Taller #1
Econometría 06169
Grupos 1 - 3

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Margareth Gonzalez
Sebastián Solanilla

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas. Además es importante recalcar que el trabajo es individual!!!

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo se registra si está lloviendo o no. Sean:

- X el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- Y = es una variable aleatoria que toma el valor de 1 cuando llueve y 0 cuando no llueve. La probabilidad de que llueva es de (3/4) y de que no llueva es de (1/4).
- $T = 2X + 7Y - 4$,
- V = XT

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(T)$ $E(V)$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(T)$ $Var(V)$

1.3. ¿Son V y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

1.4. Halle la covarianza de T y de Y

2. Considere las siguientes matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

2.1 **a)** $A^T A$ **b)** $(A)^{-1}$ **c)** $A \cdot B$ **d)** $B \cdot A$ **e)** $A^T y$ **f)** $B^T B$

g) $y^T y$ **h)** $y y^T$

2.2. **a)** $|A^T A|$ **b)** $|A|$

2.3. **a)** $ran(A^T A)$ **b)** $ran(B A)$

3. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot \ln(X_{2i}) + \beta_3 \cdot \ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

4. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\cdot e^{\varepsilon_i}\right]$

b) $U_t = \alpha\left[\dfrac{w_t\cdot\varepsilon_t}{(p_t)}\right]^{\beta}$

c) $y_i = \beta_1\cdot \mathrm{sen}\left[(K_i)^{1-\beta_1}\right] + \varepsilon_i$

d) $U_t = \alpha\cdot\left[\left(\mathrm{sen}(\beta\cdot X_t)\right)^2 + \left(\cos(\beta\cdot X_t)\right)^2\right] + \beta\cdot Y_t + \varepsilon_t$

5. Se tiene la siguiente información para estimar el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$:

$$X^T\cdot y = \begin{pmatrix}100\\30\\22\end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix}40 & 8 & 0\\8 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad y^T y = \frac{1349}{3}$$

donde y_i corresponde a los miles de unidades vendidas de una revista especialida en noticias económicas en la ciudad i, X_{2i} y X_{3i} representan el precio (en $) de la revista en la ciudad i y el precio (en $) de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i, respectivamente.

a) Estime por MCO el el siguiente el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$. Es decir, encuentre los estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

b) Interprete los valores estimados para β_1, β_2, β_3.

c) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_2.

6. Responda las siguientes preguntas empleando la misma información de la pregunta anterior.

a) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 + \beta_3 = 10$. Explique las implicaciones de su decisión

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

c) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

d) Contraste la hipótesis nula $H_o: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

Taller #1
Econometría 06169
Respuestas Sugeridas
Grupos 1 - 3

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Margareth Gonzalez
Sebastián Solanilla

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas. Además es importante recalcar que el trabajo es individual!!!

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo se registra si está lloviendo o no. Sean:

- X el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- Y = es una variable aleatoria que toma el valor de 1 cuando llueve y 0 cuando no llueve. La probabilidad de que llueva es de (3/4) y de que no llueva es de (1/4).
- $T = 2X + 7Y - 4$,
- V = XT

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $E(Y)$ $E(T)$ $E(V)$

a. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) = \frac{7}{2}$

b. $E(Y) = \sum_{i=1}^{..} y_i \cdot P(y_i) = \frac{3}{4}$

c. $E(T) = E(2X + 7Y - 4) = 2E(X) + 7 \cdot E(Y) - 4 = 2 \cdot \frac{7}{2} + 7 \cdot \frac{3}{4} - 4 = \frac{33}{4} = 8{,}25$.

d. Note que $V = X \cdot T = X \cdot (2X + 7Y - 4) = 2X^2 + 7Y \cdot X - 4 \cdot X$. . Es decir,
$E(V) = E\left[(2X)^2 + 7Y \cdot X - 4 \cdot X\right] = 2E\left(X^2\right) + 7E(Y \cdot X) - 4 \cdot E(X)$. Así pues necesitamos calcular $E\left(X^2\right)$ y $E(Y \cdot X)$. Es fácil mostrar que $E\left[(X)^2\right] = \frac{91}{6}$ (ver presentción #1).

Además, es bastante intuitivo reconocer que X y Y son variables aleatorias independientes, luego $E(Y \cdot X) = E(X)E(Y)$. (Asegurese que puede mostrar formalmente este hecho).

