Taller #1

Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso

Notas:
- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado entre las 8:00 am y 9:00 am del 8 de agosto en mi oficina..

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Demuestre que:
   a. $E(\bar{Y}) = \mu$
   b. $Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$
2. En un seminario de profesores de estadística en una isla del caribe, estos fueron sorprendidos por un huracán y quedaron atrapados en el centro de convenciones, entonces en medio del aburrimiento general un conferencista se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe el huracán (según la institución metereologica local existe una probabilidad de $1/3$ de que continúe). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	4
2	3
3	7
4	9
5	12
6	15

Si Cara Superior del dado blanco es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	3
3	-7
4	-10
5	-12
6	-15

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa huracan	10
No continúa huracan	7

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima respectivamente.

A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.
b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W.
c. Calcule la Varianza de X.
d. Calcule la varianza de Y.
e. Calcule la varianza de Z.

3. Continuando con la pregunta anterior, sea $F = X + Y$.
   a. Calcule $Cov[W, F]$
   b. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?
4. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & -5 \\ -6 & 4 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1000 \\ -2000 \\ 3000 \\ -5000 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1000 & 2000 & -3000 & -1000 \end{bmatrix}$$

   Encuentre (muestre todo el procedimiento):
   a. *AB, CB, AC, CD y BD*
   b. A^T, $\det(A)$, (B^{-1}) y $ran(A)$
5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre
   a. Cree dos matrices de dimensiones 3x3 , en las cuales ninguno de los elementos se repitan y cada una de las filas, columnas y diagonales sumen exactamente lo mismo.
   b. Empleando las matrices del punto 4, calcule: A^{-1} y $\left[A^T B^T\right]^{-1}$

Taller #1

Respuestas Sugeridas
Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso

Notas:
- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado entre las 8:00 am y 9:00 am del 8 de agosto en mi oficina..

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Demuestre que:
   a. $E(\bar{Y}) = \mu$

Al ser la $E(\bar{Y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$

Entonces: $\frac{1}{n}n\mu = \mu$

   b. $Var(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Ya sabemos que: $Var(\bar{Y}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)$

Lo que equivale a: $\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n}\operatorname{cov}(Y_i, Y_j)\right)$

Finalmente tenemos que esta expresión equivale a:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 + 2(0)\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

2. En un seminario de profesores de estadística en una isla del caribe que fueron sorprendidos por un huracán y quedaron atrapados en el centro de convenciones, entonces en medio del aburrimiento general un conferencista se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe el huracán (según la institución metereologica local existe una probabilidad de $1/3$ de que continúe). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador

debe pagar mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	4
2	3
3	7
4	9
5	12
6	15

Si Cara Superior del dado blanco es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	3
3	-7
4	-10
5	-12
6	-15

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa huracan	10
No continúa huracan	7

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por el jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima respectivamente.

A partir de la Información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, se obtiene:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{50}{6} = 8.33$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot P(Y_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{-40}{6} = -6.67$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot P(Z_i) = \frac{10}{3} + \frac{14}{3} = \frac{24}{3} = 8.0$$

b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W.

De acuerdo con las propiedades del valor esperado se obtiene:

$$E(W) = E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

Por lo tanto: $E(W) = \frac{50}{6} - \frac{40}{6} + \frac{24}{3} = \frac{29}{3}$

c. Calcule la Varianza de X.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var[A]=E\left[A^2\right]-\left[E[A]\right]^2$, se obtiene:

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{262}{3}-\frac{625}{9}=\frac{161}{9}$$

d. Calcule la varianza de Y.

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-\left(E(Y)\right)^2=88-\frac{400}{9}=\frac{392}{9}$$

e. Calcule la varianza de Z.

$$Var(Z)=E\left(Z^2\right)-\left(E(Z)\right)^2=66-64=2$$

3.

a. Sea $F=X+Y$, calcule $Cov[W,F]$

Empleando la definición de la covarianza tenemos:

$$Cov[W,F]=E[WF]-E[W]\cdot E[F]$$
$$Cov[W,F]=E\left[(X+Y+Z)(X+Y)\right]-E[X+Y+Z]\cdot E[X+Y]$$

Resolviendo se obtiene que $Cov[W,F]=61.44$

b. ¿Son W^2 y W (estadísticamente) independientes?

