LA FALACIA DEL INTERES EFECTIVO EN LOS INTERESES ANTICIPADOS

Por: LUIS FERNANDO GUTIERREZ M.

PUBLICACION
No. 5

Cali, Febrero de 1981

INSTITUTO COLOMBIANO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE INCOLDA
— I C E S I —

1.- INTRODUCCION:

Se usa aquí la palabra falacia, en su acepción inglesa, para denotar la posibilidad de llegar a varias tasas efectivas de interés cuando se analice el problema de los intereses anticipados.

La Figura No. 1 muestra un ejemplo simple de intereses convencionales. Se invierten $100 para recibir $100 al final del período, y como rédito de la inversión adicionalmente $20, también al final del período. Este flujo de efectivo denota, por definición, una inversión de con el 20 % de rentabilidad por período.

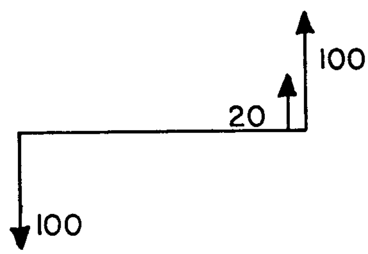

Figura No. 1

Continuando con el ejemplo anterior, supóngase ahora que la inversión, o el préstamo, genera el 20 % anticipado, como lo muestra la Figura No. 2. Se desea conocer en este caso, la tasa efectiva de interés, o la rentabilidad de la inversión, o su tasa interna de retorno, o como quiera que se desee llamar el indicador.

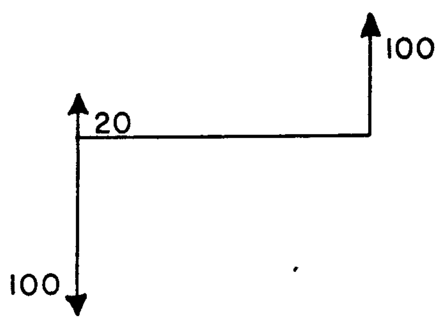

Figura No. 2

El hecho de haber recibido los $20 anticipados da al inversionista la oportunidad de reinvertirlos. Suponiendo que lo hace a la misma tasa del 20 %, recibirá $24 adicionales al final del período más la cancelación de su deuda. Se obtuvieron pues $124 con una inversión de $100, es decir, un rédito del 24 % . El 4 % adicional surge por el hecho de haber recibido el interés de la inversión original en forma anticipada, y haberlo hecho reditar durante el mismo lapso a la misma tasa.

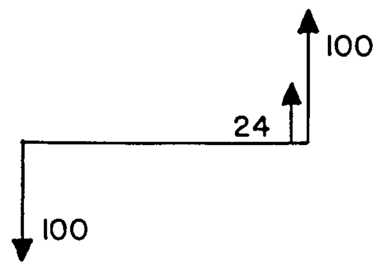

Figura No. 3

La falacia surge cuando un observador desprevenido rehace la Figura No. 2 efectuando una suma algebraica en el comienzo del período, y termina, como se muestra en la Figura No. 4, invirtiendo en realidad \$80 para recibir \$100. Esta inversión reditúa el 25 % .

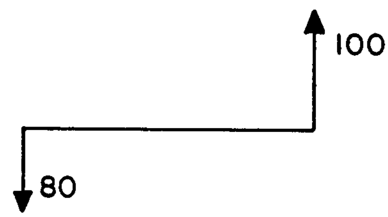

Figura No. 4

Se tiene pues la misma inversión produciendo el 24 % y el 25 % y es esto lo que se ha denominado **la falacia de los intereses anticipados.**

Surgirá quien afirme que el inversionista de la Figura No. 4 no cumplió a cabalidad su cometido, pues no invirtió \$100 sino \$80, y aunque los \$80 rentaron el 25% cabría preguntar qué ocurrió con los otros \$20. Si se supone que los \$20 remanentes se invirtieron al 20% y se calcula un promedio ponderado se llega al 24 % de rédito global.

