Taller #1
Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo una moneda es lanzada. Sean:

- X el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- $Y = 3 \cdot I_{(cara)} + 1 \cdot I_{(cara)}$. Es decir, si la cara superior de la moneda después de lanzada es cara, entonces $Y = 3$; en caso contrario $Y = 1$.
- $Z = X + 4Y + 5$,
- $W = X \cdot Z$

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1	$E(X)$	$E(Y)$	$E(Z)$	$E(W)$
1.2	$Var(X)$	$Var(Y)$	$Var(Z)$	$Var(W)$

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

1.4. ¿Son W y Z independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

2. Considere las siquientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 5 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

$$A^T A \qquad (A)^{-1} \qquad A \cdot B \qquad B \cdot A \qquad A^T y \qquad B^T B \qquad y^T y \qquad y\, y^T$$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\left|A^T A\right| \qquad |A|$$

2.3 Calcule (muestre todo su trabajo)

$$\mathrm{ran}\left(A^T A\right) \qquad \mathrm{ran}(B\, A)$$

3. Usted ha sido contratado como un consultor externo para el Banco Central de la República Granadilla. Usted cuenta con datos históricos de la cantidad de dinero y el ingreso nacional (ambos en miles de millones de granadillas).

Año	Cantidad de Dinero*	Ingreso Nacional*	Año	Cantidad de Dinero*	Ingreso Nacional*
1992	2.0	5.0	1997	4.0	7.7
1993	2.6	5.5	1998	4.2	8.4
1994	3.2	6.0	1999	4.6	9.0
1995	3.6	7.0	2000	4.8	9.7
1996	3.3	7.2	2001	5.0	10.0

* Miles de millones de granadillas

3.1. Haga un gráfico de dispersión y estime la regresión del ingreso nacional en función de la cantidad de dinero. Escriba el modelo a estimar y la ecuación estimada.(Muestre todo su trabajo). **No** use EasyReg, ni Excell, ni otro software para efectuar estos cálculos.

3.2. Interprete el intercepto y la pendiente de la ecuación estimada. ¿Son estos coeficientes significativos? Muestre todos sus cálculos y explique su respuesta.

3.3. Si usted tuviera únicamente control sobre la cantidad de dinero de esta economía, y quisiera alcanzar un ingreso nacional de 12.0 miles de millones de granadillas para el 2002, ¿qué cantidad de dinero pondría a circular en esta economía? Explique su respuesta.

3.4. La junta direcitva del Banco Central quiere tener una proyección y un intervalo de confianza para el valor esperado del Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.2. Muestre todos sus cálculos.

3.5. La junta direcitva del Banco Central además quiere tener una proyección y un intervalo de confianza para el Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.1. Explique claramente cual es la diferencia en la interpretación de sus cálculos repecto al numeral 3.4 (si es que existe). Muestre todos sus cálculos.

Taller #1
Econometría 06169
Respuestas Sugeridas

Profesor: Julio César Alonso

Nota: Recuerden que únicamente dos preguntas seleccionadas al azar serán calificadas

1. Un dado es lanzado sobre una mesa con superficie nivelada, al mismo tiempo una moneda es lanzada. Sean:

- X el número en la cara superior del dado después de lanzado,
- $Y = 3 \cdot I_{(cara)} + 1 \cdot I_{(cara)}$. Es decir, si la cara superior de la moneda después de lanzada es cara, entonces $Y = 3$; en caso contrario $Y = 1$.
- $Z = X + 4Y + 5$,
- $W = X \cdot Z$

Encuentre (muestre todo su trabajo):

1.1 $E(X)$ $\quad E(Y)$ $\quad E(Z)$ $\quad E(W)$

a. $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i) = \frac{7}{2}$

b. $E(Y) = \sum_{i=1} y_i \cdot P(y_i) = \frac{1}{2} \cdot (3 + 1) = 2$

c. $E(Z) = E(X + 4Y + 5) = E(X) + 4 \cdot E(Y) + 5 = \frac{7}{2} + 8 + 5 = \frac{33}{2} = 16.5$.

