultades para hacer construcciones con regla y compás. Adicionalmente, se encontró que los estudiantes tienen creencias erróneas sobre los objetos geométricos, como por ejemplo pensar que un punto es paralelo a una recta o que dos polígonos, uno de los cuales es la simetría axial del otro son paralelos.

Después de realizar el estudio diagnóstico, se hicieron talleres de dominio básico del software GeoGebra para que dibujaran figuras, midieran ángulos, hicieran tablas y para que realizaran operaciones básicas. También se desarrollaron habilidades de dibujo, de arrastre y animación que son característicos en los ambientes de geometría dinámica. El conocimiento básico del software pasa a ser parte del dominio de recursos para la resolución de problemas.

La idea de medir ángulos, hacer operaciones y arrastrar las figuras, les da la posibilidad a los estudiantes de hacer experimentos matemáticos para explorar invariantes en una amplia familia de figuras. Es decir, los objetos geométricos son dotados de movimiento y las figuras toman vida, en el sentido que no son figuras estáticas como en papel. Ahora el dinamismo, el movimiento y el arrastre hace que el estudiante manipule el objeto, lo hace tangible, lo hace cercano y significativo.

El dinamismo de GeoGebra les permitió a los estudiantes experimentar y construir conjeturas en una gran cantidad de casos particulares. El uso de material manipulable como las escuadra, el compás y el papel complementó la idea original y le dio un sello especial para reforzar la conjetura ya construida en el computador y lograr representar la idea matemática desde el punto de vista visual.

Esta metodología de trabajo se constituye en una innovación didáctica para aprender la geometría. El método se puede extender para ser usada en otros cursos ofrecidos por el Departamento de Matemáticas y Estadística y, quizás, en semestres más avanzados. Al finalizar cada hoja de trabajo los estudiantes dominan definiciones, propiedades y teoremas del contexto geométrico que fueron construidos o interpretados por ellos mismos, con la orientación del profesor, en la interacción con sus compañeros de clase y con la mediación del material concreto y la tecnología digital.

5.2.2. Respuesta a la pregunta: ¿Cuáles son las estrategias heurísticas que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con el apoyo de GeoGebra?

En la presente investigación se aportó evidencia para concluir que con la metodología empleada y con el tipo de actividades implementada se pudieron desarrollar los siguientes tipos de habilidades:

Habilidades heurísticas. Este tipo de estrategias se desarrollaron en los procesos de visualización, particularización, búsqueda de patrones o regularidades y con la formulación de conjeturas geométricas.

Este proceso conlleva al descubrimiento matemático. Desde este punto de vista, los estudiantes se enfrentaron a tareas que implicaron usar procesos centrales del pensamiento matemático y a comunicar ideas matemáticas.

Habilidades motrices. Este tipo de habilidad fue necesaria para hacer trazos, dibujar con regla y compás. En el computador también es necesario desarrollar estas habilidades de motricidad fina para manejar el mouse, coordinar los movimientos, hacer trazos, medir, arrastrar y darles movimiento a las figuras con una mano virtual.

Habilidades sobre el uso de tecnología. En el proceso, los estudiantes aprendieron a dibujar polígonos, medir ángulos, hacer operaciones, tabular, hacer arrastre para encontrar invariantes. Hacer macro construcciones y verificar propiedades para darle seguimiento a una conjetura.
Además, usaron los aprendizajes adquiridos para desarrollar un proyecto final de diseño de teselados usando las isometrías en el plano y la noción de simetría de polígonos regulares.

5.2.3. Respuesta a la pregunta. ¿Cuáles son las estrategias de Control que utilizan los estudiantes del curso de matemáticas para el diseño en el proceso de resolución de problemas sobre isometrías del plano con la mediación de GeoGebra?

En el estudio se generaron espacios para que el estudiante desarrollara sus estrategias de control:

a. **Entender el problema**. El estudiante debe entender la metodología de trabajo con las cajas negras. Una vez recibido el archivo debe saber qué objetos se pueden arrastrar y cuáles no. Es decir, debe identificar las variables independientes y cuáles son las dependientes.
b. **Descubrir errores**. En el proceso de resolución de problemas de cajas negras es muy frecuente que el estudiante cometa errores y construya leyes falsas. La prueba del arrastre se convierte en una estrategia poderosa para construir contraejemplos.
c. **Hacer preguntas**. En el proceso de develar la caja negra el estudiante debe formularse muchas preguntas a sí mismo. Él debe usar los comandos apropiados para medir o para verificar propiedades y dar respuesta a sus interrogantes.
d. **Buscar caminos elegantes**. La elegancia matemática radica en la sencillez de los argumentos. En las sesiones de clase el profesor recibía las soluciones de parte de los estudiantes y los invitaba a buscar caminos más cortos y sencillos de solución. Si bien es cierto estaban bien evaluados por culminar con éxito la solución, la invitación era a describir de manera más sencilla y clara el proceso de solución y a explorar caminos de solución de la caja negra por vías más simples.

5.3. CONCLUSIONES SOBRE EL IMPACTO

5.3.1. Las actitudes

La actitud es la disposición que tienen los estudiantes por el estudio de las matemáticas. La metodología empleada despertó actitudes positivas hacia el estudio de las matemáticas porque se rompió la rutina y el estilo tradicional de estudiar esta disciplina del conocimiento. Ahora los estudiantes participaron de manera activa en la construcción de sus ideas.

El ambiente de aprendizaje fue muy propicio para construir nuevos conocimientos, cambiando el rol de profesor y de los estudiantes por completo. El profesor fue un orientador del proceso, hacía sugerencias y formulaba preguntas, respondía a inquietudes de tipo conceptual y también relacionadas con el uso de GeoGebra. Mientras que los estudiantes participaron de manera activa en la fase de exploración, la fase de socialización y en la de comunicación de las conjeturas.

El tipo de actividades causó curiosidad y despertó interés en los estudiantes participantes. Los materiales tanto concretos como computacionales sirvieron de motivadores y mediadores para la construcción de conocimiento.

Desde esta perspectiva, se reporta una metodología que resultó exitosa por la calidad y cantidad de conocimiento construido.

Después de las tres hojas de trabajo implementadas, los estudiantes reclaman que cuándo volverán a utilizar esa metodología de trabajo.

5.3.2. La evaluación.

Se reconoce la evaluación como un proceso complejo y sensible a cambios didácticos y metodológicos. En el caso de la propuesta desarrollada en la presente investigación se encontró un gran impacto no sólo en los procesos de evaluación.

El curso de matemáticas para el diseño históricamente había sido evaluado a partir de exámenes escritos y el desarrollo de talleres de clase y tareas que eran entregadas en formato análogo. La implementación y uso de GeoGebra, como herramienta de mediación computacional, generó la necesidad de repensarse estos procesos de evaluación y recolección de información.