La paradoja planteada radica, sinembargo, en el hecho de que las dos respuestas son correctas. En el caso del 24 % se asumió que el interés recibido por anticipado, los \$20, se reinvirtió al

20 % de interés compuesto convencional. Por convencional se quiere decir que no es por período anticipado sino vencido. En el segundo caso el interés inicial se reinvirtió en la misma modalidad de interés anticipado compuesto y el inversionista sí comprometió los $100 originales. El inversionista actuó como se explica a continuación:

Los primeros $20 recibidos por el 20 % de interés anticipado sobre los $100 comprometidos, permiten efectuar otra inversión similar, con el 20 % de interés también anticipado. Esta inversión se ilustra en la Figura No. 5. Como se ve, la nueva inversión aporta $4 al comienzo del período y $20 al final.

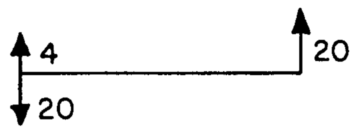

Figura No. 5

Repitiendo el argumento, los $4 pueden ser una inversión del mismo tipo que produce $0.80 en el momento inicial, y, $4 al final del período. Se han acumulado, hasta ahora $124 al final del período habiendo comprometido $100 y todavía quedan 80 centavos para reinvertir en idéntica modalidad. El procedimiento se repite indefinidamente y esto hace que la suma que se recoge al final del período, adicional al repago del principal, sea:

T A B L A No. 1

Número de la reinversión	Monto de reinversión	Aporte al final período
1	20	20
2	4	4
3	.80	.80
4	.16	.16
:	:	:
.		.
t	Pi^t	Pi^t

Es decir que la suma recobrada al final del período, incluyendo el principal, es:

$$F = P + Pi + Pi^2 + Pi^3 + - - + Pi^t \qquad (1)$$

donde

F	:	Suma final
P	:	Principal invertido
i	:	Tasa a la cual se efectúa la reinversión
t	:	Número de reinversiones

Al multiplicar los lados de la ecuación (1) por i y sustraer el resultado de (1), se obtiene para F el siguiente valor:

$$F = P \frac{1 - i^{t+1}}{1 - i} \qquad (2)$$

Si el número de reinversiones tiende a infinito la ecuación, en su límite, y dado que i es menor que la unidad, se llega a:

$$F = P \frac{1}{1 - i} \qquad (3)$$

Al utilizar la expresión (3) con el ejemplo que se ha venido manipulando se obtiene el siguiente resultado:

$$F = 100 \frac{1}{1 - 0.2} = 125$$

Se concluye, entonces, que la reinversión indefinida rentó el 25 % confirmando así la apreciación simplificada del esquema ilustrado en la Figura No. 4. Obsérvase, de paso, que la serie $\sum_{t=1}^{\infty} Pi^t$ es rápidamente convergente. De la Tabla No. 1 se deduce que en cuatro (4) pasos de reinversión ya se habían acumulado $124.96, siendo el límite $125.

Entonces la diferencia entre los réditos calculados del 24 % y el 25 % no es errada, y procede del criterio utilizado para reinvertir el interés que se anticipa.

Cuál criterio usar? Cuál es el mejor? No existe respuesta exacta a esta inquietud. Del desglose de la inversión con reinversión indefinida surgen los limitantes básicos. Primero, no es práctico efectuar un número infinito de reinversiones y para que lo planteado sea cierto habría que hacerlo. Segundo, toda reinversión tiene un costo de transacción que llegará a hacerlas imprácticas cuando su monto no justifique. Una tercera limitante, que podría aplicarse a los dos esquemas de reinversión - el anticipado y el convencional - es la existencia en sí de la oportunidad de reinversión.

En la práctica, analizadas así las cosas, solo las instituciones financieras podrían aproximarse al esquema de la reinversión indefinida y por lo tanto las tasas efectivas de interés obtenidas deben mirarse como cifras máximas, un tanto ideales.