d. Note que $W = X \cdot Z = X \cdot (X + 4Y + 5) = X^2 + 4Y \cdot X + 5 \cdot X$. . Por tanto necesitamos calcular, $E(W) = E\left(X^2 + 4Y \cdot X + 5 \cdot X\right) = E\left(X^2\right) + 4\,E(Y \cdot X) + 5 \cdot E(X)$. Así pues necesitamos calcular $E\left(X^2\right)$ y $E(Y \cdot X)$. Es facil mostrar que $E\left[(X)^2\right] = \frac{91}{6}$ (ver presentción #1). Además, es bastante intuitivo reconocer que X y Y son variables aleatorias independientes, luego $E(Y \cdot X) = E(X)\,E(Y)$. (Asegurese que puede mostrar formalmente este hecho)

Ahora bien, ya tenemos todos los elementos para encontrar $E(W)$. Es decir,

$$E(W) = E \cdot \left(X^2\right) + 4 \cdot E(Y \cdot X) + 5 \cdot E(X) = \frac{91}{6} + \left(4 \cdot \frac{7}{2} \cdot 2\right) + 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{182}{3} = 60.667.$$

1.2 $Var(X)$ $\quad Var(Y)$ $\quad Var(Z)$ $\quad Var(W)$

a. $Var(X) = \frac{35}{12}$.(En el archivo de PowerPoint de la presentación #1, empleado en clase, está el detalle de este cálculo)

b. $\mathrm{Var}(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = 5 - 4 = 1$

c. $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X + 4\cdot Y + 5)$. Como X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X) + 16\cdot \mathrm{Var}(Y) = \frac{35}{12} + 16 = \frac{227}{12} = 18.917$$

d. Ahora note que $\mathrm{Var}(W) = E\left(W^2\right) - \left(E(W)^2\right)$. Ya encontramos que $E(W) = \frac{182}{3}$, sólo nos falta encontrar $E\left(W^2\right)$. Hagamos este cálculo, pero primero tenemos que identificar a que es igual W^2. Es facil mostrar que:

$$W^2 = \left(X^2 + 4Y\cdot X + 5\cdot X\right)^2 = X^4 + 8\cdot X^3\cdot Y + 10\cdot X^3 + 16\cdot Y^2\cdot X^2 + 40\cdot Y\cdot X^2 + 25\cdot X^2$$

Luego,

$$E\left(W^2\right) = E\left(X^4\right) + 8\cdot E\left(X^3\right)\cdot E(Y) + 10\cdot E\left(X^3\right) + 16\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E\left(X^2\right) + 40\cdot E(Y)\cdot E\left(X^2\right) + 25\cdot E\left(X^2\right).$$

Entonces necesitamos conocer las siguientes cantidades para encontrar la varianza de W:

- $E\left(X^4\right)$
- $E\left(X^3\right)$

A continuación se calculan estas cantidades:

Cálculo de $E\left(X^3\right)$

Los posibles valores de $(X)^3$ son $\left(1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3\right) = (1, 8, 27, 64, 125, 216)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definicón,

$$E\left(X^3\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^3\cdot P\left[\left(x_i\right)^3\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^3\right] = \frac{1}{6}\cdot 441 = \frac{147}{2}$$

Cálculo de $E\left(X^4\right)$

Los posibles valores de X^4 son $\left(1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4\right) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296)$, cada uno con una probabilidad de ocurrir de $\frac{1}{6}$. Siguiendo la definicón,

$$E\left(X^4\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^4\cdot P\left[\left(x_i\right)^4\right] = \frac{1}{6}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^4\right] = \frac{1}{6}\cdot 2275 = \frac{2275}{6}$$

