DISEÑO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS, CENTRADO EN LA PARÁBOLA, A TRAVÉS DE SU MODELACIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

ALEXANDER BARRIOS RIVAS

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2018

DISEÑO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS, CENTRADO EN LA PARÁBOLA, A TRAVÉS DE SU MODELACIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

ALEXANDER BARRIOS RIVAS

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación

Directora:
Mag. DORA JANNETH DEL CARMEN GÓMEZ GUERRERO

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2018

Nota de aceptación

Aprobado por el Comité de Trabajos de Grado en cumplimiento de los requisitos exigidos por la Universidad ICESI para otorgar el título de Magíster en Educación

Directora del trabajo de grado

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, junio de 2018

Dedicatoria

A Dios todo poderoso, dueño de mis debilidades y fortalezas.

A mi familia como fuente de edificación y perseverancia.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los estudiantes de los grados 10- 1 y 10 – 2 de la institución educativa la Buitrera, por su participación y contribución al proceso desarrollado en la investigación. También a las directivas por brindarme la oportunidad de realizar la intervención experimental en el aula de clase.

Agradezco a mis profesores y compañeros de la maestría en educación, por aportar a mi formación académica y profesional de manera significativa.

De manera especial agradezco a la Magister Dora Janneth Gómez, directora de este trabajo de grado, por su apoyo incondicional en producción investigativa, igualmente a la rectora Carmen Eliza Carvajal Estela, por permitirme hacer parte de esta capacitación oportuna para mi desarrollo personal y profesional.

RESUMEN

El trabajo de grado de la maestría en ciencias de la educación, está centrado en la sistematización de la práctica docente y la profundización de la investigación en el aula, de ahí que, ésta propuesta de diseño didáctico para la enseñanza de las secciones cónicas centrada en la parábola, surge de la evaluación y reflexión del oficio de maestro sobre las prácticas pedagógicas desarrolladas por veinte estudiantes focalizados, inscritos en un grupo de sesenta de grado décimo de la institución educativa La Buitrera, con el objetivo de reducir las dificultades que se presentan en el aprendizaje de procesos relacionados con el objeto matemático en los pensamientos espacial y variacional. Para esta investigación se implementó el trabajo basado en tareas matemáticas con grado de dificultad en forma creciente, porque a través de ellas se puede evidenciar el desarrollo de actividades necesarias para cumplir con propósitos, en busca la conceptualización del objeto de estudio, en consecuencia, las tareas matemáticas permitieron la movilización de saberes previos y posteriores, con el objetivo de mejorar los desempeños académicos presentados hasta ese momento, por tanto, hicieron parte de la propuesta, el diseño, la ejecución, la evaluación y reflexión sobre la estructura didáctica basada en la modelación de diferentes sistemas de representación en articulación con la resolución de problemas para el tratamiento de la parábola como sección cónica desde la conversión del lenguaje algebraico al gráfico y viceversa.

Con el propósito de determinar posibles avances del desarrollo de los procesos pedagógicos en el devenir de la ejecución de la propuesta, se trabajó la sistematización de la experiencia en la práctica docente, con el fin de consignar la investigación en el aula, para la cual se aplicaron actividades de diagnóstico y tareas matemáticas realizadas tanto por el grupo experimental como también por el resto de participantes. La estrategia de trabajar el objeto matemático con diferentes sistemas de representación, así como la implementación del sistema dinámico GEOGEBRA, permitió a los estudiantes sentirse más motivados, receptivos, participativos, creativos, pero sobre todo autónomos en la ejecución de trabajos y la apropiación del lenguaje natural y matemático, también se evidenció en los resultados de las pruebas.

El diseño está organizado en seis momentos de acuerdo con la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999)

Momento 1 “primer encuentro” diagnóstico”

Momento 2 “exploración de un tipo de tareas”

Momento 3 “construcción del entorno tecnológico - teórico”

Momento 4 “el trabajo de la técnica”

Momento 5 “institucionalización”

Momento 6 “evaluación”

Palabras claves: Diseño didáctico, Estructura didáctica, Objeto matemático, Sistemas de representación, Tareas matemáticas.

