Taller 1: Repaso álgebra matricial y estadística
Econometría 06216

07-26-2010

Profesor: Julio César Alonso.

Monitoras: Sasha Magyaroff - Carolina Restrepo.

Notas:

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para entregarlo físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha limite), del 2 de Agosto de 2010..

Instrucciones:

- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo individual. Por tanto el taller debe reflejar únicamente el trabajo del estudiante.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con todos ellos.
- Este taller debe ser escrito en computador.

Pregunta 1

El pulpo Paul no tuvo ninguna duda en pronosticar la final del mundial en África 2010[1]. Sin pensarlo mucho, acertó con la selección española como gran ganadora del partido final de la copa del mundo. Sin embargo, hinchas holandeses se mostraron muy enfadados con su pronunciamiento (y su acierto) y desean saber cuál es la probabilidad de que Paul acertara en su predicción. Los seguidores de la naranja mecánica están convencidos que los resultados en un mundial son inciertos, y que además los marcadores de un partido no determinan los del siguiente. Es más, ellos creen que el nivel futbolístico de los participantes del mundial es tan alto que es igual de probable que cualquier equipo gane. A partir de ese convencimiento de los fanáticos de Holanda, responda las siguientes preguntas:
(Si es necesario hacer supuestos, aclare cuáles son esos supuestos y por qué los está realizando)
a. ¿Cuál es la probabilidad de que Paul acertara hasta los cuartos de final?

b. ¿Cuál era la probabilidad de que Paul acertara en todas sus predicciones que realizó en el campeonato mundial? (Recuerden que el pronóstico todos los partidos de la selección alemana y la final).

c.Teniendo en cuenta que el pulpo Paul también hizo sus pronósticos en la Eurocopa del 2008, y que además sus predicciones fueron acertadas en todos los partidos de la selección alemana, menos en la final,¿cuál era la

[1]Es importante tener en cuenta que el pulpo Paul se dedicó a pronosticar los partidos de Alemanía. Y el único partido pronosticado por él, en el cual no jugo Alemania, fue la final.

probabilidad de que Paul acertara en la final del mundial del 2010 (y en los demás partidos del mundial)?

Pregunta 2

La investigación de mercado para el libro *EasyReg: Aplicaciones para un curso de econometría* encuentra que hay una probabilidad 0,5 de que puedan venderse 3000 libros al precio de 800 tostones y una probabilidad 0,5 de que se demanden 2000 libros al precio de 1000 tostones.
a. ¿Cuánto esperaría recibir el editor con este negocio? ¿Cuál es el riesgo que se corre con la publicación de esta obra?

b. Suponga ahora que la editora está considerando la opción que otra empresa editora esté proyectando lanzar al mercado un libro similar de econometría, con un efecto previsible. Se espera que tanto los precios y las ventas del libro *EasyReg: Aplicaciones para un curso de econometría* descenderán. ¿Cuál es el riesgo de la obra en estas circunstancias?

Pregunta 3

Dadas las siguientes matrices, reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros:

$$A = \begin{pmatrix} 200/4 & 900/9 & 1450/29 & 1500/6 \\ 1200/12 & 1400/7 & -200/2 & 10/2 \\ 50 & -700/7 & 50 & 1000 \\ 1500/6 & 10/2 & 1000 & 10/4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 18 & 8 \\ 2 & 8 & 9 & 11 \\ 16 & 24 & 15 & 5 \\ 10 & 20 & 3 & 9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 4 & 12 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a. Encuentre $A \cdot B$.

b. Encuentre $C \cdot C^T + B$.

c. Calcule la inversa de A mediante el método de reducción de Gauss-Jordan y por el método de Cofactores.

d. Calcule el rango de C.

Pregunta 4

Siguiendo con el ejercicio anterior resuelva mostrando todos los pasos:
a. Calcule el determinante de B.

b. Calcule $A^{-1}D$.

c. Encuentre los valores propios de la matriz E, donde $E = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$.

Pregunta 5

Sean dos dados A y B que son lanzados durante un juego de azar sobre una superficie plana. Para responder a las siguientes preguntas tenga en cuenta la siguiente información:

- Sea X el número de la cara superior del dado A multiplicado por 2.
- Sea Y el número de la cara superior del dado B multiplicado por 3.
- Sean Z y W las siguientes variables: Z=X+4Y+5 y W=XZ

Recuerde que debe reportar todos los pasos que realizó para responder a las preguntas.
a. Calcule el valor esperado de X,Y,Z y W.

b. Calcule las varianzas de X,Y,Z y W.