Entonces tenemos que:

$$E\left(W^2\right) = E\left(X^4\right) + 8\cdot E\left(X^3\right)\cdot E(Y) + 10\cdot E\left(X^3\right) + 16\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E\left(X^2\right) + 40\cdot E(Y)\cdot E\left(X^2\right) + 25\cdot E\left(X^2\right)$$

$$E\left(W^2\right) = \frac{2275}{6} + 8\cdot\frac{147}{2}\cdot 2 + 10\cdot\frac{147}{2} + 16\cdot 5\cdot\frac{91}{6} + 40\cdot 2\cdot\frac{91}{6} + 25\cdot\frac{91}{6} = 5096$$

Así, la varianza de W es:

$$\mathrm{Var}(W) = E\left(W^2\right) - \left(E(W)^2\right)$$

$$5096 - \left(\frac{182}{3}\right)^2 = 1.416 \times 10^3$$

1.3. ¿Son W y Y independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Noten que W y Y son independientes si y solamente si $E(WY) = E(W)\cdot E(Y)$ (*).
Veamos a que es igual la parte derecha de la ecuación (*).

$$E(W)\cdot E(Y) = E\left(X^2 + 4Y\cdot X + 5\cdot X\right)\cdot E(Y)$$

$$E(W)\cdot E(Y) = E\left(X^2\right)E(Y) + 4\,E(Y)^2\,E(X) + 5\,E(X)\,E(Y)$$

Ahora veamos a que es igual el lado izquierdo de la ecuacion (*).

$$E(WY) = E\left[\left(X^2 + 4Y\cdot X + 5\cdot X\right)\cdot(Y)\right]$$

$$E(WY) = E\left(X^2Y + 4Y^2X + 5XY\right)$$

$$E(WY) = E\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 4\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) + 5\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

Finalmente, podemos comparar la parte dereacha e izquierda de la ecuación (*):

$$E(WY) \overset{?}{=} E(W)\cdot E(Y)$$

$$E\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 4\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) + 5\cdot E(X)\cdot E(Y) \quad ? \quad E\left(X^2\right)\cdot E(Y) + 4\cdot E(Y)^2\cdot E(X) + 5\cdot E(X)\cdot E(Y)$$

$$4\cdot E\left(Y^2\right)\cdot E(X) \quad ? \quad 4\cdot E(Y)^2\cdot E(X)$$

$$E\left(Y^2\right) \neq E(Y)^2$$

Como ven, en este caso $E(WY) \neq E(W)\cdot E(Y)$ y por tanto W y Y no son independientes

1.4. ¿Son W y Z independientes? (Justifique su respuesta. Muestre todo su trabajo.)

Continuando con la misma lógica empleada en el punto 1.3., tenemos que W y Z son independientes si y solamente si $E(W\cdot Z) = E(W)\cdot E(Z)$ (**). es muy facil mostrar que en este caso $E(W\cdot Z) \neq E(W)\cdot E(Z)$ y por tanto estas dos variables no son independientes.

2. Considere las siquientes matrices

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & 5 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.1 Encuentre las siguientes cantidades (muestre todo su trabajo)

a) $A^T A = \begin{pmatrix} 126 & 114 & 108 \\ 114 & 113 & 91 \\ 108 & 91 & 125 \end{pmatrix}$

b) $(A)^{-1} = \begin{pmatrix} -0.172 & 0.366 & -0.075 \\ 0.048 & -0.29 & 0.177 \\ 0.177 & -0.065 & -0.016 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 154 & 61 \\ 138 & 51 \\ 212 & 95 \end{pmatrix}$

d) $B \cdot A$ no esta definido

e) $A^T y = \begin{pmatrix} 93 \\ 69 \\ 77 \end{pmatrix}$

f) $B^T B = \begin{pmatrix} 314 & 123 \\ 123 & 62 \end{pmatrix}$

g) $y^T y = (98)$

h) $y y^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ 9 & 81 & 36 \\ 4 & 36 & 16 \end{pmatrix}$