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar $E(V)$. Es decir,
$E(V) = 2E \cdot \left(X^2\right) + 7 \cdot E(Y \cdot X) - 4 \cdot E(X) = \frac{91}{3} + \left(7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) - 4 \cdot \frac{7}{2} = \frac{833}{24} = 34{,}70833333$

1.2 $Var(X)$ $Var(Y)$ $Var(Z)$ $Var(V)$

a. $Var(X) = \frac{35}{12}$.(Ver el archivo de PowerPoint de la presentación #1)

b. $Var(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$

c. $Var(T) = Var(2X + 7Y - 4)$. Como X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $Cov(X, Y) = 0$. Por lo tanto:
$Var(T) = 2^2 \cdot Var(X) + 7^2 \cdot Var(Y) = \left(4 \cdot \frac{35}{12} + 49 \cdot \frac{3}{16}\right) = \frac{1001}{48} = 20.854$

d. Ahora note que $Var(V) = E\left(V^2\right) - \left(E(V)^2\right)$. Ya encontramos que $E(V) = \frac{833}{24}$, sólo nos falta encontrar $E\left(V^2\right)$. Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a que es igual
Es fácil mostrar que:

$$V^2 = \left[\left[\left(2X^2\right) + 7Y \cdot X - 4 \cdot X\right]^2\right] = 4 \cdot X^4 + 28 \cdot X^3 \cdot Y - 16 \cdot X^3 + 49 \cdot Y^2 \cdot X^2 - 56 \cdot Y \cdot X^2 + 16 \cdot X^2$$

Luego,

$$E\left(V^2\right) = 4E\left(X^4\right) + 28 \cdot E\left(X^3\right) \cdot E(Y) - 16 \cdot E\left(X^3\right) + 49 \cdot E\left(Y^2\right) \cdot E\left(X^2\right) - 56 \cdot E(Y) \cdot E\left(X^2\right) + 16 \cdot E\left(X^2\right).$$

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de V:

- $E\left(X^4\right)$
- $E\left(X^3\right)$

A continuación se calculan estas cantidades:

Cálculo de $E\left(X^3\right)$

Los posibles valores de $(X)^3$ son $\left(1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3\right) = (1, 8, 27, 64, 125, 216)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definción,

$$E\left(X^3\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^3 \cdot P\left[(x_i)^3\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^3\right] = \frac{1}{6} \cdot 441 = \frac{147}{2}$$

Cálculo de $E\left(X^4\right)$

Los posibles valores de X^4 son $\left(1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4\right) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definción,

$$E\left(X^4\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^4 \cdot P\left[(x_i)^4\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)^4\right] = \frac{1}{6} \cdot 2275 = \frac{2275}{6}$$

Entonces tenemos que:

$$E\left(V^2\right) = 4E\left(X^4\right) + 28 \cdot E\left(X^3\right) \cdot E(Y) - 16 \cdot E\left(X^3\right) + 49 \cdot E\left(Y^2\right) \cdot E\left(X^2\right) - 56 \cdot E(Y) \cdot E\left(X^2\right) + 16 \cdot E\left(X^2\right)$$

$$E\left(V^2\right) = 4\frac{2275}{6} + 28\cdot\frac{147}{2}\cdot\frac{3}{4} - 16\cdot\frac{147}{2} + 49\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{91}{6} - 56\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{91}{6} + 16\cdot\frac{91}{6} = \frac{49133}{24} = 2047.208$$

Así, la varianza de V es:

$$\mathrm{Var}(V) = E\left(V^2\right) - \left(E(V)^2\right)$$

$$\frac{49133}{24} - \left(\frac{833}{24}\right)^2 = \frac{485303}{576}$$

$$\frac{485303}{576} = 842.54$$

1.3. ¿Son V y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que V y Y son independientes si y solamente si $E(VY) = E(V)\cdot E(Y)$ (*).
Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (*).

$$E(V)\cdot E(Y) = E\left(2X^2 + 7Y\cdot X - 4\cdot X\right)\cdot E(Y)$$

$$E(V)\cdot E(Y) = 2\cdot E\cdot\left(X^2\right)E(Y) + 7\cdot E(Y)^2 E(X) - 4\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (*).