ABSTRACT

The degree work of the master's degree in educational sciences, is focused on the systematization of teaching practice and the deepening of research in the classroom, hence, this didactic design proposal for the teaching of conic sections centered on the parabola, arises from the evaluation and reflection of the teacher's office on the pedagogical practices developed by twenty focused students, enrolled in a group of sixty tenth grade of the educational institution La Buitrera, with the aim of reducing the difficulties that arise in learning processes related to the mathematical object in spatial and variational thoughts. For this research, the work based on mathematical tasks with degree of difficulty was implemented in an increasing way, because through them the development of activities necessary to fulfill purposes can be evidenced, in search of the conceptualization of the object of study, consequently, the Mathematical tasks allowed the mobilization of previous and subsequent knowledge, with the aim of improving the academic performances presented up to that moment, therefore, they were part of the proposal, the design, the execution, the evaluation and reflection on the didactic structure based on the modeling of different systems of representation in articulation with problem solving for the treatment of the parabola as a conic section from the conversion of the algebraic language to the graphic and vice versa.

The design is organized in six moments according to the anthropological theory of the didactic (TAD) (Chevallard, 1999)

In order to determine possible advances in the development of pedagogical processes in the future of the execution of the proposal, the systematization of experience in teaching practice was worked on, in order to record the research in the classroom, for which they applied diagnostic activities and mathematical tasks carried out both by the experimental group and also by the rest of the participants. The strategy of working the mathematical object with different representation systems, as well as the implementation of the GEOGEBRA dynamic system, allowed the students to feel more motivated, receptive, participative, creative, but above all autonomous in the execution of works and the appropriation of language natural and mathematical, was also evidenced in the results of the tests.

Moment 1 "first encounter" diagnosis"

Moment 2 "exploration of a type of tasks"

Moment 3 "construction of the technological - theoretical environment"

Moment 4 "the work of the technique"

Moment 5 "institutionalization"

Moment 6 "evaluation"

Keywords: didactic design, didactic structure, mathematical object, representation systems, math tasks.

CONTENIDO

pág.

1. TÍTULO DEL TRABAJO 20
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 20
1.1.1 Antecedentes institucionales 20
1.1.2 Formulación del problema 25
1.1.3 Pregunta de investigación 25
1.2 JUSTIFICACIÓN 29
1.3 FORMULACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 30
1.3.1 Objetivo general 31
1.3.2 Objetivos específicos 31
2. MARCO REFERENCIAL 32
2.1 MARCO TEÓRICO 32
2.1.1 Ingeniería didáctica 32
2.1.2 Investigación modélica de la ingeniería didáctica de procesos didácticos 32
2.1.3 Resolución de problemas 34
2.1.4 Aspecto histórico de la resolución de problemas 35
2.1.5 Enfoque antropológico de la didáctica 37
2.1.6 Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) 38
2.1.7 Modelación de los procedimientos de estudio 39
2.1.8 Definición de comprensión 40
2.1.9 Metas de comprensión 42

2.2 MARCO CONCEPTUAL DISCIPLINAR (REFERENTES TEÓRICOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS CENTRADOS EN LA PARÁBOLA) 46
2.2.1 La parábola en la historia de las cónicas 46
2.2.2 Desde las cónicas. 47
2.2.3 Desde las funciones 49
2.2.4 Desde las ecuaciones 50
2.2.5 Desde la física 51
2.3 MARCO CONCEPTUAL DISCIPLINAR (CONCEPTOS BÁSICOS) 52
2.3.1 Definición del cono circular 52
2.3.2 Punto común entre el cono y el plano 53
2.3.3 Formación de las secciones cónicas 54
2.3.4 Definición de la parábola 55
2.3.5 Características de la parábola 56
2.3.6 Representación de la parábola desde las ecuaciones 58
3. DISEÑO METODOLÓGICO 63
3.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN 63
3.1.1 Sujetos de la investigación 64
3.1.2 Tipo de investigación 64
3.1.3 Sistematización de experiencias 65
4. DESARROLLO 67
4.1 SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA 67
4.1.1 Situaciones Problema “para bola y oime pues” 67
4.1.2 De cómo surge la propuesta 67
4.1.3 De los primeros objetivos de la sistematización de la “parábola” 70

