Taller #3

Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitora: Ana Isabel Gallego L.

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado los diez primeros minutos de la clase del 20 de agosto. No se recibirán talleres después de esa hora.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.

Mordelón S.A., una empresa de comida para perros, tiene un modelo que le permite estudiar las ventas de dicho producto en función de sus gastos en anuncios de televisión.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Para ello define las siguientes variables:

Y_i : Ventas de los paquetes de Mordelón en millones de pesos.

x_i : Gastos de los anuncios publicitarios en televisión en millones de pesos.

Se recoge información durante 22 semanas, obteniéndose los siguientes resultados:

$\overline{Y}_i = 14.5463$ $\sum Y_i^2 = 288{,}855.7407$ $\overline{x} = 3.917273$

$\sum x_i^2 = 353.01745$ $\sum Y_i x_i = 9{,}922.69428$

1. De acuerdo a esta información:
   a. Obtenga la estimación por MCO de dicho modelo. Recuerde que debe mostrar todo el procedimiento.
   b. Construya el máximo número de elementos posible en la tabla ANOVA.
   c. ¿Considera usted que el gasto en publicidad determina de alguna manera el nivel de ventas? Muestre sus cálculos y argumente.
   d. Obtenga una medida de bondad de ajuste. ¿Es este un buen modelo?
2. De acuerdo a la información anterior, responda las siguientes preguntas
   a. Interprete los coeficientes estimados.
   b. Ante la afirmación del jefe de publicidad, de invertir 4 millones de pesos en campaña publicitaria para tv la próxima semana, el jefe comercial espera tener ventas alrededor de 114 millones de pesos la próxima semana. ¿Puede decir usted que está equivocado? Sustente y muestre su proceso matemático.
3. ¿Cuál es la elasticidad de las ventas al gasto en publicidad? Interprete.
4. Determine si los siguientes modelos pueden estimarse por MCO, explique su respuesta al máximo.
   a. $\frac{1}{y_i} = \cos(\alpha) \cdot X_i^{3\beta_1} \cdot Y_i^{\beta_3\beta_4} \cdot \theta \cdot Z_i^{\beta_4^\gamma} \cdot \varepsilon_i$

   b. $\frac{1}{y_t} = \sqrt{\gamma\left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^{\theta} X_{2t}^{\tau}\varepsilon_t}$

En una empresa de confecciones, desea determinar el efecto que tienen el descuento promedio por deudas con el fondo de empleados (por cada 1000 dólares de deuda), el salario por hora extra y el salario por hora no extraordinaria, en el número de horas extras trabajadas por sus empleadas en el mes Y_i. Una firma de estudios econométricos y estadísticos determina el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

donde:

X_{1i} Es el salario por hora no extra.

X_{2i} Es el salario por hora extra.

X_{3i} Es el descuento promedio por deudas con el fondo de empleados (en diez dólares).

Se recoge la siguiente información de 60 empleadas de la empresa.

$\sum_{i=1}^{60} Y_i = 305{,}514$

$\sum_{i=1}^{60} X_{1i} = 51{,}61464$

$\sum_{i=1}^{60} X_{2i} = 25{,}08$

$\sum_{i=1}^{60} X_{3i} = 15{,}14784$

$\sum_{i=1}^{60} Y_i X_{1i} = -254{,}133504$

$\sum_{i=1}^{60} Y_i X_{3i} = 874{,}36464$

$\sum_{i=1}^{60} X_{1i} X_{3i} = -11{,}34864$

$\sum_{i=1}^{60} X^2_{1i} = 67{,}89392$

$\sum_{i=1}^{60} X^2_{2i} = 169{,}4916$

$\sum_{i=1}^{60} Y_i X_{2i} = 180{,}77112$

$\sum_{i=1}^{60} X_{1i} X_{2i} = -18{,}8324112$

$\sum_{i=1}^{60} X_{2i} X_{3i} = 78{,}5184$

$\sum_{i=1}^{60} X^2_{3i} = 55{,}958496$

$\sum_{i=1}^{60} Y_i^2 = 2.567.825$

5. De acuerdo a la información anterior, resuelva (Muestre las fórmulas y el procedimiento empleado).
   a. Determine la matriz $X^T y$ y $X^T X$
   b. Estime los parámetros del modelo por MCO.