$$E(VY) = E\left[\left(2X^2 + 7Y\cdot X - 4\cdot X\right)\cdot(Y)\right]$$

$$E(VY) = E\left(2X^2Y + 7Y^2\cdot X - 4\cdot XY\right)$$

$$E(VY) = 2E\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 7\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) - 4\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

Finalmente, podemos comparar la parte dereacha e izquierda de la ecuación (*):

$$E(VY) = E(V)\cdot E(Y)$$

$$2E\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 7\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) - 4\cdot E(X)\cdot E(Y) \ \textbf{?} \ \ 2\cdot E\cdot\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 7\cdot E(Y)^2\cdot E(X) - 4\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

$$7\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) \quad \textbf{?} \quad 7\cdot E(Y)^2\cdot E(X)$$

$$E\left(Y^2\right) \neq E(Y)^2$$

Como ven, en este caso $E(VY) \neq E(V)\cdot E(Y)$ y por tanto V y Y no son independientes

1.4. Halle la covarianza de T y de Y

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = E(T\cdot Y) - E(T)\cdot E(Y) = E[(2\cdot X + 7\cdot Y - 4)\cdot Y] - (E(2\cdot X + 7\cdot Y - 4)\cdot E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = E\left(2\cdot X\cdot Y + 7\cdot Y^2 - 4\cdot Y\right) - (E(2\cdot X)\cdot E(Y) + E(7\cdot Y)\cdot E(Y) - 4\cdot E(Y))$$

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = \left(E(2\cdot X\cdot Y) + E\left(7\cdot Y^2\right) - E(4\cdot Y)\right) - [(E(2\cdot X)\cdot E(Y) + E(7\cdot Y)\cdot E(Y)) - 4\cdot E(Y)]$$

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = 2\cdot E(X)\cdot E(Y) + 7\cdot E\left(Y^2\right) - 4\cdot E(Y) - 2\cdot E(X)\cdot E(Y) - 7\cdot E(Y)^2 + 4\cdot E(Y)$$

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = 7\cdot E\left(Y^2\right) - 7\cdot E(Y)^2 = 7\cdot E\left(Y^2\right) - E(Y)^2 = 7\cdot \mathrm{Var}(Y) = 7\cdot\frac{3}{16} = \frac{21}{16}$$

$$\mathrm{Cov}(T,Y) = \frac{21}{16}$$

2. Considere las siguientes matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)
2.1

a) $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 9 \\ 12 & 36 & 24 \\ 9 & 24 & 81 \end{pmatrix}$

b) $(A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

c) $A\cdot B = \begin{pmatrix} 30 & 54 \\ 7 & 9 \\ 40 & 0 \end{pmatrix}$

d) $B\cdot A$ no esta definido

e) $A^T y = \begin{pmatrix} 22 \\ 30 \\ 88 \end{pmatrix}$

f) $B^T B = \begin{pmatrix} 30 & 24 \\ 24 & 117 \end{pmatrix}$

g) $y^T y = (218)$

h) $y y^T = \begin{pmatrix} 25 & 60 & 35 \\ 60 & 144 & 84 \\ 35 & 84 & 49 \end{pmatrix}$

2.2. **a)** $\left|A^T A\right| = 2.304\times 10^3$ **b)** $|A| = -48$

2.3. **a)** $\mathrm{ran}\left(A^T A\right) = 3$

Noten que $\mathrm{ran}\left(A^T A\right)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn existe n valores propios). Además, tenemos que $\left|A^T A\right| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, donde λ_i son los correspondientes valores propios. Dado que $\left|A^T A\right| \neq 0$, ninguna de las variables aleatorias serán iguales a cero, por tanto $A^T A$ tendrá rango completo.

b) $\mathrm{ran}(BA)$ no esta definido

3. Dado el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2\cdot\ln(X_{2i}) + \beta_3\cdot\ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$, pruebe que los coeficientes de regresión estimados corresponden a las elasticidades asociadas con cada X y que esas elasticidades son constantes a lo largo de la linea de regresión.