W^2 y W son independientes si y sólo si $E(W^2W)=E(W^2)\cdot E(W)$. Así, se debe probar esta condición. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(W^2W)=E\left[(X+Y+Z)^2\cdot(X+Y+Z)\right]$$
$$E(W^2W)=E\left[\left(X^2+Y^2+Z^2+2XY+2XZ+2YZ\right)\cdot(X+Y+Z)\right]$$
$$E\left(W^2W\right)=2861.33$$

Ahora veamos a que es igual el lado derecho:

$$E(W^2)\cdot E(W)=E\left[(X+Y+Z)^2\right]\cdot E(X+Y+Z)$$
$$E(W^2)\cdot E(W)=\left[E\left(X^2\right)+E\left(Y^2\right)+E\left(Z^2\right)+2E(XY)+2E(XZ)+2E(YZ)\right]\cdot\left[E(W)\right]$$
$$E\left(W^2\right)E(W)=1516.59$$

Por lo tanto, $E(W^2W)\neq E(W^2)\cdot E(W)$ y se concluye que W^2 y W no son independientes.

4. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & -3\\ -1 & 2 & 3 & 5\\ 6 & -4 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 4 & -5\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -4 & 3\\ 1 & -2 & -3 & -5\\ -6 & 4 & 2 & -1\\ -3 & -2 & -4 & 5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1000\\ -2000\\ 3000\\ -5000\end{bmatrix}\qquad D=\begin{bmatrix}-1000 & 2000 & -3000 & -1000\end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a) AB, CB, AC, CD y BD

$$AB=\begin{bmatrix}-21 & 30 & 18 & -3\\ -29 & -4 & -16 & 9\\ -7 & 10 & -20 & 45\\ -13 & 28 & 10 & -30\end{bmatrix}$$

CB = No es conformable

$$AC=\begin{bmatrix}33000\\ -21000\\ 3000\\ 36000\end{bmatrix}$$

CD = No es conformable

$$BD=\begin{bmatrix}21000\\ -1000\\ 7000\\ 16000\end{bmatrix}$$

b) A^T, $\det(A)$, (B^{-1}) y $ran(A)$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad \det(A) = 1026 \quad (B^{-1}) = \begin{bmatrix} 0.0994 & -0.0468 & -0.1404 & -0.1345 \\ 0.2368 & -0.0526 & 0.0088 & -0.1930 \\ -0.1637 & -0.0994 & 0.0351 & 0.0058 \\ 0.0234 & -0.1287 & -0.0526 & 0.0468 \end{bmatrix}$$

Ran(A)=4 ya que existen cuatro valores propios distintos de cero y además el $\det(A) \neq 0$

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre

a) Cree dos matrices de dimensiones 3x3 , en las cuales ninguno de los elementos se repitan y cada una de las filas, columnas y diagonales sumen exactamente lo mismo.

$$Z = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Con las matrices del punto 4, calcule: A^{-1} y $\left[A^T B^T\right]^{-1}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0994 & 0.0468 & 0.1404 & 0.1345 \\ -0.2368 & 0.0526 & -0.0088 & 0.1930 \\ 0.1637 & 0.0994 & -0.0351 & -0.0058 \\ -0.0234 & 0.1287 & 0.0526 & -0.0468 \end{bmatrix}$$

$$\left[A^T B^T\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -0.0186 & -0.0051 & 0.0454 & 0.0184 \\ -0.0291 & -0.0156 & -0.0087 & -0.0049 \\ 0.0122 & 0.0232 & -0.0230 & 0.0087 \\ 0.0115 & 0.0307 & -0.0417 & -0.0236 \end{bmatrix}$$