Pregunta 6

A partir de la información suministrada en el ejercicio anterior, responda
a. ¿Son W y Y independientes?

b. ¿Son W y Z independientes

Taller 1: Repaso Algebra matricial y estadística
Econometría 06216

07-26-2010

Profesores: Julio César Alonso.

Monitoras: Sasha Magyaroff - Carolina Restrepo.

Notas:

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller deberá subirse a la plataforma Moodle hasta las 7:10 AM del 2 de Agosto de 2010.
- Sólo se calificaran talleres en formato pdf. Cualquier otro formato no será tenido en cuenta.

Instrucciones:

- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo individual. Por tanto el taller debe reflejar únicamente el trabajo del estudiante.
- Si bien no es necesario reportar todos los números decimales, sí lo es hacer los cálculos con todos ellos.
- Este taller debe ser escrito en computador.

Pregunta 1

El pulpo Paul no tuvo ninguna duda en pronosticar la final del mundial en Africa 2010. Sin pensarlo mucho, acertó con la selección española como gran ganadora del partido final de la copa del mundo. Sin embargo, hinchas holandeses se mostraron muy enfadados con su pronunciamiento (y su acierto) y desean saber cuál es la probabilidad de que Paul acertara en su predicción. Los seguidores de la naranja mecánica están convencidos que los resultados en un mundial son inciertos, y que además los marcadores de un partido no determinan los del siguiente. Es más, ellos creen que el nivel futbolístico de los participantes del mundial es tan alto que es igual de probable que cualquier equipo gane. A partir de ese convencimiento de los fanáticos de holanda, responda las siguientes preguntas:
(Si es necesario hacer supuestos, aclare cuales son esos supuestos y por qué los está realizando)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Paul acertara hasta cuartos de final?

Se sabe que cada equipo tiene igual probabilidad de ganar y además que cada juego es independiente del otro; considerando que hasta cuartos de final Paul pronosticó 5 partidos de la selección alemana, la probabilidad de que Paul acierte todos los marcadores en cuartos de final es:

$$P(A) = 0,5^5 = 0,03125$$

b. ¿Cuál era la probabilidad de que Paul acertara en todas sus predicciones que realizó en el campeonato mundial? (Recuerden que él pronosticó todos los partidos de la selección alemana y la final).

Se sabe que cada equipo tiene igual probabilidad de ganar y además que cada juego es independiente del otro; considerando que en todo el campeonato Paul pronosticó 7 partidos de la selección alemana, más la final, la probabilidad de que Paul acierte todos los marcadores en la copa del mundo es:

$$P(A) = 0,5^8 = 0,00390625$$

c.Teniendo en cuanta que el pulpo Paul también hizo sus pronósticos en la Eurocopa del 2008, y que además sus predicciones fueron acertadas en todos los partidos de la selección alemana, menos en la final,¿cuál era la probabilidad de que Paul acertara en la final del mundial del 2010 (y en los demás partidos del mundial)?

Se sabe que cada equipo tiene igual probabilidad de ganar y además que cada juego es independiente del otro; considerando que en todo el campeonato de la copa del mundo de África 2010 Paul pronosticó 7 partidos de la selección alemana, más uno que hace referencia a la final, y que además pronosticó 6 partidos en la Euro copa, la probabilidad de que Paul acierte todos los marcadores en la copa del mundo es:

$$P(A) = 0,5^{14} = 0,000061035$$

Pregunta 2

La investigación de mercado para el libro *EasyReg: Aplicaciones para un curso de econometría* encuentra que hay una probabilidad 0,5 de que puedan venderse 3000 libros al precio de 800 tostones y una probabilidad 0,5 de que se demanden 2000 libros al precio de 1000 tostones.

a. ¿Cuánto esperaría recibir el editor con este negocio? ¿Cuál es el riesgo que se corre con la publicación de esta obra?