El segundo y el tercer parcial se aplicaron haciendo uso del software GeoGebra, hecho que de alguna manera constituye un hito en la historia del Departamento de Matemáticas. El segundo parcial se desarrolló en sala de cómputo y se aplicó usando la plataforma Moodle con la que cuenta la Universidad. A través de ella se compartieron los archivos de las cajas negras en formato digital y los estudiantes subieron sus respuestas, también en formato digital, de la exploración y los resultados encontrados. Este archivo digital fue complementado con un cuestionario en formato análogo que complementaba la prueba.

Muchas de las tareas ya no requerían el uso de papel para su desarrollo y fueron entregadas vía la Plataforma Moodle. Los estudiantes compartían, para su evaluación, no solo archivos de GeoGebra sino archivos en formato Word donde explicaban sus procesos y comunicaban sus protocolos de construcción.

5.3.3. Impacto cuantitativo

Como se comentó en los antecedentes y la justificación del proyecto, el curso de Matemáticas para el diseño históricamente ha tenido altos índices de reprobación y cancelación que generan situaciones de retraso en los tiempos de graduación de los estudiantes, pero también casos de deserción temprana y tardía, Aguirre (2014).

La implementación de una situación didáctica como la desarrollada en esta investigación permitió impactar de manera positiva estos aspectos tan preocupantes para los diferentes estamentos de la Universidad Icesi.

Para el año 2009-2 el porcentaje de cancelaciones del curso alcanzó el 40% y el de perdidas un máximo histórico del 54%, que, si bien es cierto, fue disminuyendo gradualmente en los semestres siguientes, siempre se mantuvo en dos dígitos hasta el segundo semestre del año 2016. A partir del año 2017, año en el cual ya había iniciado el uso GeoGebra en mis clases, pero de forma esporádica y únicamente como un elemento de apoyo y demostración, los niveles de cancelación y pérdida del curso bajaron notablemente, hasta alcanzar, en el segundo semestre del año 2018, semestre en el que se desarrolló la implementación de esta propuesta didáctica, porcentajes del 7% para las cancelaciones y del 2% para las reprobaciones.

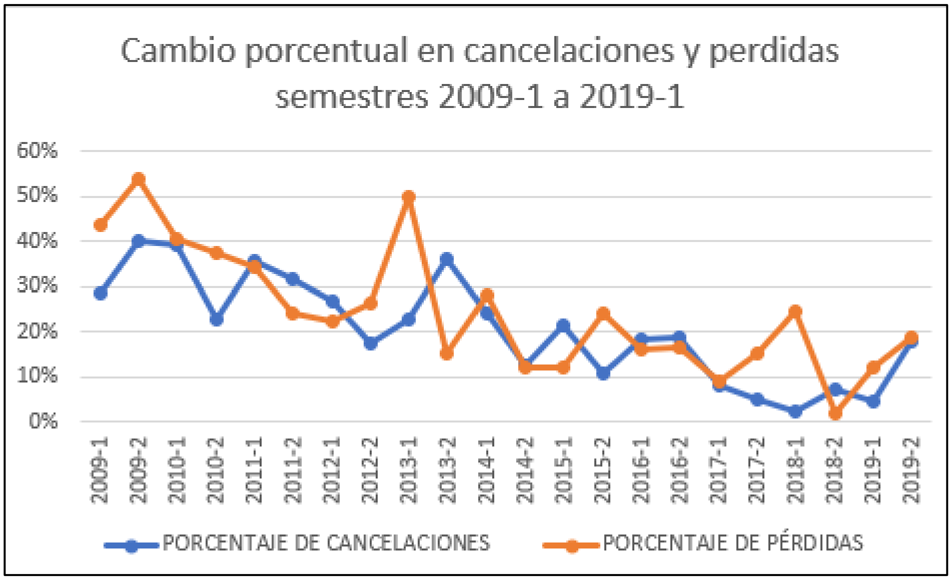


Fig. 49. Variación en porcentajes de aprobación y cancelación desde 2009-1 hasta 2019-1

5.4. SUGERENCIAS

5.4.1 Sugerencias para los Profesores de Matemáticas.

Los profesores de matemáticas deben generar ambientes de aprendizaje donde se promueva el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático, no únicamente debe propiciar el manejo de algoritmos. Por ejemplo, deben involucrar a los estudiantes en la formulación de problemas, en lugar de pedirles solamente que los resuelva.

Fomentar el proceso de comunicación de las ideas matemáticas, de manera que sean los mismos estudiantes los que exploren por sus propios medios y comuniquen las respuestas encontradas a los problemas. Se debe generar condiciones para que los estudiantes comuniquen por la vía escrita sus procesos, soluciones y conclusiones. En este proceso el estudiante cometerá errores de redacción y de ortografía y es ahí donde el profesor debe intervenir haciendo sugerencias para la mejora de la escritura.

En el caso de la Universidad Icesi, este elemento resulta de gran importancia para generar lazos de trabajo interdisciplinar, por ejemplo, con el Departamento de Lenguaje y el centro LEO. El trabajo realizado se alinea con el trabajo realizado en los cursos de COE (comunicación oral y escrita) y con el curso de Lógica y Argumentación.

También se debe generar la posibilidad para que los estudiantes comuniquen ideas en pequeños grupos y con toda la clase. En este proceso el profesor tiene dos roles básicos: (i) el de moderador de la discusión. (ii) el de formalizador de las ideas matemáticas.

Incorporar las nuevas tecnologías en la formulación y resolución de problemas haciéndolos más atractivos, de manera que los problemas teóricos se transformen en situaciones reales que deben resolver. Para materializar esta sugerencia, se deben cumplir varias actividades: (i) Los centros de formación de maestros como Escuelas Normales y Facultades de Educación, deben Incluir la línea de nuevas tecnologías en la formación de nuevos profesores, (ii) En el caso de los profesores de matemáticas, deben participar en la formación permanente (cursos, talleres y diplomados de actualización en el uso de las tecnologías digitales), (iii) los profesores universitarios deben diseñar tareas donde se promueva el uso de calculadoras, celulares, tabletas o computadores.

Se les recomienda a los profesores que además de enseñar la parte algorítmica, deben promover el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático como: particularizar, visualizar, generalizar, estimar, encontrar patrones, conjeturar y formular contraejemplos.

5.4.2 Sugerencias para los Estudiantes.

Los estudiantes deben ver en el presente estudio un ejemplo donde las matemáticas van más allá del simple tratamiento teórico y, posiblemente, aburrido de aprender resultados de memoria y repetir procesos algorítmicos. En lugar de ello deben emprender caminos divertidos que los enfrenta a situaciones donde deben abordar retos, explorar, indagar, buscar invariantes y descubrir propiedades.