2.2 Calcule (muestre todo su trabajo)

a) $\left|A^T A\right| = 3.46 \times 10^4$

b) $|A| = 186$

2.3 Calcule (muestre todo su trabajo)

a) $\mathrm{ran}\left(A^T A\right)$ **=** 3

Noten que $\mathrm{ran}\left(A^T A\right)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn existe n valores propios). Además, tenemos que $\left|A^T A\right|$ **=** $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, donde λ_i son los correspondientes valores propios. Dato que $\left|A^T A\right| \neq 0$, ninguna de las variables aleatorias serán iguales a cero, por tanto $A^T A$ tendrá rango completo.

b) $\mathrm{ran}(B\,A)$ no esta definido

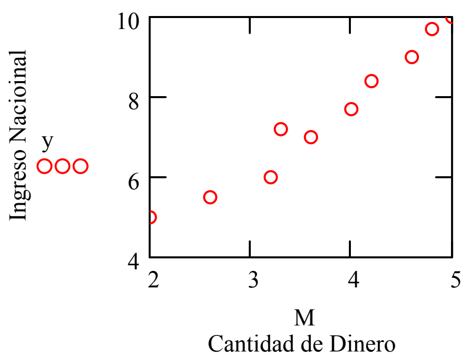
3. Usted ha sido contratado como un consultor externo para el Banco Central de la República Granadilla. Usted cuenta con datos históricos de la cantidad de dinero y el ingreso nacional (ambos en miles de millones de granadillas).

	Cantidad de	Ingreso		Cantidad de	Ingreso
Año	**Dinero***	**Nacional***	**Año**	**Dinero***	**Nacional***
1992	2.0	5.0	1997	4.0	7.7
1993	2.6	5.5	1998	4.2	8.4
1994	3.2	6.0	1999	4.6	9.0
1995	3.6	7.0	2000	4.8	9.7
1996	3.3	7.2	2001	5.0	10.0

* Miles de millones de granadillas

3.1. Haga un gráfico de dispersión y estime la regresión del ingreso nacional en función de la cantidad de dinero. Escriba el modelo a estimar y la ecuación estimada.(Muestre todo su trabajo). **No** use EasyReg, ni Excell, ni otro software para efectuar estos cálculos.

A continuación observarán el gráfico de dispersión y estime la regresión del ingreso nacional en función de la cantidad de dinero



El modelo a estimar es: $y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot M_i + \varepsilon_i$

donde ε_i es un término aleatorio de error con media cero y varianza constante σ^2.

Para estimar los parametros, podemos emplear las siguientes fórmulas:

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (M_i - \bar{M})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (M_i - \bar{M})^2} \qquad b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{M}$$

En este caso tenemos que $b_1 = 1.739$ y $b_0 = 1.065$. Por tanto la ecuación estimada es:

$$\text{yhat}_i = 1.065 + 1.739 \cdot M_i$$

3.2. Interprete el intercepto y la pendiente de la ecuación estimada. ¿Son estos coeficientes significativos? Muestre todos sus cálculos y explique su respuesta.

$b_0 = 1.065$, si la cantidad de dinero fuera cero, entonces el ingreso nacional sería de 1.062 miles de milllones de granadillas.

$b_1 = 1.739$, un aumento de mil millones de granadillas en la cantidad de dinero probocará un aumentto de 1,739 millones de granadillas en el ingreso nacional.

Para saber si estos coeficientes son significativamente diferentes de cero, necesitamos conocer la varianza estimada del error y la del intercepto y pendiente estimada. Esto se puede hacer de la siguiente forma:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y})^2}{n-2} \qquad s_{b_1}^2 = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(M_i - \bar{M})^2} \qquad s_{b_0}^2 = \frac{s^2\sum_{i=1}^{n}(M_i)^2}{n\sum_{i=1}^{n}(M_i - \bar{M})^2}$$

En este caso tenemos que $s^2 = 0.141$, $\left[s_{(b_1)}\right]^2 = 0.016$ y $\left[s_{(b_0)}\right]^2 = 0.242$. Ahora si podemos probar la hipótesis individual de que cada uno de los parámetros son diferentes de cero.