La relación demanda-precio en el mercado es una causalidad dependiente. Existe en el mercado librero una correlación negativa entre el precio y la demanda: a mayor precio, menor demanda, y viceversa. Las probabilidades están correlacionadas y su combinación sería por consiguiente: la probabilidad del precio, por la probabilidad de la demanda dado el precio. Las probabilidades serían:

$$P(800, 3000) = P(800) . P(3000/800)$$
$$P(1000, 2000) = P(1000) . P(2000/1000)$$

Las probabilidades de las otras dos posibles combinaciones no se dan pues

$$P(3000/1000) = 0$$
$$P(2000/800) = 0$$

Mientras que:

$$P(3000/800) = 1$$
$$P(2000/1000) = 1$$

Manteniéndose que:

$$P(800) = 0,5$$
$$P(1000) = 0,5$$

De tal forma, el valor esperado y la desviación estándar serán:

$$E(X) = (3000)(800)(0,5) + (2000)(1000)(0,5) = 2200000$$

$$\sigma = \sqrt{(E(x-\mu)^2)} = \sqrt{(0,5)(2400000-2200000)^2 + (0,5)(2000000-2200000)^2}$$
$$= 200000$$

Y por lo tanto el coeficiente de variación será:

$$\nu = \frac{\sigma}{E(X)} = \frac{200000}{2200000} = 0,09$$

El riesgo es relativamente pequeño el el caso de que la empresa se decida por acudir al mercado.

b. Suponga ahora que la editora está considerando la opción que otra empresa editora esté proyectando lanzar al mercado un libro similar de econometría, con un efecto previsible. Se espera que tanto los precios y las ventas del libro *EasyReg: Aplicaciones para un curso de econometría* descenderán. ¿Cuál es el riesgo de la obra en estas circunstancias?

La aparición en el mercado librero de una obra similar, editada por la competencia, plantea a la empresa una situación en la que sus ingresos descienden con motivo de que las ventas y precios tenderán a bajar. La correlación es positiva entre precios y ventas: las ventas más bajas se combinan con los precios más bajos, las ventas más altas se combinan con los precios más altos. Se va a suponer entonces que el mercado sufre una presión de la editora y de su competidora. El valor esperado de la venta totaal del mercado se obtendrá, por consiguiente, del valor del ingreso máximo (demanda mayor por precio mayor) por la probabilidad 0,5 más el valor del ingreso mínimo por la probabilidad 0,5. La participación de la editora del libro de easyreg, se consigue estimanso la probabilidad total del mercado. El valor esperado de la venta total del mercado se obtendrá de la siguiente manera:

$$E(X) = (2000)(800)(0,5) + (3000)(1000)(0,5) = 2300000$$

$$\sigma = \sqrt{(E(x-\mu)^2)} = \sqrt{(0,5)(3000000-2300000)^2 + (0,5)(1600000-2300000)^2}$$
$$= 700000$$

El coeficiente de variación será:

$$\nu = \frac{\sigma}{E(X)} = \frac{700000}{2300000} = 0,30$$

La distribución se ha hecho más amplia. La probabilidad de unos ingresos condicionales mínimos de 1600000 es de 0,5; mientras que sin competencia esta misma probabilidad era para unos ingresos mínimos de 2000000 de tostones. El riesgo a crecido considerablemente, como se ve con el coeficiente de variación.

Pregunta 3

Dadas las siguientes matrices, reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros:

$$A = \begin{pmatrix} 200/4 & 900/9 & 1450/29 & 1500/6 \\ 1200/12 & 1400/7 & -200/2 & 10/2 \\ 50 & -700/7 & 50 & 1000 \\ 1500/6 & 10/2 & 1000 & 10/4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 18 & 8 \\ 2 & 8 & 9 & 11 \\ 16 & 24 & 15 & 5 \\ 10 & 20 & 3 & 9 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 \\ 4 & 12 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a. Encuentre A.B

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4100 & 7200 & 3300 & 4000 \\ 50 & -300 & 2115 & 2545 \\ 11200 & 20600 & 3750 & 8550 \\ 19035 & 25090 & 39105/2 & 14155/2 \end{pmatrix}$$

b. Encuentre $C.C^T + B$.
No se puede hacer, ya que la suma $C.C^T + B$ no es conformable. Esto es, no se cumple que el número de columnas de la matriz $C.C^T$ sea igual al número de filas de la matriz B.

c. Calcule la inversa de A mediante el método de reducción de Gauss Jordan y por el método de Cofactores.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -17/839 & 2/159 & 1/200 & 1/495 \\ 2/159 & -1/353 & -3/959 & -8/10000 \\ 1/200 & -3/959 & -1/810 & 5/10000 \\ 1/495 & -8/10000 & 5/10000 & -2/10000 \end{pmatrix}$$

d. Calcule el rango de C.

$$Ran(C) = 3$$

Esto es debido a que el rango de una matriz es el número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn, existen n valores propios). Ademas, en este caso $Det(C) \neq 0$, lo que implica que C tiene rango completo.