Note que el modelo $\ln(Y_i) = \beta_1 + \beta_2\cdot\ln(X_{2i}) + \beta_3\cdot\ln(X_{3i}) + \varepsilon_i$ es equivalente al siguiente modelo no lineal $Y_i = \beta\cdot(X_{2i})^{\beta_2}\cdot(X_{3i})^{\beta_3}\cdot u_i$, donde $u_i = e^{\varepsilon_i}$ y $\beta = e^{\beta_1}$. Además sabemos que la elasticidad asociada con X_2 esta dada por: $\eta(X_2) = \dfrac{\Delta\%\mathrm{en}Y}{\Delta\%\mathrm{en}X_2} = \left(\dfrac{d}{dX_{2i}}Y_i\right)\cdot\dfrac{X_{2i}}{Y_i}$. En este caso

$$\frac{d}{dX_{2i}}Y_i = \beta_2\cdot\beta_1\cdot(X_{2i})^{\beta_2-1}\cdot(X_{3i})^{\beta_3}\cdot u_i = \beta_2\cdot\frac{\beta_1\cdot(X_{2i})^{\beta_2}\cdot(X_{3i})^{\beta_3}\cdot u_i}{X_{2i}} = \beta_2\cdot\frac{Y_i}{X_{2i}}$$

Entonces, tenemos que

$$\eta(X_2) = \frac{\Delta\%\mathrm{en}Y}{\Delta\%\mathrm{en}X_2} = \left(\frac{d}{dX_{2i}}Y_i\right)\cdot\frac{X_{2i}}{Y_i} = \left(\beta_2\cdot\frac{Y_i}{X_{2i}}\right)\cdot\frac{X_{2i}}{Y_i} = \beta_2$$

De igual forma podemos mostrar que $\eta(X_3) = \beta_3$.

4. ¿Cúales de las siguientes relaciones funcionales se pueden estimar por medio de un modelo lineal? (Explique su respuesta. Muestre todo su trabajo)

a) $y_i = \left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\cdot e^{\varepsilon_i}\right]$ b) $U_t = \alpha\left[\dfrac{w_t\cdot\varepsilon_t}{(p_t)^{w_t}}\right]^{\beta}$

c) $y_i = \beta_1\cdot\mathrm{sen}\left[(K_i)^{1-\beta}\right] + \varepsilon_i$ d) $U_t = \alpha\cdot\left[(\mathrm{sen}(\beta\cdot X_t))^2 + (\cos(\beta\cdot X_t))^2\right] + \beta\cdot Y_t + \varepsilon_t$

a) El modelo $y_i = \left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\cdot e^{\varepsilon_i}\right]$ puede ser linealizado de la siguiente forma:

$$\ln(y_i) = \ln\left[\alpha\cdot(L_i)^{\beta}\cdot(K_i)^{1-\beta}\cdot e^{\varepsilon_i}\right]$$
$$\ln(y_i) = \ln(\alpha) + \beta\cdot\ln(L_i) + (1-\beta)\cdot\ln(K_i) + \varepsilon_i$$

Ahora podemos definir los siguientes regresores y coeficientes:

$W_i = \ln(y_i)$ $X_{1i} = \ln(L_i)$ $X_{2i} = \ln(K_i)$ $\gamma = \ln(\alpha)$

Así el modelo original es equivalente a:

$$W_i = \gamma + \beta X_i + (1-\beta)X_{2i} + \varepsilon_i$$

b) Claramente el modelo $U_t = \alpha\left(\dfrac{w_t\cdot\varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$ es no lineal, pero se puede linealizar facilmente aplicando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación. Es decir,

$$U_t = \alpha\left(\frac{w_t\cdot\varepsilon_t}{p_t}\right)^{\beta}$$
$$\ln(U_t) = \ln\left[\alpha\cdot(w_t)^{\beta}\cdot(p_t)^{-\beta}\cdot(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$
$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \ln\left[(w_t)^{\beta}\right] + \ln\left[(p_t)^{-\beta}\right] + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$
$$\ln(U_t) = \ln(\alpha) + \beta\cdot\ln(w_t) - \beta\cdot\ln(p_t) + \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$$

Ahora podemos definir los siguientes regresores y coeficientes:

$y_t = \ln(U_t)$ $X_{1t} = \ln(w_t) - \ln(p_t)$

Así el modelo original es equivalente a: $\mu_t = \ln\left[(\varepsilon_t)^{\beta}\right]$

$$y_t = \eta + \beta\cdot X_{1t} + \mu_t$$

c) Claramente el modelo $y_i = \beta_1\cdot\mathrm{sen}\left[(K_i)^{1-\beta_1}\right] + \varepsilon_i$ no es lineal, pues no es lineal en el parámetro β_1.