Taller #3

Respuestas Sugeridas

Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitora: Ana Isabel Gallego L.

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado los diez primeros minutos de la clase del 20 de agosto. No se recibirán talleres después de esa hora.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.

Mordelón S.A., una empresa de comida para perros, tiene un modelo que le permite estudiar las ventas de dicho producto en función de sus gastos en anuncios de televisión.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$

Para ello define las siguientes variables:

Y_i : Ventas de los paquetes de Mordelón en millones de pesos.

x_i : Gastos de los anuncios publicitarios en televisión en millones de pesos.

Se recoge información durante 22 semanas, obteniéndose los siguientes resultados:

$\overline{Y_i} = 114.5463$ $\sum Y_i^2 = 288,855.7407$ $\overline{x} = 3.917273$

$\sum x_i^2 = 353.01745$ $\sum Y_i x_i = 9,922.69428$

1. a. Obtenga la estimación por MCO de dicho modelo. Recuerde que debe mostrar todo el procedimiento.

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i x_i - n \cdot \overline{Y} \cdot \overline{x}}{\sum_{t=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \frac{9.922,69428 - 22 * 114,5463 * 3,917273}{353,01745 - 22 * 3,917273^2} = 3,31198$$

$$\hat{\beta}_1 = \overline{Y} - \hat{\beta}_2 \overline{x} = 114,5463 - 3,31198 * 3,3917273 = 101.572351$$

La estimación del modelo es pues:

$$\hat{Y}_i = 101,572351 + 3.31198 x_i$$

b. Construya el máximo número de elementos posible en la tabla ANOVA.

Fuente de Variación	SS	G de L	MS
Regresión	$SCR = SCT - SCE = 169.22$	1	169.22
Error	$SCE = \sum Y_i^2 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{n} Y_i x_i = 27.71$	20	1.3857

Total	$SCT = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = 196.93$	21

c. ¿Considera usted que el gasto en publicidad determina de alguna manera el nivel de ventas? Muestre sus cálculos y argumente.

Se plantea la hipótesis nula $H_o:\ \beta_2 = 0 \ \ vs\ \ H_a: \beta_2 \neq 0$

Se realiza una prueba t para la significancia individual, pero es necesario conocer el error estándar de la pendiente, por esto se calcula $s_{\hat{\beta}_2}$.

$$S_{\hat{\beta}_2}^2 = \frac{1}{\sum_{t=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} S^2 = \frac{1.38567}{15.4268} = \left(0.2997\right)^2$$

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = \frac{3.31198}{0.2997} = 11.05$$

Dado que el t calculado es mucho mayor que el t con 99% de confianza y 20 grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula y decimos que la pendiente es significativa dentro del modelo y por lo tanto el gasto en publicidad, determina el nivel de ventas.

d. Obtenga una medida de bondad de ajuste. ¿Es este un buen modelo?

$$r^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{169.2246}{196.93} = 0.8593$$

Del coeficiente de determinación se puede decir que el 85.93% de la variación de las ventas es explicada por el modelo. Sí es un buen modelo.

2. a. Interprete los coeficientes estimados.

Las ventas que no dependen del gasto en publicidad son 101.572351 millones de pesos.