2.- TRATAMIENTO ANALITICO:

El problema es hallar el interés efectivo, por período, equivalente a un interés anticipado compuesto durante **m** subperíodos.

La nomenclatura a usar será la siguiente:

r : Tasa nominal de interés por período

m : Número de subperíodos de composición

$i = \frac{r}{m}$ Tasa que se aplica en cada subperíodo bien sea vencido o anticipado.

e : Tasa efectiva por subperíodo (desconocida)

R : Tasa efectiva por período (desconocida)

Se analizaron dos variantes del problema, a saber:

- Reinversión con intereses convencionales
- Reinversión con intereses anticipados

2.1- REINVERSION CON INTERESES CONVENCIONALES:

La Figura No. 6 representa el flujo de efectivo de una inversión P que genera Pi al comienzo de cada subperíodo, recuperándose la suma P al final del subperíodo **m**. La tasa **i** resulta de dividir el interés nominal por período por **m**, el número de subperíodos considerados.

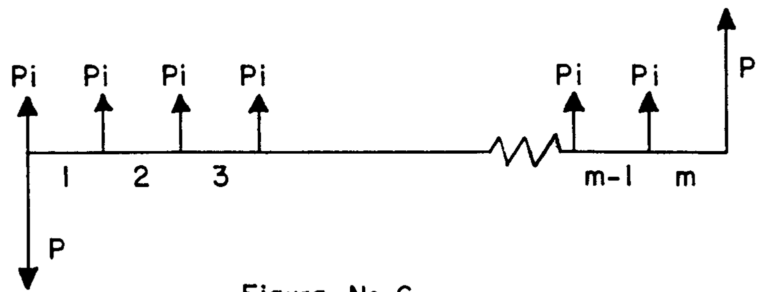

Figura No. 6

Sobre el supuesto de que los intereses generados al comienzo de cada período se reinvierten a la misma tasa **i**, en forma convencional y no anticipada, el valor fina F al cabo del Período m, se compondrá de un F_1 igual a P y de la serie uniforme Pi convertida a un valor equivalente F_2.

$$F = F_1 + F_2 = P + F_2 \qquad (4)$$

Teniendo **n** pagos iguales que montan Pi, su valor final F_2' será, según las fórmulas tradicionales:

$$F_2 = Pi \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] \qquad (5)$$

F_2' se localiza, por definición, al final del subperíodo m-1. Para ubicarlo al cabo del subperíodo **m** debemos multiplicarlo por (1 + i), así:

$$F_2 = Pi \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] (1+i) \qquad (6)$$

Luego:

$$F = P + Pi \left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} \right] (1+i) \qquad (7)$$

Desarrollando un poco la ecuación (7) se tiene,

$$F = P + P\,(1+i)^{m+1} - P - Pi$$

$$F = P\,(1+i)^{m+1} - Pi \qquad (8)$$

La ecuación (8) relaciona F con P para el caso de intereses anticipados con reinversión convencional. Como i es, por definición, r/m, se puede reescribir, así:

$$P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m+1} - P\left(\frac{r}{m}\right)$$

$$F = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m+1} - P\left(\frac{r}{m}\right) \qquad (8)$$

Si se desea conocer la tasa efectiva por período, R, se puede reemplazar F por su equivalente $P\,(1 + R)^1$ y se tendría:

$$F = P\,(1+R)^1 = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m+1} - P\left(\frac{r}{m}\right) \qquad (9)$$

De donde:

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{r}{m}\right)$$

$$R = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{r}{m}\right) \qquad (10)$$

Esta ecuación se había sido deducida y se tabuló en escrito anterior de este mismo autor titulado "Composición Anticipada de Intereses" *Copia de la Tabla se incluye como Anexo No. 1 de este artículo.