4.1.4 De cómo me enfrento al reto de las dificultades de ejecución de la sistematización 71
4.1.5 De cómo surge los momentos de la planificación de la propuesta 72
4.1.6 De los aspectos importantes que surgieron en la experiencia 72
4.1.7 De las fuentes información utilizadas 73
4.1.8 De cómo se llevó a cabo la experiencia 74
4.1.9 Aplicación de la propuesta didáctica: 74
4.2 MOMENTO 1 "PRIMER ENCUENTRO" - "DIAGNOSTICO" 74
4.2.1 Momento 2 "exploración de un tipo de tareas" 76
4.2.2 Momento 3 "construcción del entorno tecnológico - teórico" 78
4.2.3 Momento 4 "el trabajo de la técnica" 79
4.2.4 Momento 5 "institucionalización" 79
4.2.5 Momento 6 "evaluación 80
5. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL DISEÑO DIDÁCTICO 81
5.1 ANÁLISIS DEL PRIMER MOMENTO "PRIMER ENCUENTRO" DIAGNÓSTICO 81
5.1.1 Análisis del segundo momento "exploración de un tipo de tareas" 84
5.1.2 Momento 3 "construcción del entorno tecnológico - teórico" 90
5.1.3 Análisis del Momento 4 "el trabajo de la técnica" 91
5.1.4 Análisis del Momento 5 "institucionalización" 97
5.1.5 Análisis del Momento 6 "evaluación 100
6. CONCLUSIONES 103
7. RECOMENDACIONES 106
BIBLIOGRAFÍA 107

LISTA DE FIGURAS

pág.

Figura 1. (Anexo A) Análisis del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del grado tercero........99

Figura 2. (Anexo A) Análisis del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del grado quinto........100

Figura 3. (Anexo A) Análisis del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del grado noveno........101

Figura 4. Definición del cono circular........53

Figura 5. Punto común entre el cono y el plano........54

Figura 6. Formación de las secciones cónicas.........55

Figura 7. Definición de la parábola........56

Figura 8. Características de la parábola........57

Figura 9. Parábola horizontal con vértice (h, k) y eje paralelo........58

Figura 10. Procedimiento para determinar la ecuación de la parábola con vértice en el eje de simetría.........59

Figura 11. Gráficas y Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen y eje focal en un eje coordenado........60

Figura 12. Procedimiento para determinar la ecuación de la parábola con eje focal paralelo a un eje coordenado.........61

Figura 13. Gráficas y Ecuaciones de la parábola con eje focal paralelo a un eje coordenado.........62

Figura 14. Inicio de la prueba diagnóstica........75

Figura 15. Las tabletas como recurso de consultas........76

Figura 16. Transformaciones en el plano. (a) Rotaciones (b) Reflexión sobre ejes (c) desplazar sobre los ejes (d) Simetría sobre el eje X 82

Figura 17 Registros de estudiantes. (a) y (c) Solución del proceso de ecuación algebraica y Tabulado, (b) Conversión a la gráfica de la función lineal y (d) Conversión a la gráfica de la función cuadrática...83

Figura 18. Exposición sobre la utilidad e importancia de los elementos de una antena parabólica. 84

Figura 19. Exposición sobre la formación de las secciones cónicas a través del corte de un cono, (a) sobre el tablero y (b) con material manipulable. 86

Figura 20. Exposición sobre la importancia que tiene la parábola con aplicaciones del entorno (puente colgante) 87

Figura 21. Exposición sobre cómo están ubicadas algunas de las partes de la parábola y la similitud en relación con la función que cumplen algunos elementos de una linterna como por ejemplo el bombillo. 88

Figura 22. Actividad sobre la construcción de la parábola y algunas de sus características en el proceso de doblado del papel. 90

Figura 23. Resolución de ejercicios de la ecuación de una parábola sin la conversión al registro gráfico. 91

Figura 24 Retroalimentación de características de la parábola como sección cónica. 92

Figura 25. Resolución de ejercicios de la ecuación de una parábola y la conversión del registro gráfico al algebraico. 93

Figura 26. Representación de la parábola en registro algebraico y gráfico, utilizando GEOGEBRA como sistema dinámico. 95

Figura 27. Actividad práctica del grupo manejando las tabletas de la institución, utilizando GEOGEBRA como sistema dinámico. 96

Figura 28. Dificultad que se presentó para la actividad de manejar el sistema dinámico GEOGEBRA con las tables porque no estaba instalado el programa, además, no se hizo uso de las ecuaciones para representar la parábola en registro algebraico y gráfico. 97

Figura 29. Resolución de problemas centrados en la parábola en relación con otras áreas del conocimiento. 99

Figura 30. Resolución de problemas centrados en la parábola en relación con otras áreas del conocimiento, tipo pruebas saber... 100

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla A.1.1 Reporte de resultados del establecimiento educativo........................102

Tabla A.1.2 Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en matematicas..103

Tabla A.1.3 Resultados comparativos del establecimiento por cada sede 103

Tabla A.1.4 Niveles de desempeños históricos 104

Tabla A.1.5 Niveles de desempeños en la matriz de referencia 105

Tabla A.1.6 Puntaje representativo de la prueba..105

LISTA DE ANEXOS

pág.