Entender que las tecnologías digitales, además de servir para comunicarse con otras personas y buscar información, se pueden convertir en herramientas para construir su propio conocimiento.

El uso de las herramientas computacionales en asocio con la geometría y la matemática abre un amplio campo de aplicaciones para el mudo del diseño industrial y multimedial. Es posible aplicar el conocimiento geométrico adquirido a lo largo de la intervención didáctica para aplicar las transformaciones isométricas en el plano y la noción de simetría en la elaboración de teselados, frisos y elementos decorativos útiles en el diseño.

5.4.2 Sugerencias para los investigadores

A lo largo del estudio, se encontraron preguntas que no hacían parte del presente estudio y que las presento para que la comunidad de investigadores las aborde:

- **a.** ¿De qué manera se puede extender la metodología empleada en el presente estudio a otros terrenos de las matemáticas como el álgebra, la probabilidad o el cálculo?
- **b.** ¿Qué impacto tendría, sobre el aprendizaje de las isometrías, una combinación de recursos como cajas negras y el estuche tradicional de geometría?
- **c.** ¿Por qué a pesar de que los estudiantes en la actualidad pertenecen a una generación tecnológica se resisten, en su gran mayoría, al estudio de las matemáticas aún en ambientes computacionales?
- **d.** ¿Qué tipo de tareas se pueden diseñar para estudiar, con apoyo de GeoGebra, aplicaciones de las isometrías del plano en otras áreas del conocimiento como las ciencias naturales y el diseño multimedial?
- **e.** ¿Qué tan eficiente resulta el software GeoGebra en la implementación actividades de aprendizaje de las isometrías extendidas a 3D?

5. BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, A. (2015). *Metodología con el software GeoGebra para desarrollar la capacidad de comunica y representa ideas matemáticas con funciones lineales* (Tesis de Maestría en Ciencias de la Educación con Mención en Didáctica de la Enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria). Universidad de Piura. Facultad de Ciencias de la Educación. Piura, Perú.

Aguirre, J. (2014). *Informe proceso de renovación curricular programa diseño de medios interactivos 2013 – 2014.* Documento presentado el Comité de Currículo. Universidad Icesi, Santiago de Cali, Colombia.

Artigue, M. (2002), "Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work", International Journal of Computers for Mathematical Learning.

Benítez, D. (1998). *La importancia que tiene percibir la estructura superficial o profunda en el proceso de solución.* Tesis de Maestría. Departamento de matemática Educativa. Cinvestav-I.P.N, México.

Benítez, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnología.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-I.P.N, México.

Duval, R. (1995). Semiosis y pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle.

Díaz, A., Hernández G. (1999) *Constructivismo y aprendizaje significativo. En estrategias Docentes para un aprendizaje significativo*, pp. 13-19, Ed McGraw Hill, México.

D.L, Johnson. (2001) *Symmetries*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Tomos: 1, 2, 3. Madrid. Alianza Universidad.

González, H (1998). *El proyecto Educativo de la Universidad Icesi y el aprendizaje activo*. Cali, Universidad Icesi.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santa Fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares curriculares para matemáticas.* Santa Fe de Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (2013). *Competencia TIC para el Desarrollo Profesional Docente.* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339097_archivo_pdf_competencias_tic.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2014). *Lineamientos Curriculares.* Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-339975.html

Moreno, L. (2002a). *Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización.* En Ministerio de Educación Nacional (Ed.) Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Santa Fe de Bogotá.

Moreno, L, & Santos, L.M. (2016). *The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners' Problem-Solving Experiences. In Felmer,* P., Pehkonen, E., Kilpatrik, J., (Eds*). Posing and Solving Mathematical Problem*. Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000*). Principles and Standards for School Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.*

Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano*. Facultad de Humanidades y Ciencias _ Universidad Nacional del Litoral. Prov. de Santa Fe (Argentina).

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2013). *Uso de Tic en Educación En América Latina y el Caribe.*

Rico, Luis. (1997). *Aprendizaje de las matemáticas*. Didáctica de la Matemática en el bachillerato. Aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Santos, T. L. & Benítez, D. (2003). *El Uso de Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas*.

Sampieri, Roberto. *Metodología de la investigación*. Sexta edición. Mc Graw Hill. México.

Schoenfeld A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. In D.* Grouws (Eds.), Handbook of research on mathematics teaching and learning.

Universidad Icesi. (2017). *Proyecto Educativo Institucional*.

Yaker, H., Martínez, M. (2007). *Notas para un curso de Matemáticas para el Diseño.* Universidad Icesi. Cali.

7. ANEXOS

7.1. ANEXO 1: PRUEBA DIAGNÓSTICA

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Curso: Matemáticas para el diseño.
Profesor: Luis Fernando Azcárate Mesa. **Fecha: septiembre 11 de 2018**

Nombre del estudiante: ____Grupo: ________

Programa Académico: ____

PRUEBA DIAGNÓSTICA SOBRE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS Y TRANSFORMACIONES EN EL PLANO (ISOMETRIAS)

1. A continuación, encontrarás una tabla con dos columnas. En la primera columna hay un listado de conceptos geométricos. En la segunda columna debes describir con tus propias palabras lo que entiendes por cada uno de ellos.

Conceptos	Descripción
Rectas paralelas	
Rectas perpendiculares	
Mediatriz	
Rotación	
Traslación	
Simetría	

2. Marque con una **X** de acuerdo a si sabe (o no) realizar la construcción indicada con regla y compás.

Construcción	**Si la sé construir**	**No la sé construir**
Construir una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.		
Construir una recta perpendicular a una recta dada por un punto exterior a ella.		
Construir la mediatriz a un segmento dado.		
Construir el simétrico axial de un polígono dado respecto a un eje dado.		
Construir el simétrico central de un polígono dado respecto a un punto dado.		
Construir la rotación de un polígono dado respecto a un punto y un ángulo dados.		

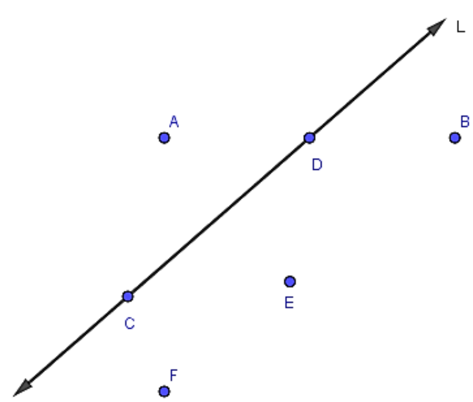
3. Dado el segmento $\overline{AB}$ de la figura, construya, con regla y compás, un cuadrado que tenga por lado el segmento dado. Después de hacer la construcción describa el procedimiento utilizado.