d) El modelo es lineal, pues recuerden que $(\mathrm{sen}(a))^2 + (\cos(a))^2 = 1$ y por tanto tenemos que:

$$U_t = \alpha\cdot\left[(\mathrm{sen}(\beta\cdot X_t))^2 + (\cos(\beta\cdot X_t))^2\right] + \beta\cdot Y_t + \varepsilon_t$$
$$U_t = \alpha + \beta\cdot Y_t + \varepsilon_t$$

5. Se tiene la siguiente información para estimar el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$:

$$X^T\cdot y = \begin{pmatrix}100\\30\\22\end{pmatrix} \qquad X^T X = \begin{pmatrix}40 & 8 & 0\\8 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad y^T y = \frac{1349}{3}$$

donde y_i corresponde a los miles de unidades vendidas de una revista especialida en noticias económicas en la ciudad i, X_{2i} y X_{3i} representan el precio (en $) de la revista en la ciudad i y el precio (en $) de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i, respectivamente.

a) Estime por MCO el el siguiente el modelo $y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i$. Es decir, encuentre los estimadores para β_1, β_2, β_3 y σ^2.

Recuerden que

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$$

Sin importar el método que empleen, encontrarán que

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Y por tanto,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{25}{6} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.667 \\ 4.167 \\ 5.5 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos que encontrar el estimador para σ^2.

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat^T \cdot X^T y}{n - k}$$

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 40$ y $y^T y = \frac{1349}{3}$. Así,

$$s^2 = \frac{\frac{1349}{3} - \left(\frac{5}{3} \;\; \frac{25}{6} \;\; \frac{11}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 22 \end{pmatrix}}{40 - 3} = \frac{\frac{1349}{3} - \left(\frac{1238}{3}\right)}{37} = 1$$

Además tenemos que la matriz de varianzas y covarianzas esta dada por

$$\widehat{Var\left(\hat{\beta}\right)} = s^2\left(X^T X\right)^{-1} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0 \\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Interprete los valores estimados para β_1, β_2, β_3.

- $\beta hat_2 = \frac{25}{6}$, un aumento de un peso en el precio de la revista provocará un aumento de 4167 revistas vendidas. (noten que este signo es contra intuitivo!!)
- $\beta hat_3 = \frac{11}{2}$, un aumento de un peso en el precio de la competencia aumentará la venta de revistas en 5500 unidades.
- $\beta hat_1 = \frac{5}{2}$, la venta de revistas que no depende ni del propio precio ni del de la competencia es de 1667 unidades.

c) Contraste la hipótesis nula $H_0 : \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión

Queremos probar la siguiente hipótesis nula $H_0 : \beta_3 = 0$, versus la hipótesis alterna $H_A : \beta_3 \neq 0$. Como vimos en clase el t calculado es dado por la siguiente formula: $t_c = \frac{\beta hat_3}{s(\beta hat_3)}$. En este caso tenemos

$$t_c = \frac{\frac{11}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{1}{2}} = 11$$

Este t_c lo tenemos que comparar con el $t_{0.025,37} = 2.026$ de la tabla (Aquí ustedes podían escoger cualquier nivel de significancia y la decisión sería la misma $t_{0.05,37} = 1.687$ y $t_{0.005,37} = 2.715$). Note que siempre $|$ t cal $|$ es mayor que el valor crítico, por lo tanto hay suficiente evidencia para decir que el coeficiente asociado con el precio de la competencia de la revista bajo estudio en la ciudad i es significativamente diferente de cero. En otras palabras, podemos decir con un 99% de confianza que el precio de la competencia ayuda ha explicar la variabilidad en la variable dependiente.

d) Construya un intevalo de confianza del 95% para β_2.