Pregunta 4

Siguiendo con el ejercicio anterior resuelva mostrando todos los pasos:
a. Calcule el determinante de B.

$$Det(B) = -26352$$

b. Calcule $A^{-1}D$.

$$A^{-1}D = \begin{pmatrix} 5/32 \\ 7/44 \\ -1/50 \\ 6/55 \end{pmatrix}$$

c. Encuentre los valores propios de la matriz E.

$$\lambda_1 = 12$$
$$\lambda_2 = 6$$

Pregunta 5

Sean dos dados A y B que son lanzados durante un juego de azar sobre una superficie plana. Para responder a las siguientes preguntas tenga en cuenta la siguiente información:

- Sea X el número de la cara superior del dado A multiplicado por 2.
- Sea Y el número de la cara superior del dado B multiplicado por 3.
- Sean Z y W las siguientes variables: Z=X+4Y+5 y W=XZ

Recuerde que debe reportar todos los pasos que realizó para responder a las preguntas.

a. Calcule el valor esperado de X,Y,Z y W.

Sean $\begin{matrix} D_A \\ D_B \end{matrix}$ variables aleatorias que toman el valor que aparezca en la cara superior del dado A y B respectivamente.
Así los posibles valores de D_A son (1,2,3,4,5,6), cada uno con igual probabilidad de ocurrir $\frac{1}{6}$.

Recuerden que $E\left(D_A\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{Ai}.P(d_{Ai})$. Entonces, $E\left(D_A\right) = \frac{7}{2}$.

Ocurre lo mismo para el dado B. Como $X = 2D_A$.Entonces $E(X) = E(2D_A) = 2\left(\frac{7}{2}\right) = 7$
El mismo procedimiento se realiza para Y, y se obtiene que

$$E(Y) = E(3D_B) = 3\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{21}{2}$$

Para Z, se tiene que: Z=X+4Y+5, y por lo tanto:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{Z}\right) = E\left(\mathrm{X} + 4\mathrm{Y} + 5\right) = E\left(X\right) + 4E\left(Y\right) + 5 = 7 + 4\left(\frac{21}{2}\right) + 5 = 54$$

Por último se tiene que: W=XZ, reemplazando X y Z por sus valores respectivos de D_A y D_B; lo que nos da: $W = 4D_A^2 + 8D_A.D_B + 10D_A$
De esta forma, tenemos que:

$$E\left(W\right) = E(4D_A^2 + 8D_A.D_B + 10D_A) = 4E(D_A^2) + 8E(D_A.D_B) + 10E(D_A)$$

Así pues, necesitamos calcular $E(D_A^2)$ y $E(D_A.D_B)$.
Por un lado tenemos que:

$$E(D_A^2) = \sum_{i=1}^{6}\left(d_{Ai}\right)^2 P\left(D = d_{Ai}\right) = \sum_{i=1}^{6}\left(d_{Ai}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{91}{6}$$

Adicionalmente, se puede intuir que D_A y D_B son independientes entre sí, y por lo tanto

$$E\left(D_A.D_B\right) = E(D_A).E(D_B)$$

Ya tenemos entonces todo lo que necesitabamos para calcular E(W):

$$E\left(W\right) = 4E(D_A^2) + 8E(D_A.D_B) + 10E(D_A) = 4\left(\frac{91}{6}\right) + 8\left(\frac{7}{2}.\frac{7}{2}\right) + 10\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{581}{3}$$

b. Calcule las varianzas de X,Y,Z y W.

$$Var(X) = Var\left(2D_A\right) = 4Var(D_A) = 4\left[\left(\frac{91}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] = \frac{35}{3}$$

$$Var(Y) = Var\left(3D_B\right) = 9Var(D_B) = 9\left[\left(\frac{91}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2\right] = \frac{105}{4}$$

Como Z=X+4Y+5, entonces:

$$Z = 2D_A + 12D_B + 5$$
$$Var\left(Z\right) = 4Var\left(D_A\right) + 144Var\left(D_B\right) + 48Cov\left(D_A, D_B\right)$$

Como D_A y D_B son variables aleatorias independientes, entonces

$$Cov\left(D_A, D_B\right) = 0$$

Por lo tanto:

$$Var\left(Z\right) = 4Var\left(D_A\right) + 144Var\left(D_B\right) = 4\left(\frac{35}{12}\right) + 144\left(\frac{35}{12}\right) = \frac{1295}{3}$$

Para el cálculo de Var(W), se sabe que: $Var\left(W\right) = E\left(W^2\right) - E\left(W\right)^2$. Adicionalmente, ya se habiamos encontrado que $E\left(W\right) = \frac{581}{3}$, por lo que resta encontrar $E\left(W^2\right)$. Para esto definamos que es W^2.