Espacio para hacer la construcción	**Espacio para hacer la descripción**
	

4. A continuación, encontrarás una tabla con dos columnas. En la primera columna hay un listado de transformaciones en el plano. En la segunda columna describa, con sus propias palabras, las propiedades que conozca de cada transformación.

Transformaciones en el plano	**Descripción de propiedades**
Rotación	
Traslación	
Simetría axial	
Simetría central	

5. Considere el siguiente diagrama para responder las preguntas 5.1 y 5.2.



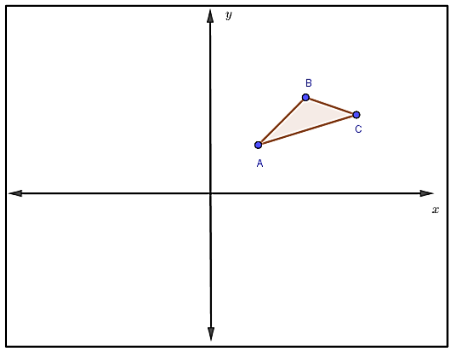
5.1. En la figura anterior, si se hace una reflexión respecto a la recta **L**, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen del punto A?

○ **F** ○ **B** ○ **E** ○ **D**

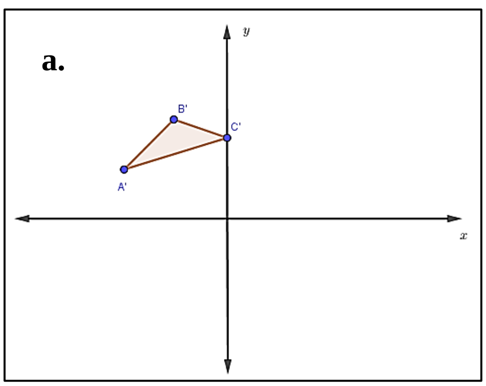
5.2. En la figura anterior, si se hace una reflexión respeto a la recta **L**, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen del punto D?

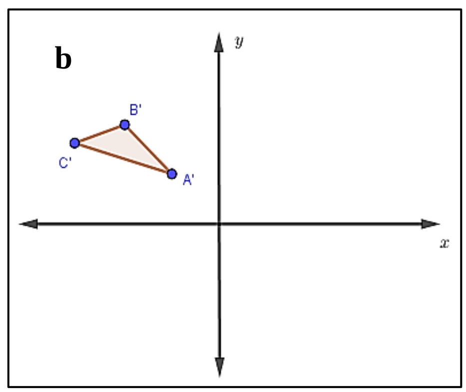
a. ◯ **A** **b.** ◯ **D** **c.** ◯ **B** **d.** ◯ **C**

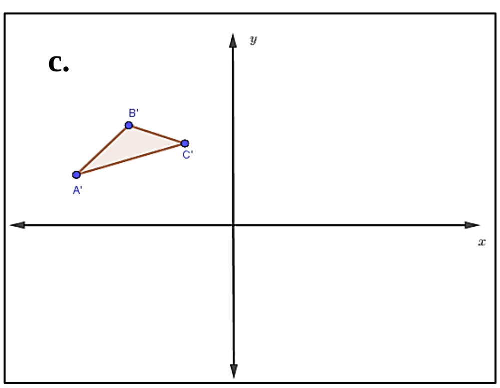
6. Considere el triángulo $\triangle ABC$ de la figura:

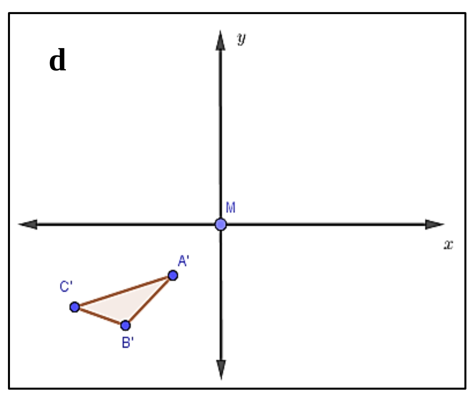


¿Cuál de las siguientes gráficas representa la reflexión del triángulo $\triangle ABC$ respecto al eje y ?

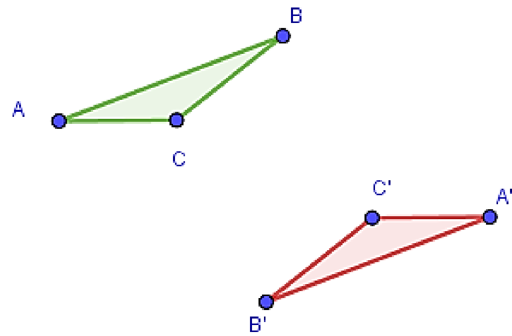








7. Al triángulo $\triangle ABC$ de la figura se le aplicó una simetría central y se obtuvo como imagen el triángulo $\triangle A'B'C'$. Encuentre el centro de simetría y describa el procedimiento utilizado.



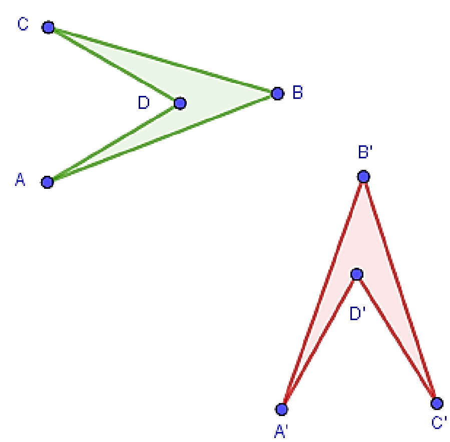
Descripción: ____

____

____

____

8. Al polígono $ABCD$ de la figura se le aplica una simetría axial (reflexión) respecto a una línea recta ℓ y se obtiene el polígono $A'B'C'D'$. Encuentre el eje de simetría y describa el procedimiento utilizado.