Un intervalo de confianza del 95% para β_2 esta dado por

$$\left(\frac{25}{6} - t_{0.025,37}\cdot\sqrt{\frac{5}{12}}, \frac{25}{6} + t_{0.025,37}\cdot\sqrt{\frac{5}{12}}\right)$$

$$\left[\frac{25}{6} - (2.026)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{25}{6} + (2.026)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$$

Nota: Si no tenían calculadora, la linea anterior era suficiente.

$$(2.859, 5.474)$$

6. Responda las siguientes preguntas empleando la misma información de la pregunta anterior.

a) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_2 + \beta_3 = 10$. Explique las implicaciones de su decisión

(Nota: Esta Hipótesis podía ser probada tambien por medio de una prueba t, en todo caso la decisión sería la misma)
Esta hipótesis nula puede ser escrita en la forma $R\cdot\beta = C$. Como sólo existen una restricción y tenemos tres parametros estimados, entonces la matriz R tendrá dimensiones 1x3. En este caso $R = (0\ \ 1\ \ 1)$ y $C = 10$. Así, el F calculado está dado por

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{\left((C - R\cdot\beta hat)\right)^T\cdot\left[R\cdot\left((X)^T\cdot X\right)^{-1}\cdot R^T\right]^{-1}\cdot(C - R\cdot\beta hat)}{r}}{s^2}$$

Del taller anterior sabemos que:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\\ \hat{\beta}_3\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{25}{6}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix} \qquad \left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0\\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad s^2 = 1$$

Entonces tenemos que

$$F_{calculado} = \frac{\dfrac{\left[10 - (0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{25}{6}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}\right]^T\cdot\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0\\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\left[10 - (0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{25}{6}\\ \frac{11}{2}\end{pmatrix}\right]}{1}}{1}$$

$$F_{calculado} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^T\cdot\left[(0\ \ 1\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & 0\\ -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}\cdot\frac{1}{3}}{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^T\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$F_{calculado} = 0.167$$

Este $F_{calculado}$ lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(1,37)} = 4.1054$. Claramente el $F_{calculado}$ es menor que el F de la tabla y por tanto no existe suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula que $\beta_2 + \beta_3 = 10$.

b) Construya la Tabla ANOVA para el modelo estimado.

Sabemos que la tabla ANOVA viene dada por:

Tabla ANOVA

Fuente de variación	**SS**	**G de L**	**MS**
Regresión	$SSR = \hat{\beta}^T X^T y - n\overline{Y}^2$	$k - 1$	$\frac{SSR}{k-1}$
Error (Residuos)	$SSE = y^T y - \hat{\beta}^T X^T y$	$n - k$	$\frac{SSE}{n-k}$
Total	$y^T y - n\overline{Y}^2$	$n - 1$	

En este caso tenemos que $k := 3$, $n := 40$, $y^T y = \frac{1349}{3}$, $\beta hat^T\cdot X^T y = \left(\frac{1238}{3}\right)$ y $Ybar = \frac{100}{40}$. Asi, la tabla Anova es

Tabla ANOVA

Fuente de variación	SS	G de L	
Regresión	$\frac{1238}{3} - \left[40 \cdot \left(\frac{100}{40}\right)^2\right] = \frac{488}{3}$	$3 - 1 = 2$	$\frac{\frac{488}{3}}{2} = \frac{244}{3}$
Error (Residuos)	$\frac{1349}{3} - \frac{1238}{3} = 37$	$40 - 3 = 37$	$\frac{37}{37} = 1$
Total	$\frac{1349}{3} - 40 \cdot \left(\frac{100}{40}\right)^2 = \frac{599}{3}$	39	

c) Calcule el R^2 del modelo estimado. Explique en sus propias palabras el significado de su respuesta numérica.

Sabemos que $R^2 = \frac{SSR}{SST}$. Entonces, en este caso tenemos que el R^2 será $\frac{\frac{488}{3}}{\frac{599}{3}} = \frac{488}{599} = 0.815$

. Esto implica que el 81.5% de la variación de Y es explicada por nuestro modelo.

d) Contraste la hipótesis nula $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$. Explique las implicaciones de su decisión.

Existen varias formas de hacer esta pregunta. Una de las formas es usando la información de la tabla ANOVA. Sabemos que el F calculado para probar dicha Ho esta dado por

$$F_{calculado} = \frac{MSR}{MSE} = \frac{\frac{244}{3}}{1} = 81.333$$

El F de la tabla par este caso es $F_{0.05,(2,37)} = 3.252$. Como el $F_{calculado} > F_{0.05,(2,37)}$,

entonces hay suficiente evicencia para rechazar la Ho. Así podemos decir que ambas variables son importantes en nuestro modelo, es ddecir que son son significativamente distintas de cero.