2.2. REINVERSION CON INTERESES ANTICIPADOS:

Supóngase ahora, tomando como referencia la misma Figura No. 6, que los intereses se reinvierten anticipadamente. Para ganar tiempo se define **e** como la tasa efectiva por subperíodo; por medio de la metodología para hallar la tasa interna de retorno, en este caso la misma **e**, conviértase todo a valor presente, con lo cual se llega a la siguiente igualdad, derivada de las fórmulas básicas de las matemáticas financieras.

$$P = Pi \left[\frac{(1+e)^m - 1}{e\,(1+e)^m} \right] (1+e) + \frac{P}{(1+e)^m} \qquad (II)$$

De donde:

$$1 - \frac{1}{(1+e)^m} = \frac{i}{e} \left[\frac{(1+e)^m - 1}{(1+e)^m} \right] (1+e)$$

$$\left[\frac{(1+e)^m - 1}{(1+e)^m} \right] = \frac{i}{e} \left[\frac{(1+e)^m - 1}{(1+e)^m} \right] (1+e)$$

$$1 = \frac{i}{e} (1+e)$$

---

* Ver, Bibliografía

$$1 = \frac{i}{e} + i$$

$$1 - i = \frac{i}{e}$$

$$\boxed{e = \frac{i}{1+i}} \qquad (12)$$

La expresión (12) dice que cuando se tenga una tasa i anticipada por subperíodo, basta para hallar la tasa efectiva para el mismo lapso, dividir la tasa nominal por la diferencia entre la unidad y ella misma.

En la práctica interesa más conocer la tasa efectiva (R) por período que se puede deducir fácilmente de la ecuación fundamental $F = P\,(1 + i)^n$
haciendo $P = 1$ y $n = 1$ y así:

$$F = P\,(1+i)^n = (1+R)^1 = (1+e)^m$$

Teniendo en cuenta que $e = i \,/\, (1 - i)$ y que $i = r/m$, se obtiene

$$1 + R = \left(1 + \frac{\frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}}\right)^m$$

De donde:

$$\boxed{R = \left(1 + \frac{\frac{r}{m}}{1 - \frac{r}{m}}\right)^m - 1} \qquad (13)$$

Obsérvase que al considerar la reinversión de los intereses, a la misma tasa y en la misma modalidad anticipada, la tasa efectiva se comporta como el descuento bancario. En un escrito anterior ya citado el autor dedujo la fórmula (10) en base a una reinversión convencional de los intereses anticipados y criticó el uso de las tablas de descuento bancario, concepto en el fondo diferente, para el caso de los intereses anticipados, reconociendo ahora que en el contexto de la reinversión también anticipada, su uso es correcto. Esta Tabla se incluye al final, como Anexo No. 2

El autor trató en otro artículo el tema del interés sobre saldos* y allí calcula la tasa efectiva de interés para esta modalidad de repago suponiendo reinversión anticipada y convencional. Se demuestra que el interés anticipado sobre saldos, que es el usual en nuestro sistema bancario, conduce a valores iguales a los del descuento bancario cuando la reinversión de los pagos periódicos, a principal e intereses, se efectúa también en la modalidad de composición anticipada.

3.- CONCLUSION:

Es perfectamente válido tener dos tasas efectivas de intereses para el caso de los intereses anticipados dependiendo de la forma de reinversión de los intereses.

Como era de esperarse la reinversión anticipada conduce a mayores costos financieros.

El descuento bancario coincide, en la práctica, con el interés anticipado con reinversión anticipada.

La reinversión indefinida, que presupone intereses anticipados reinvertidos anticipadamente, tiene sus limitaciones en la práctica, siendo el principal el costo de la transacción.

4.- BIBLIOGRAFIA:

Gutiérrez M. Luis Fernando, **Composición anticipada de Intereses,** Publicación No. 2 del Icesi, Junio de 1980, Cali.