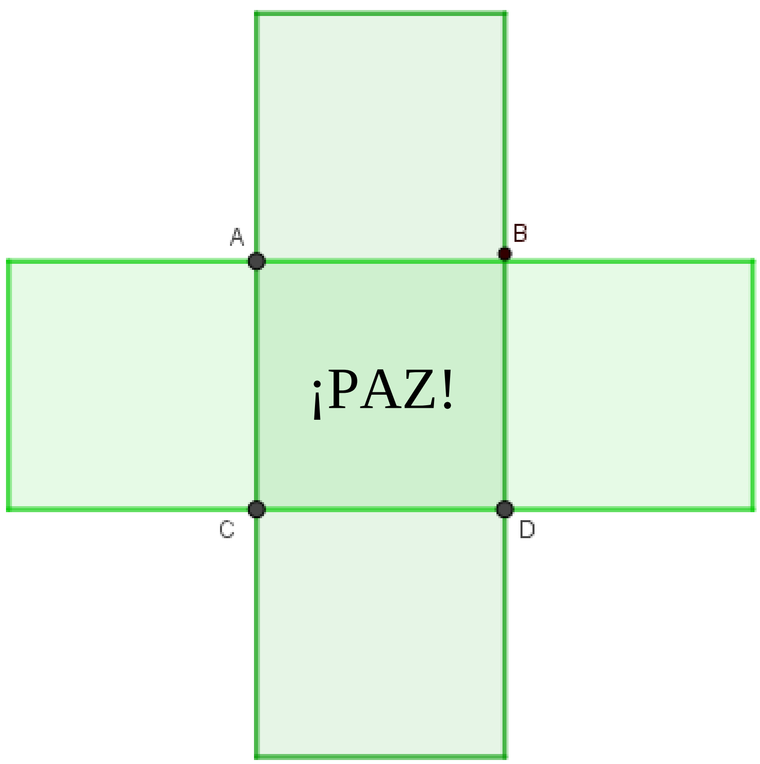
Descripción: ____

____

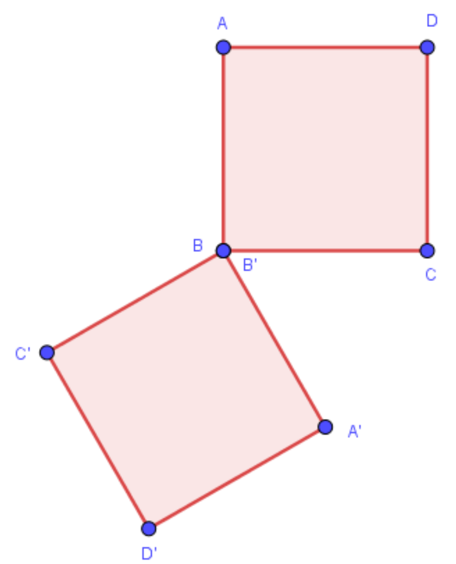
____

____

9. Escriba, en cada cuadrado libre, como se vería la reflexión de la exclamación ¡PAZ! respecto a cada uno de los lados del cuadrado $ABCD$.



10. El cuadrado $\square A'B'C'D'$ es la imagen del cuadrado $\square ABCD$ después de realizar



a. ◯ Una traslación.

b. ◯ Una simetría axial respecto al lado BC.

c. ◯ Una simetría central respecto al vértice B.

d. ◯ Una rotación con centro en el vértice B.

7.2. ANEXO 2: HOJA DE TRABAJO 1

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
TRANSFORMACIONES EN EL PLANO
MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO

HOJA DE TRABAJO 1

Sesión 4.
Fecha: septiembre 27 de 2018
Profesor: Luis Fernando Azcárate Mesa

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ___________________________CÓDIGO: ______GRUPO: ___

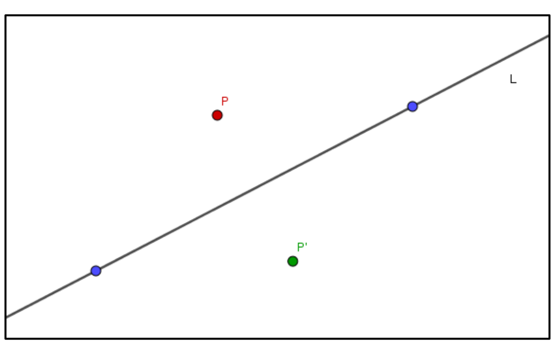
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Diferenciar, en una construcción dada, los puntos que tiene libre desplazamiento de aquellos que no lo tienen.
- Reconocer, en una construcción dada, los elementos dados y los elementos obtenidos mediante construcción.
- Usar las herramientas de GeoGebra para medir longitudes, ángulos y determinar relaciones de tipo geométrico entre los elementos de una construcción dada.
- Encontrar y enunciar la secuencia de pasos que se deben seguir para realizar la construcción geométrica dada.
- Identificar el tipo de transformación en el plano que corresponde a cada construcción, sus elementos y propiedades.

A continuación, encontrarás dos actividades que debes desarrollar individualmente y con el uso del software GeoGebra. Para el desarrollo de la **Actividad 1** accede al archivo **CAJA 6** y para la **Actividad 2** accede a la **CAJA 7**. Ambas cajas están disponibles en la plataforma Moodle del curso.

ACTIVIDAD 1

1. Abre el archivo **Caja 6**. Allí encontrarás un archivo con la construcción siguiente:



2. Utiliza la opción  (**elige y mueve)** para explorar la construcción y completar la siguiente tabla, describiendo tanto los objetos que se pueden mover directamente como los que no se pueden mover directamente.

Lista de objetos que se pueden mover directamente (Objetos dados)	**Lista de objetos que no se pueden mover directamente**

3. Realiza trazos auxiliares (segmentos, rectas), mide ángulos y distancias. Indaga sobre relaciones entre objetos y determina cómo se construye la figura de la **Caja 6**. A continuación, describe los trazos auxiliares, las medidas que hiciste y las propiedades que encontraste.

4. De acuerdo a lo que has explorado hasta el momento, completa la siguiente tabla

Listado de objetos dados	Listado de pasos para hacer la construcción

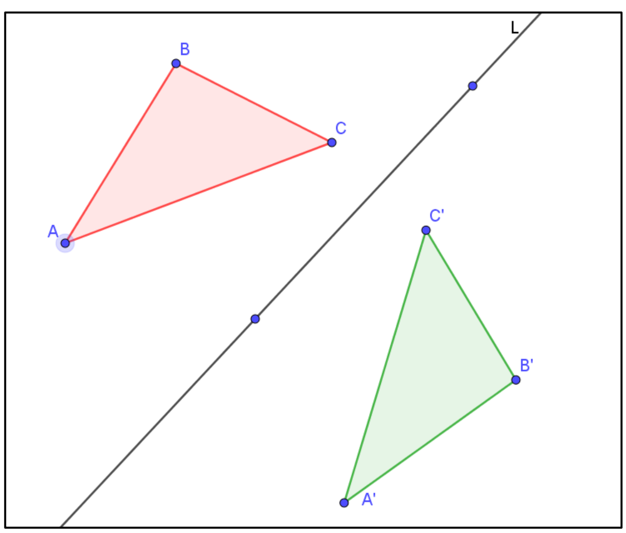
5. Realiza mediciones, exploraciones y arrastre de los objetos geométricos de la construcción para que construyas conjeturas sobre:

a. Distancia entre los puntos P y P' respecto a la recta L.

b. Posición relativa de los puntos P y P'.