A. ANTECEDENTES INSTITUCIONALES 99

A.1 Gráficas estadísticas del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del GRADO TERCERO, año 2016 de la Institución Educativa la Buitrera..99

A.2 Gráficas estadísticas del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del GRADO QUINTO, año 2016 de la Institución Educativa la Buitrera...100

A.3 Gráficas estadísticas del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del GRADO NOVENO, año 2016 de la Institución Educativa la Buitrera...101

B. SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA 106

B.1 Prueba diagnostica 106

B.2 Tareas matemáticas para los momentos 1 y 2 109

B.3 Tarea matemática # 3 para el momento dos 110

B.4 Tarea matemática # 4 para el momento tres 112

INTRODUCCIÓN

A través de las matemáticas se han resuelto un sin número de obstáculos ocasionados por problemas que emergen por naturaleza o que en ocasiones son provocados por la misma especie humana en su afán por tener el control de todo cuanto lo rodea, obteniendo así resultados favorables en lo político, deportivo, empresarial y hasta en lo sentimental. Por ello, la movilización de conceptos en lo numérico, lo variacional y para este caso, lo geométrico; se convierten en herramientas indispensables para poder desarrollar procesos cognitivos que permitan codificar, argumentar, representar, resolver y comunicar en la conversión del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Por otro lado, es necesario anotar que en el devenir de cada época los seres humanos añadimos nuevos símbolos o imágenes que en la práctica se convierten en una nueva forma de comunicación, si analizamos ésta en particular podemos señalar que existen herramientas y recursos tecnológicos que son utilizados como medios de comunicación denominadas TIC, en los cuales se puede tomar una imagen como significado de una palabra. Ahora bien, comunicarse en lenguaje matemático no es fácil, lo que indica que el reto que tenemos como educadores es muy grande. Sin embargo, existen estrategias que se pueden implementar para cerrar la brecha que se ha ocasionado a través de la historia. Entre otras esta aportar un diseño didáctico que articule la resolución de problemas y la modelación de diferentes sistemas de representación para la enseñanza de la parábola como sección cónica en grado décimo y once. En consecuencia, este trabajo procura considerar la influencia que tiene el uso de la modelación de diferentes representaciones para la construcción del concepto del objeto matemático.

Por lo que se refiere a lo anterior, se fue edificando en la institución educativa la Buitrera cada uno de los apartes de la propuesta de trabajo orientada para estudiantes de los grados décimo y once de básica secundaria, enmarcados en la resolución de problemas para la enseñanza de la parábola como sección cónica, donde inicialmente se encuentra el tema, la descripción del problema con loa respectivos antecedentes institucionales, justificación, la formulación de los objetivos y la pregunta problematizadora ¿Cómo contribuye un diseño didáctico en la enseñanza de la parábola como sección cónica basado en resolución de problemas, utilizando la modelación de diferentes sistemas de representación, para favorecer la movilización de este concepto en estudiantes de grado décimo de la institución educativa la Buitrera?, con el fin de dar cuenta de las razones, necesidades y la importancia de la realización de este trabajo en estudio, de igual manera se incluyen los aportes realizados por diferentes autores como, (Artique, 2007), (Brousseau,1986), (Chevallard, 1999), (D' Amore,2004), (Duval,1993) y (Schoenfel,1985), en lo concerniente al marco teórico en referencia a los antecedentes en la dificultad del aprendizaje de las secciones cónicas centrado en la parábola, así mismo, se realiza la sistematización de la experiencia, el análisis de los resultados del diseño didáctico y las recomendaciones que darán cuenta de las reflexiones que se deben tener para el desarrollo de futuras intervenciones en el aula.