Cada incremento de un millón de pesos en el gasto en publicidad, genera un incremento de 3.31198 millones de pesos en las ventas de Mordelón.

b. Ante la afirmación del jefe de publicidad, de invertir 4 millones de pesos en campaña publicitaria para tv la próxima semana, el jefe comercial espera tener ventas alrededor de 114 millones de pesos la próxima semana. ¿Puede decir usted que está equivocado? Sustente y muestre su proceso matemático.

$$\hat{Y}_i = 101,572351 + 3.31198(4) = 114.8203$$

$$\hat{Y}_i \pm t_{\alpha/2, n-2}\, s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\left(x_p - \bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}} = 114.8203 \pm 2.08596 \cdot \sqrt{1.3856688} \cdot \sqrt{\frac{1}{22} + \frac{\left(4 - 3.917273\right)^2}{15.4268}} = \left[114.29; 115.35\right]$$

3. ¿Cuál es la elasticidad de las ventas al gasto en publicidad? Interprete.

Dado que no contamos con un modelo de elasticidad constante, se tiene que calcular la elasticidad alrededor de la media.

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$$
$$dY_i = \beta_2 dx_i$$
$$\frac{dY_i}{dx_i} = \beta_2$$
$$\frac{dY_i}{dx_i} * \frac{\overline{x}}{\overline{Y}} = \beta_2 \frac{\overline{x}}{\overline{Y}}$$
$$E_{v,g} \approx \beta_2 \frac{\overline{x}}{\overline{Y}} = 3.31206 * (3.917273/114.5463) = 0.113264$$

Alrededor de la media, un incremento de 1% en el gasto en publicidad, incrementa en 0.113264% las ventas.

4 Determine si los siguientes modelos pueden estimarse por MCO, explique su respuesta al máximo.

a. $\frac{1}{y_i} = \cos(\alpha) \cdot X_i^{3\beta_1} \cdot Y_i^{\beta_3\beta_4} \cdot \theta \cdot Z_i^{\beta_4^\gamma} \cdot \varepsilon_i$

Respuesta sugerida:
Verdadero: Sí se puede estimar por MCO aunque no todos sus parámetros se pueden recuperar.

$$\frac{1}{y_i} = \cos(\alpha) \cdot X_i^{3\beta_1} \cdot Y_i^{\beta_3\beta_4} \cdot \theta \cdot Z_i^{\beta_4^\gamma} \cdot \varepsilon_i$$

Digamos que:

$$\frac{1}{y_i} = w_i$$
$$\ln(w_i) = \ln\left(\cos(\alpha) \cdot X_i^{3\beta_1} \cdot Y_i^{\beta_3\beta_4} \cdot \theta Z_i^{\beta_4^\gamma} \cdot \varepsilon_i\right)$$
$$\ln(w_i) = \ln\left(\cos(\alpha) + \theta\right) + 3\beta_1 \ln(X_i) + \beta_3\beta_4 \ln(Y_i) + \beta_4^\gamma \ln(Z_i) + \ln(\varepsilon_i)$$

Si

$$\ln(\varepsilon_i) = \mu_i,\ \ln\left(\cos(\alpha) + \theta\right) = \beta_0, \quad 3\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_3\beta_4 = \alpha_2,\ y\ \ \beta_4^\gamma = \alpha_3$$

Tenemos

$$\ln(w_i) = \beta_0 + \alpha_1 \ln(X_i) + \alpha_2 \ln(Y_i) + \alpha_3 \ln(Z_i) + \mu_i$$

b. $\frac{1}{y_t} = \sqrt{\gamma \left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^\theta X_{2t}^\tau \varepsilon_t}$

Verdadero. Sí se puede estimar por MCO aunque no todos sus parámetros se pueden recuperar:

$$\frac{1}{y_t} = \sqrt{\gamma \left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^\theta X_{2t}^\tau \varepsilon_t}$$