<u>ACTIVIDAD 2</u>

1. Abre el archivo **Caja 7**. Allí encontrarás un archivo con la construcción siguiente:



2. Utiliza la  opción (**elige y mueve)** para explorar la construcción y completar la siguiente tabla, describiendo los objetos se pueden mover directamente y con los que no se pueden mover directamente.

Lista de objetos que se pueden mover directamente (Objetos dados)	**Lista de objetos que no se pueden mover directamente**

3. Realiza trazos auxiliares (segmentos, rectas), mide ángulos y distancias. Indaga sobre relaciones entre objetos y determina cómo se construye la figura de la **Caja 7**. A continuación, describe los trazos auxiliares, las medidas que hiciste y las propiedades que encontraste.

4. De acuerdo a lo que has explorado hasta el momento, completa la siguiente tabla.

Listado de objetos dados	**Listado de pasos para hacer la construcción**

5. Realiza mediciones, exploraciones y arrastre y construye conjeturas sobre:

a. Longitud de los lados de los dos polígonos.

b. Medida de los ángulos de los dos polígonos

c. Área de los dos polígonos.

7.3. ANEXO 3: HOJA DE TRABAJO 2

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
TRANSFORMACIONES EN EL PLANO
MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO

HOJA DE TRABAJO 2

Sesión 4.
Fecha: septiembre 27 de 2018
Profesor: Luis Fernando Azcárate Mesa
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________CÓDIGO: _____GRUPO: ___

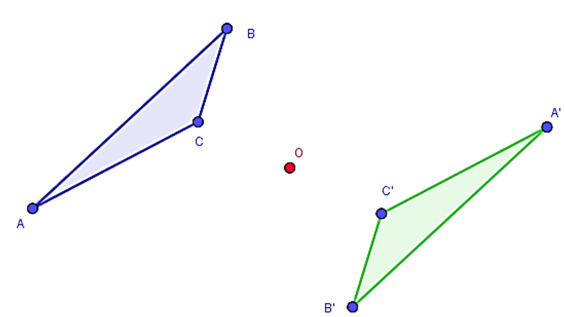
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Diferenciar, en una construcción dada, los puntos que tiene libre desplazamiento de aquellos que no lo tienen.
- Reconocer, en una construcción dada, los elementos dados y los elementos obtenidos mediante construcción.
- Usar las herramientas de GeoGebra para medir longitudes, ángulos y determinar relaciones de tipo geométrico entre los elementos de una construcción dada.
- Encontrar y enunciar la secuencia de pasos que se deben seguir para realizar la construcción geométrica dada.
- Identificar el tipo de transformación en el plano que corresponde a cada construcción, sus elementos y propiedades.

A continuación, encontrarás la **Actividad 3** que debes desarrollar individualmente y con el uso del software GeoGebra. Para el desarrollo de la **Actividad 3** accede al archivo **CAJA 8** que está disponible en la plataforma Moodle del curso.

ACTIVIDAD 3

1. Abre el archivo **Caja 8**. Allí encontrarás un archivo con la construcción siguiente:



2. Utiliza la  opción (**elige y mueve)** para explorar la construcción y completar la siguiente tabla, describiendo tanto los objetos que se pueden mover directamente como los que no se pueden mover directamente.

Lista de objetos que se pueden mover directamente (Objetos dados)	**Lista de objetos que no se pueden mover directamente**

3. Realiza trazos auxiliares (segmentos, rectas), mide ángulos y distancias. Indaga sobre relaciones entre objetos y determina cómo se construye la figura de la **Caja 8**. A continuación, describe los trazos auxiliares, las medidas que hiciste y las propiedades que encontraste.

4. De acuerdo a lo que has explorado hasta el momento, completa la siguiente tabla.

Listado de objetos dados	Listado de pasos para hacer la construcción

5. Realiza mediciones, exploraciones y arrastre de los objetos geométricos de la construcción para que construyas conjeturas sobre:

a. Longitud de los lados de los dos polígonos.

b. Medida de los ángulos de los dos polígonos

c. Área de los dos polígonos.

7.4. ANEXO 4: HOJA DE TRABAJO 3

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
TRANSFORMACIONES EN EL PLANO
MATEMÁTICAS PARA EL DISEÑO

HOJA DE TRABAJO 3

Sesión 5.
Fecha: octubre 9 de 2018
Profesor: Luis Fernando Azcárate Mesa
NOMBRE DEL ESTUDIANTE: ______________________________CÓDIGO: ______________GRUPO: ___

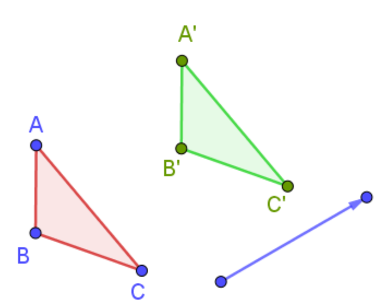
OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

- Diferenciar, en una construcción dada, los puntos que tiene libre desplazamiento de aquellos que no lo tienen.
- Reconocer, en una construcción dada, los elementos dados y los elementos obtenidos mediante construcción.
- Usar las herramientas de GeoGebra para medir longitudes, ángulos y determinar relaciones de tipo geométrico entre los elementos de una construcción dada.
- Encontrar y enunciar la secuencia de pasos que se deben seguir para realizar la construcción geométrica dada.
- Identificar el tipo de transformación en el plano que corresponde a la construcción dada, sus elementos y propiedades.

A continuación, encontrarás la **Actividad 4** que debes desarrollar individualmente y con el uso del software GeoGebra. Para el desarrollo de la **Actividad 4** accede al archivo **CAJA NEGRA 9** que está disponible en la plataforma Moodle del curso.

ACTIVIDAD 4

1. Abre el archivo **Caja Negra 9**. Allí encontrarás un archivo con la construcción siguiente:



2. Utiliza la  opción (**elige y mueve)** para explorar la construcción y completar la siguiente tabla, describiendo tanto los objetos que se pueden mover directamente como los que no se pueden mover directamente.

Lista de objetos que se pueden mover directamente (Objetos dados)	Lista de objetos que no se pueden mover directamente

3. Realiza trazos auxiliares (segmentos, rectas), mide ángulos y distancias. Indaga sobre relaciones entre objetos de la **Caja Negra 9**. A continuación, describe los trazos auxiliares, las medidas que hiciste y las propiedades que encontraste para determinar de qué tipo de isometría se trata y sus elementos característicos.

4. De acuerdo a lo explorado en el paso anterior, describa los pasos que se deben seguir para realizar la construcción de la **CAJA NEGRA 9**.

5. Realiza mediciones sobre los objetos de la construcción y construye conjeturas sobres:

a. Las longitudes de los lados del polígono dado y el polígono imagen.

b. La medida de los ángulos internos del polígono dado y el polígono imagen.

c. El área de los dos polígonos.