1. TÍTULO DEL TRABAJO

DISEÑO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS SECCIONES CÓNICAS, CENTRADO EN LA PARÁBOLA, A TRAVÉS DE SU MODELACIÓN EN DIFERENTES SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1.1 Antecedentes institucionales

Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado tercero, año 2016

Traducción

El trabajo de investigación que se propone en la pregunta anteriormente referenciada pretende una contribución a la resolución de problemas aplicados para la comprensión de la parábola como objeto matemático, por tanto se hace necesario analizar entre otros el comportamiento del desempeño en algunas evaluaciones externas como las Pruebas Saber realizadas y evaluadas por el Ministerio de Educación Nacional MEN. (2016) por parte de los estudiantes desde los primeros ciclos, donde se trabajan competencias matemáticas como el razonamiento, la comunicación y de resolución. Con estudiantes de los grados 1°, 2° y 3°, se pudo evidenciar en la competencia de razonamiento que de los 85 evaluados que presentaron la prueba, hubo un 53% que **no** estableció conjeturas aproximadas a las ideas de perpendicularidad y paralelismo de figuras planas, igualmente hay un 46% que **no** reconoció semejanzas entre distintos tipos de representaciones vinculadas con números en la competencia de razonamiento, finalmente el 23% **no** utilizó propiedades geométricas para resolver problemas relativos a diseño y desarrollo de figuras planas.

Lo anterior permite inferir que en este ciclo un porcentaje relativo de los estudiantes no tienen las herramientas necesarias para soluciones futuras de problemas relacionados con el concepto de parábola, dado que las nociones aquí evaluadas no tienen una apropiación por parte del alumnado, los procesos de codificación, decodificación y traducción entre otros no tienen la pertinencia adecuada para desarrollar actividades de aprendizaje matemático con resultados más apropiados.

(Ver anexo A, figura 1)

Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado quinto, año 2016

Traducción

Continuando con el análisis de resultados de las Pruebas Saber, se puede interpretar que en la medida que avanzan los ciclos se encuentran desempeños con porcentajes más altos en desaciertos, es así como el 53% de los estudiantes del grado quinto **no** traducen relaciones numéricas expresadas gráfica y simbólicamente en la competencia de comunicación, también el 77% **no** genera equivalencias entre expresiones numéricas, finalmente el 82% **no** resuelve problemas que requieran representar datos referentes al entorno utilizando una o diferentes representaciones en la competencia de resolución. Se pudo inferir que en éste ciclo los estudiantes no tuvieron procesos adecuados de descripción ni evaluado diferentes maneras de representación numérica y simbólica de ningún objeto matemático, también se presume que en sus actividades de aula no se trabajan al menos dos representaciones por nociones de objetos ni hay apropiación del lenguaje matemático relacionado, por consiguiente, este ciclo no aporta un manejo adecuado en las competencias requeridas para la futura codificación, representación y comprensión de una parábola.

(Ver anexo A, figura 2)

Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado noveno, año 2016

Traducción

El proceso de resolver problemas no se construye de manera independiente para obtener resultados positivos en el aprendizaje de los objetos de estudio en matemáticas, por el contrario, debe estar acompañado de otros procesos que contribuyen a la competencia de resolución García B., Coronado A., Montealegre L., Giraldo A., Tobar B., Morales S., Cortes D. (2013). De ahí que, al analizar los resultados de las Pruebas Saber del grado noveno en la institución educativa se evidencian falencias en procesos como, codificar, decodificar, traducir, argumentar y aplicar, que son necesarios para fortalecer la comprensión del concepto parábola como parte de la geometría analítica, además de la persistencia para desarrollar con agrado las actividades planteadas en las pruebas. De igual manera, para resolver un problema situado en un contexto real en relación con las matemáticas, se hace necesario manejar la competencia de razonamiento y de comunicación, en las cuales se debe realizar un conjunto de actividades de aprendizaje tales como las tareas matemáticas, en las que están inmersos los análisis de las representaciones en lenguaje gráfico, natural y algebraico, igualmente la manipulación de material técnico o tecnológico que pueden ser evaluados por las pruebas para fortalecer el crecimiento del pensamiento matemático de los estudiantes desde ciclos mencionados anteriormente.