Sea:

$$W^2 = \left(X.Z\right)^2 = \left(4D_A^2 + 8D_A.D_B + 10D_A\right)^2 = 16D_A^4 + 64D_A^2.D_B^2 + 100D_A^2 + 64D_A^3.D_B + 160D_A^2.D_B + 80D_A^3$$

$$E\left(W^2\right) = 16E(D_A^4) + 64E(D_A^2)E(D_B^2) + 100E(D_A^2) + 64E(D_A^3)E(D_B) + 160E(D_A^2)E(D_B) + 80E(D_A^3)$$

Se necesitan conocer las siguientes cantidades para popder efectuar el cálculo de W:

- $E\left(D_A^3\right)$
- $E\left(D_A^4\right)$

A continuación se calculan estas cantidades:
Los posibles valores de D_A^3, son: (1,8,27,64,125,216) cada uno con probabilidad de ocurrencia igual a 1/6. Por lo tanto:

$$E\left(D_A^3\right) = \sum_{i=1}^{n}(D_{Ai})^3.P((D_{Ai})^3) = \frac{1}{6}\left(441\right) = \frac{147}{2}$$

Por otro lado, los posibles valores de D_A^4 son: (1,16,81,256,625,1296), que corresponden a los valores de cada una de las caras elevadas a la cuatro. Cada uno de estos valores tiene la misma probabilidad de ocurrecia a saber 1/6. Por lo tanto,

$$E\left(D_A^4\right) = \sum_{i=1}^{n}(D_{Ai})^4.P((D_{Ai})^4) = \frac{1}{6}\left(2275\right) = \frac{2275}{6}$$

Entonces tenemos que:

$$E\left(W^2\right) = 16\left(\frac{2275}{6}\right) + 64\left(\frac{91}{6}\right).\left(\frac{91}{6}\right) + 100\left(\frac{91}{6}\right) + 64\left(\frac{147}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) + 160\left(\frac{91}{6}\right)\left(\frac{7}{2}\right) + 80\left(\frac{147}{2}\right)$$
$$= \frac{478282}{9} \simeq 53142,44$$

Así la varianza de W será:

$$Var\left(W\right) = E\left(W^2\right) - E\left(W\right)^2 = \frac{478282}{9} - \left(\frac{581}{3}\right)^2 = \frac{140721}{9} \simeq 15635,67$$

Pregunta 6

A partir de la información suministrada en el ejercico anterior, responda

a. ¿Son W y Y independientes?

Noten que W y Y son independientes si y sólo si $E(WY) = E(W).E(Y)$ Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación:

$$E(W).E(Y) = E\left(\left(X^2 + 4YX + 5X\right)\right).E(Y)$$
$$E(W).E(Y) = E\left(X^2\right).E(Y) + 4E(X)E(Y)^2 + 5E(X)E(Y)$$

Ahora veamos a que es igual la parte izquierda de la ecuación:

$$E(WY) = E\left(X^2Y + 4XY^2 + 5XY\right)$$
$$E(WY) = E\left(X^2\right)E(Y) + 4E(X)E\left(Y^2\right) + 5E(X)E(Y)$$

Ahora comparemos la parte derecha y la parte izquierda de la ecuación:

$$E(WY)?E(W).E(Y)$$
$$E\left(X^2\right)E(Y) + 4E(X)E\left(Y^2\right) + 5E(X)E(Y)?E\left(X^2\right).E(Y) + 4E(X)E(Y)^2 + 5E(X)E(Y)$$
$$4E(X)E\left(Y^2\right)?4E(X)E(Y)^2$$
$$E\left(Y^2\right) \neq E(Y)^2$$

De lo anterior se puede concluir que W y y no son independientes.
b. ¿Son W y Z independientes

Continuando con la misma lógica del punto anterior, tenemos que W y Z son independientes si y sólo si

$$E(WZ) = E(W).E(Z)$$

Es muy fácil mostrar que en este caso

$$E(WZ) \neq E(W).E(Z)$$

y por lo tanto estas dos variables no son independientes.