7.5. ANEXO 5: PRUEBA DE SALIDA

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Curso: Matemáticas para el diseño.
Profesor: Luis Fernando Azcárate Mesa. **Fecha: noviembre 20 de 2018**

Nombre del estudiante: ____Grupo: ________

Programa Académico: ____

PRUEBA DE SALIDA SOBRE CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS Y TRANSFORMACIONES EN EL PLANO (ISOMETRIAS)

1. A continuación, encontrarás una taba con dos columnas. En la primera columna hay un listado de conceptos geométricos. En la segunda columna debes describir con tus propias palabras lo que entiendes por cada uno de ellos.

Conceptos	**Descripción**
Rectas paralelas	
Rectas perpendiculares	
Mediatriz	
Rotación	
Traslación	
Isometría	

2. Marque con una **X** de acuerdo a si sabe (o no) realizar la construcción indicada con regla y compás.

Construcción	**Si la sé construir**	**No la sé construir**
Construir una recta paralela a una recta dada por un punto exterior a ella.		
Construir una recta perpendicular a una recta dada por un punto exterior a ella.		
Construir la mediatriz a un segmento dado.		
Construir el simétrico axial de un polígono dado respecto a un eje dado.		
Construir el simétrico central de un polígono dado respecto a un punto dado.		
Construir la rotación de un polígono dado respecto a un punto y un ángulo dados.		
Dado un polígono y su rotación, hallar el centro y el ángulo de rotación.		

3. Dado el segmento $\overline{AB}$ de la figura, construya, con regla y compás, un cuadrado que tenga por diagonal el segmento dado. Después de hacer la construcción describa el procedimiento utilizado.

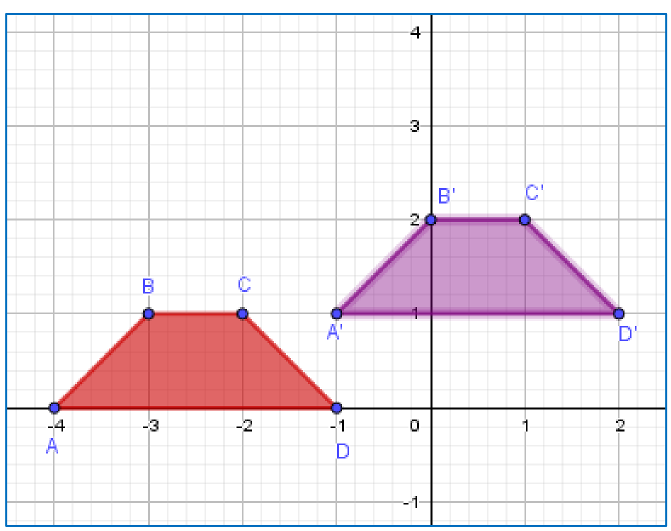
Espacio para hacer la construcción	**Espacio para hacer la descripción**
	

4. A continuación, encontrarás una tabla con dos columnas. En la primera columna hay un listado de transformaciones en el plano. En la segunda columna describa, con sus propias palabras, las propiedades que conozca de cada transformación.

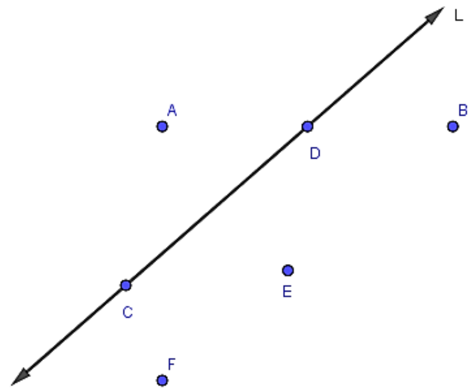
Transformaciones en el plano	**Descripción de propiedades**
Rotación	
Traslación	
Simetría axial	
Simetría central	

5. Al polígono $A'B'C'D'$ de la figura es una traslación del polígono $ABCD$. ¿Cuál de los siguientes es el vector de traslación?

a. $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ **b.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **c.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **d.** $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



6. Considere el siguiente diagrama para responder las preguntas 6.1 y 6.2.



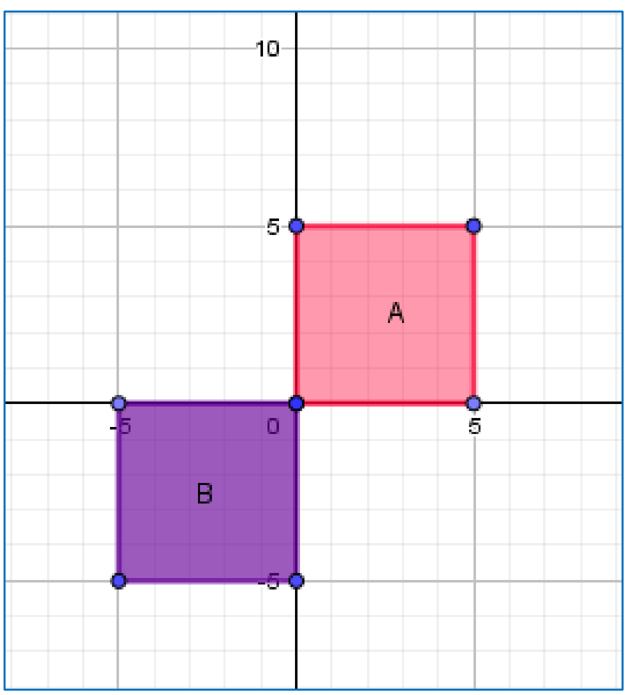
6.1. En la figura anterior, si se hace una reflexión respecto a la recta **L**, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen del punto A?

a◯ **F** **b.**◯ **B** **c.**◯ **E** **d**◯ **D**

6.2. En la figura anterior, si se hace una simetría central respecto al punto **D**, ¿cuál de los siguientes puntos es la imagen del punto **B**?