Podemos transformarlo en:

$$\left(\frac{1}{y_t}\right)^2 = \gamma\left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^{\theta} X_{2t}^{\tau}\varepsilon_t$$

y

$$si \quad \left(\frac{1}{y_t}\right)^2 = Y_t$$

$$\ln(Y_t) = \ln\left[\gamma\left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^{\theta} X_{2t}^{\tau}\varepsilon_t\right]$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\gamma) + \ln\left(\left(\frac{1}{\ln(X_{1t})}\right)^{\theta}\right) + \ln\left(X_{2t}^{\tau}\right) + \ln(\varepsilon_t)$$

$$\ln(Y_t) = \ln(\gamma) - \theta\ln(\ln(X_{1t})) + \tau\ln(X_{2t}) + \ln(\varepsilon_t)$$

$$\ln(Y_t) = \beta_1 + \rho_1 Z_{1t} + \tau Z_{2t} + \mu_t$$

donde

$$Z_{1t} = \ln(\ln(X_{1t})), \quad Z_{2t} = \ln(X_{2t}), \quad \mu_t = \ln(\varepsilon_t)\ , \ \rho_1 = \theta\ y\ \ \beta_1 = \ln(\gamma)$$

En una empresa de confecciones, desea determinar el efecto que tienen el descuento promedio por deudas con el fondo de empleados (por cada 1000 dólares de deuda), el salario por hora extra y el salario por hora no extraordinaria, en el número de horas extras trabajadas por sus empleadas en el mes Y_i. Una firma de estudios econométricos y estadísticos determina el siguiente modelo:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$$

donde:

X_{1i} Es el salario por hora no extra.

X_{2i} Es el salario por hora extra.

X_{3i} Es el descuento promedio por deudas con el fondo de empleados (en diez dólares).

Se recoge la siguiente información de 60 empleadas de la empresa.

$$\sum_{i=1}^{60} Y_i = 305,514 \qquad \sum_{i=1}^{60} Y_i X_{3i} = 874,36464 \qquad \sum_{i=1}^{60} Y_i X_{2i} = 180,77112$$

$$\sum_{i=1}^{60} X_{1i} = 51,61464 \qquad \sum_{i=1}^{60} X_{1i} X_{3i} = -11,34864 \qquad \sum_{i=1}^{60} X_{1i} X_{2i} = -18,8324112$$

$$\sum_{i=1}^{60} X_{2i} = 25,08 \qquad \sum_{i=1}^{60} X^2_{1i} = 67,89392 \qquad \sum_{i=1}^{60} X_{2i} X_{3i} = 78,5184$$

$$\sum_{i=1}^{60} X_{3i} = 15,14784 \qquad \sum_{i=1}^{60} X^2_{2i} = 169,4916 \qquad \sum_{i=1}^{60} X^2_{3i} = 55,958496$$

$$\sum_{i=1}^{60} Y_i X_{1i} = -254,133504 \qquad \sum_{i=1}^{60} Y_i^2 = 2.567.825$$

5. Resuelva (Muestre las fórmulas y el procedimiento empleado).

a) Determine la matriz $X^T y$ y $X^T X$

$$X^T y = \begin{bmatrix} 305{,}5140 \\ -254{,}1335 \\ 180{,}7711 \\ 874{,}3646 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} 60 & 51{,}6146 & 25{,}08 & 15{,}1478 \\ 51{,}6146 & 67{,}8939 & -18{,}8324 & -11{,}3486 \\ 25{,}08 & -18{,}8324 & 169{,}4916 & 78{,}5184 \\ 15{,}1478 & -11{,}3486 & 78{,}5184 & 55{,}9585 \end{bmatrix}$$

b) Estime los parámetros del modelo por MCO.

Primero hallamos $(X^T X)^{-1}$

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}10368 & -0{,}08693 & -0{,}01095 & -0{,}03033 \\ -0{,}08693 & 0{,}08816 & 0{,}00993 & 0{,}02748 \\ -0{,}01095 & 0{,}00993 & 0{,}01805 & -0{,}02035 \\ -0{,}03033 & 0{,}02748 & -0{,}02035 & 0{,}06021 \end{bmatrix}$$

Ahora aplicamos la fórmula:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = (X^T X)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} 25{,}26495 \\ -23{,}13983 \\ -20{,}39922 \\ 32{,}71646 \end{bmatrix}$$