<u>Intercepto</u>

En este caso $H_0 : \beta_0 = 0$ versus $H_A : \beta_0 \neq 0$. el estadistico t esta dado por:

$$t_0 = \frac{b_0}{s_{b_0}}$$

Así tenemos que $t_0 = 2.162$, este t calculado se debe comparar con el valor crítico de la distribución t con n-2 grados de libertad y un nivel de significancia $\alpha/2$:. En este caso tenemos que $t(0.05,8) = 1.86$, $t(0.025,8) = 2.306$ y $t(0.005,8) = 3.355$. Por tanto solamente se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 10%

<u>Pendiente</u>

En este caso $H_0 : \beta_1 = 0$ versus $H_A : \beta_1 \neq 0$. el estadistico t esta dado por:

$$t_1 = \frac{b_1}{s_{b_1}}$$

Así tenemos que $t_1 = 13.569$, este t calculado se debe comparar con el valor crítico de la distribución t con n-2 grados de libertad y un nivel de significancia $\alpha/2$:. En este caso tenemos que $t(0.05,8) = 1.86$, $t(0.025,8) = 2.306$ y $t(0.005,8) = 3.355$. Por tanto se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 1%

Así, podemos concluir que tanto el intercepto como la pendiente son significativamente diferentes de cero (individualmente) a un nivel de significancia del 10%.

3.3. Si usted tuviera únicamente control sobre la cantidad de dinero de esta economía, y quisiera alcanzar un ingreso nacional de 12.0 miles de millones de granadillas para el 2002, ¿qué cantidad de dinero pondría a circular en esta economía? Explique su respuesta.

Suponiendo que la ecuación estimada es la adecuada, tenemos que: $\text{yhat}_i = 1.065 + 1.739 \cdot M_i$.
Por tanto, si se quiere alcanzar un ingreso nacional de 12.0 miles de millones de granadillas para el 2002, tendremos que $12 = 1.065 + 1.739 \cdot M_i$, es decir $\frac{12 - b_0}{b_1} = 6.289$. Por tanto se necesitará en promedio una cantidad de dinero de 6,289 millones de granadilla.

3.4. La junta direcitva del Banco Central quiere tener una proyección y un intervalo de confianza para el valor esperado del Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.2. Muestre todos sus cálculos.

En este caso tenemos que el valor esperado del Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.2 es de:

$$b_0 + b_1 \cdot 5.2 = 10.106$$

El intervalo de confianza para este valor esperado esta dado por:

$$10.106 \mp t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}\, s \sqrt{1 + \frac{\left(5.2 - \bar{M}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (M_i - \bar{M})^2}}$$

Así, tenemos que un intervalo de confianza del 99% para el valor esperado es: [8.698, 11.514]

3.5. La junta direcitva del Banco Central además quiere tener una proyección y un intervalo de confianza para el Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.1. Explique claramente cual es la diferencia en la interpretación de sus cálculos repecto al numeral 3.4 (si es que existe). Muestre todos sus cálculos.

En este caso tenemos que el el Ingreso nacional para el 2002, si la cantidad de dinero fuera 5.1 es de:

$$b_0 + b_1 \cdot 5.1 = 9.932$$ (igual al cálculo efectuado en 3.4)

El intervalo de confianza para esta predicción individual esta dado por:

$$9.932 \mp t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}\, s \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(5.2 - \bar{M}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (M_i - \bar{M})^2}}$$

Así. tenemos que un intervalo de confianza del 99% para la predicción individual es:
[8.487, 11.377]

La diferencia entre este intervalo y el calculado en el punto 3.4, es que este intervalo es más amplio. Pues cuando se calcula una predicción individual existe mas incertidumbre que cuando se proyecta un valor promedio.