---

* Ver bibliografía

Gutiérrez M. Luis Fernando, **Los Intereses sobre Saldos y su Relación con el Interés Compuesto y los Pagos por Cuotas Intereses Anticipados** (Inédito), Septiembre 20, 1980, Cali

Cali, Enero de 1981

ANEXO No. 1

INTERESES EFECTIVOS (i) ANUALES

ANTICIPADOS			
Mes m = 12	Trim. m = 4	Sem. m = 2	Año m = 1
12.809	12.927	13.102	13.440
19.855	20.118	20.503	21.12
27.361	27.822	28.493	29.760
32.627	33.255	34.154	35.84
35.351	36.063	37.088	39.000
38.126	38.933	40.090	42.240
40.960	41.865	43.161	45.560
43.853	44.862	46.303	48.960
49.817	51.051	52.800	56.000

$$i = \left(1 + \frac{r}{\overline{m}}\right)^{m+1} - \left(1 + \frac{r}{\overline{m}}\right)$$

Intereses anticipados que se reinvierten componiendo por períodos vencidos.

ANEXO No. 2

INTERES (i) EFECTIVO

R Descuento % Nominal	Mes	Trim.	Sem.	Año
5	5.14	5.16	5.19	5.26
6	6.20	6.23	6.28	6.38
7	7.27	7.32	7.38	7.53
8	8.36	8.47	8.51	8.70
9	9.45	9.53	9.65	9.89
10	10.56	10.66	10.80	11.11
11	11.68	11.80	11.98	12.36
12	12.82	12.96	13.17	13.64
13	13.96	14.13	14.39	14.94
14	15.12	15.32	15.62	16.78
15	16.29	16.52	16.87	17.65
16	17.48	17.74	13.15	19.05
17	18.68	18.97	19.44	20.43
18	19.89	20.22	2-. 76	21.73
19	21.11	21.49	22.10	23.46
20	22.35	22.77	23.46	25.00
21	23.60	24.07	24.91	26.58
22	24.86	25.39	26.25	28.21
23	26.15	26.73	27.61	29.87
24	27.44	28.00	29.15	31.58
25	28.68	29.45	30.62	33.33
26	30.09	30.84	32.12	35.14
27	31.39	32.24	33.65	36.99
28	32.70	33.67	35.21	38.89
29	34.16	35.12	36.80	40.85
30	35.50	36.61	38.41	42.86
31	36.60	3-. 08	40.06	44.93
32	38.37	39.58	41.72	47.06
33	39.74	41.12	43.43	49.25
34	44.19	42.66	45.16	51.51
35	42.70	44.23	46.92	53.35
36	44.12	45.83	48.72	56.25

Estas tablas para descuento compuesto son las que se vienen utilizando para interés compuesto anticipado.

$$i = \left(1 + \frac{r/m}{1-\frac{r}{m}}\right)^{m} - 1$$

r = tasa nominal por año
m = número de subperíodos de composición anticipada.

Nota: Se supone que los intereses anticipados y los abonos a capital se reinvierten en forma anticipada a la tasa r/m por subperíodo.

PUBLICACIONES DEL ICESI

No. 1 La Metodología de Sistemas y la Solución de Problemas Sociales.
Autor: Alberto León Betancourt, Ph.D.
Mimeógrafo
29 páginas
Marzo de 1.980

No. 2 Composición Anticipada de Intereses. Su efecto sobre la Evaluación Económica de Inversiones y su relación con el Descuento Bancario.
Autor: Luis Fernando Gutiérrez, M.Sc.
Mimeógrafo
18 páginas
Junio de 1.980

No. 3 La Gran Cruzada contra la Desvivienda
Autor: Germán Holguín Zamorano, Master en Administración Industrial
Mimeógrafo
190 páginas
Agosto de 1.980

No. 4 Modelo de Expansión de un Sector Productivo
Autor: Alberto León Betancourt, Ph.D.
Mimeógrafo
22 páginas
Octubre de 1.980

No. 5 La Falacia del Interés efectivo en los Intereses Anticipados
Autor: Luis Fernando Gutiérrez, M.Sc.
Mimeógrafo
13 páginas
Febrero de 1.981