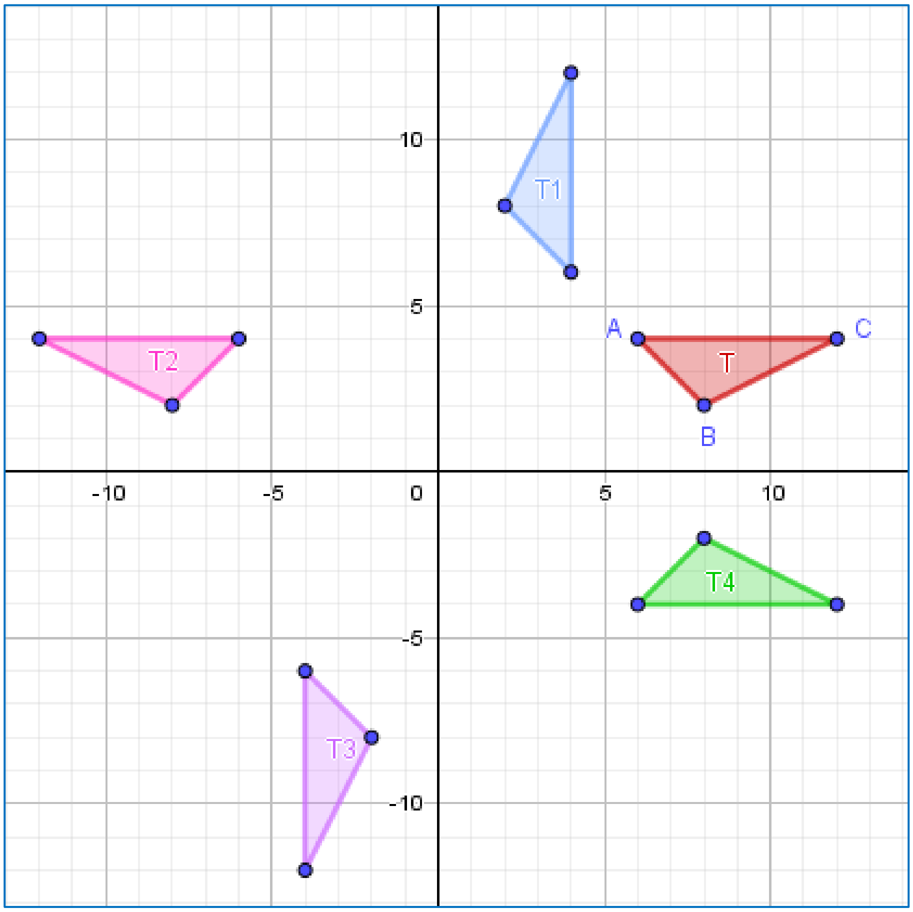
a.◯ **A** **b.** ◯ **D** **c**◯ **B** **d**◯ **C**

7. Indique todas las isometrías posibles mediante las cuales el cuadrado A se puede transformar en el cuadrado B. Haga explícitos los elementos que caracterizan cada una de las isometrías que encontró.



Explicación:

8. Considere el triángulo $\triangle ABC$, llamado T, de la figura.

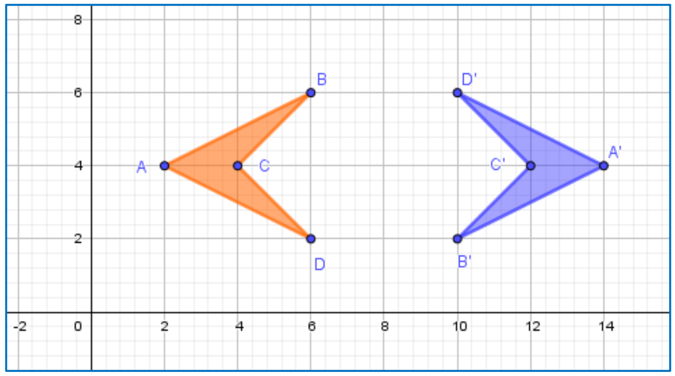


a. ¿Cuál de los triángulos de la figura representa la reflexión del triángulo $\triangle ABC$ respecto a la línea $y = -x$?

b. **T1** **b. T2** **c.** **T3** **d.** **T4**

b. Etiquete los vértices del triángulo imagen, escogido en la pregunta anterior, con los nombres A', B' y C', según correspondan a la imagen de los vértices A, B y C.

9. Indique cuál de las siguientes isometrías se le aplicó al polígono $ABCD$ para obtener el polígono $A'B'C'D'$. Describa los elementos que caracterizan dicha isometría y haga una descripción breve de lo realizado para hallarlos.



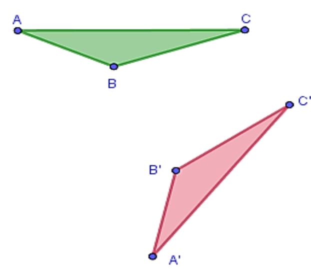
Descripción: ______________________________

____

____

____

10. Al triángulo $\triangle ABC$ de la figura se le aplica una simetría axial (reflexión) respecto a una línea recta ℓ y se obtiene el polígono $\triangle A'B'C'$. Encuentre el eje de simetría y describa el procedimiento utilizado.



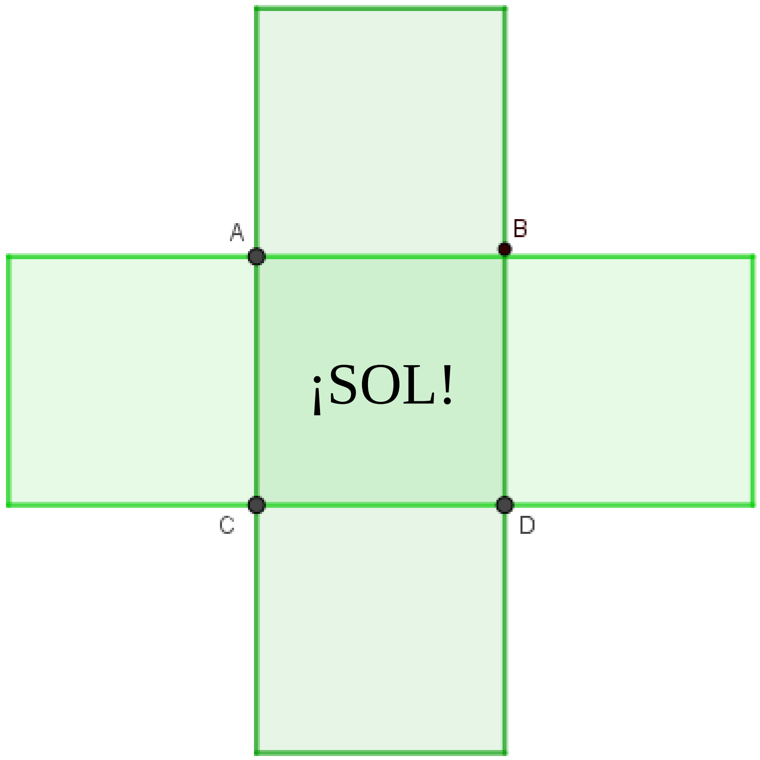
Descripción: ______________________________

____

____

____

11. Escriba, en cada cuadrado libre, como se vería la reflexión de la exclamación ¡SOL! respecto a cada uno de los lados del cuadrado $ABCD$.



12. El cuadrado $\square A'B'C'D'$ es la imagen del cuadrado $\square ABCD$ después de realizar

a. ◯ Una traslación.

b. ◯ Una simetría axial respecto al lado BC.

c. ◯ Una simetría central respecto al vértice B.

d. ◯ Una rotación con centro en el vértice B.