Se puede entonces evidenciar que según los resultados obtenidos en la prueba, el 75% **no** comprueban hipótesis acerca de los números reales utilizando procesos inductivos y deductivos centrado en el lenguaje algebraico, el 80% **no** resuelven problemas en situaciones de transformaciones con funciones polinómicas en contextos aritméticos y geométricos y el 84% **no** identifican el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos. Esto se traduce en que posiblemente desde los ciclos anteriores los estudiantes no han desarrollado actividades que involucran la competencia de representar los objetos de estudio que se relacionan con la parábola, según Duval “al menos de dos formas distintas de expresar y representar contenidos matemáticos, “registros de representación” o “registros semióticos”, no parece posible aprender y comprender dicho contenido” Duval R. (2006). Haciendo una retrospectiva de la planificación de los planes de área realizada en la institución educativa la Buitrera en las semanas de desarrollo institucional, y otras actividades de información académica como el día “E” se puede deducir que **no** se ha hecho un análisis profundo sobre el desempeño académico de los estudiantes, tampoco se ha llevado a cabo una planificación curricular que permita mejorar la resolución de problemas en los distintos pensamientos matemáticos desarrollados por el MEN, es decir que en la planeación de los años lectivos de 2015 y 2016, se enfatizó sobre el pensamiento numérico, por el contrario no se incluyeron objetos matemáticos relacionados con la geometría analítica.

(Ver anexo A, figura 3)

Análisis del desempeño en las pruebas saber en estudiantes del grado once, año 2016-2

Traducción

El desempeño desarrollado en las Pruebas Saber 11 por los estudiantes en los años lectivos 2015 2016, debe tomarse como una consecuencia de los resultados mostrados en los primeros ciclos organizados por el MEN, debido a que este nivel recoge toda la experiencia académica trabajada durante esos períodos según la planeación que propone los lineamientos curriculares (1998). por consiguiente, no es un accidente que según el objeto de estudio matemático, la parábola, como propuesta de investigación, se encuentre en nivel de desempeño **dos** de los cuatro que proponen las pruebas, (Ver anexo A, tablas 1.1, 1.2, 1.3,1.4, 1.5 y 1.6), en otras palabras, los estudiantes se destacaron en identificar puntos representativos en diferentes tipos de registro, sin embargo, **no** seleccionan información necesaria para resolver problemas que involucran características medibles de figuras geométricas elementales, como contribución a la aprensión del concepto de parábola como sección cónica, tampoco identifican información relevante cunando el tipo de registro contiene información de más de tres categorías, de hecho, **no** resuelven problemas que requieren construir una representación auxiliar (gráficas y formulas) como paso intermedio para su solución, además de **no** modelan fenómenos variacionales no explícitos usando lenguaje algebraico, información dada en lenguaje natural y representaciones geométricas.

Conviene subrayar que la institución debe proponer posibles soluciones ya que está identificado el problema, en primer lugar se debe tener en cuenta que el concepto de competencia que se maneja por parte de los maestros no es necesariamente el propuesto por D' Amore (2008) cuando hace referencia a los tres aspectos como, el cognitivo que en apariencia es el que se debe trabajar sin dar resultados efectivos, el afectivo y el de tendencia de acción, en concreto, el autor recomienda que además del proceso evaluativo en lo cognitivo, se debe ayudar a generar una inclinación cultural favorable del estudiante hacia las matemáticas, hacia su aprendizaje y uso social, además de caracterizar el desarrollo de sus competencias a partir de la movilización de procesos matemáticos específicos asociados a estas, en ese orden de ideas, se debe manifestar que lo anterior deben ser funciones del oficio del maestro, es decir, se deben fortalecer los procesos matemáticos de aprendizaje con niveles de complejidad progresiva que contribuyan a mejorar el desempeño mostrado, que fue la falencia más grande representada en los ciclos anteriores.

Por otro lado, dentro de las competencias matemáticas, deben trabajarse aspectos como, conceptualizar, razonar, representar, resolver, comprender y comunicar entre otros, en consecuencia, el autor Raymond Duval considera que el dominio de las operaciones necesarias para cambiar la forma mediante la cual se presenta un objeto de estudio en matemáticas es muy importante, debido a que se constituye en una operación cognitiva fundamental que está relacionada con las dificultades y tratamientos de comprensión del aprendizaje conceptual, por tanto es necesario coordinar varios registros semióticos que contribuyan a la habilidad de aprendizaje de las matemáticas, Raymond D. (2204).

1.1.2 Formulación del problema

Por lo que se refiere al diseño curricular de las matemáticas en la institución, es conveniente mencionar algunos antecedentes que preceden al momento de la investigación anotando que, en el año 2015 se realizó una reestructuración en las horas de la asignatura así como también la trasformación en los planes de área y aula, pasando de 4 a 5 horas para trabajar en los grados de sexto a noveno y de 3 a 4 horas para décimo y once, igualmente en los planes de área y aula se realizó un trabajo con el acompañamiento de la tutora del PTA (programa para la calidad educativa todos aprender) y los profesores del área de matemáticas en primaria y bachillerato, argumentados desde los estándares curriculares y los DBA (derechos básicos de aprendizaje). El trabajo consistió en organizar las mallas curriculares desde los grados de primaria hasta bachillerato, con el objetivo de relacionar la coherencia vertical y horizontal en las matemáticas trabajadas en todas las cuatro sedes de la institución educativa la Buitrera hasta ese momento, por otro lado es necesario aclarar que la institución educativa presentaba en las sedes del Alto Rosario (sede los comuneros) y la del Otoño (Soledad Acosta de Samper) se trabaja con un enfoque multigrado (un docente y varios grados de escolaridad), y en las sedes de Nuestra Señora de las Lajas, La Toledo y San Gabriel (sede nueva) se trabaja con un enfoque gradual (docente y su grupo), aparte de ello está la jornada sabatina y hogares Claret que trabajan por ciclos. Para poder unificar todas estas características se resolvió trabajar por ciclos de grado para no fraccionar la planificación, de tal manera que cuando un estudiante cambie de sede, no presente dificultad para poderse desempeñar matemáticamente en cualquiera de ellas.

A lo largo de las generaciones del siglo XXI se ha destacado la importancia que tienen las matemáticas a nivel global para el desarrollo de la sociedad, en la cual los estudiantes tienen la oportunidad de relacionarse con objetos del entorno desde los primeros años de escolaridad, dichos objetos tienen formas lineales y curvas en diferentes posiciones, por consiguiente, es factible que algunos objetos geométricos trabajados desde las matemáticas, se puedan interpretar con mayor eficacia en situaciones ocurridas desde la cotidianidad, en ese orden de ideas se puede colocar el caso de la parábola como sección cónica, con la cual los estudiantes se relacionan por su funcionalidad en diferentes medios de comunicación y en distintos contextos, de ahí que se tome como referencia en algunas situaciones como por ejemplo, el crecimiento de una determinada población, el descenso en la economía, la práctica de un deporte determinado o en su defecto, explicar el comportamiento de algunos fenómenos en diferentes ciencias del conocimiento, se puede representar por medio de la curva de una parábola sin realizar un análisis exhaustivo sobre expresiones algebraicas o geométricas. Los lineamientos curriculares en matemáticas (1988) establecen que para comprender la naturaleza de los conjuntos se debe introducir la función en relación con los contextos descritos como medio de conocimiento.

Con relación al desarrollo histórico en la movilización de saberes basados en la resolución de problemas con el objeto matemático parábola, se pudo evidenciar que generalmente en los grados de primaria de la institución, los estudiantes trabajan con algunos sistemas de representación que les permiten comprender algunas situaciones relacionadas con las curvas parabólicas con interpretación aceptable, sin embargo, no ocurre lo mismo en el bachillerato, debido a que desde el área de las matemáticas se venía priorizando hasta ese entonces, el pensamiento numérico y en el caso específico de las secciones cónicas, los estudiantes sólo tenían la oportunidad de trabajar desde el enfoque algebraico hacia el gráfico, memorizando ecuaciones, haciendo trasformación y determinación de las mismas, pero no había un trabajo posiblemente desde lo gráfico a lo algebraico, debido a que en la institución los estudiantes no están acostumbrados ni han estado enfrentados a trabajar los diferentes sistemas de representación en ningún objeto matemático en el bachillerato. En otras palabras, los estudiantes logran resolver las transformaciones en las ecuaciones algebraicas para representar la gráfica de la parábola, pero, no desarrollan la acción en sentido opuesto. No se trabaja el tratamiento de diferentes formas de representar el objeto desde la modelización, incidiendo en el rendimiento de pruebas internas y externas.

Estándares relacionados con el objeto de estudio Parábola

De 8° a 9°. Uso diferentes representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y otras disciplinas.

De 6° a 7°. Identifico, describo **e infiero** figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.

Coherencia vertical

De 4° a 5°. Comparo y clasifico **y traduzco** figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.

De 1° a 3°. Represento nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicularidad en distintos contextos y su condición relativa con respecto a diferentes sistemas de referencia.

De 10° a 11°

Pensamiento espacial y sistemas geométricos

Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de Las representaciones algebraicas de esas figuras.

Pensamiento numérico y sistemas numéricos:

Codifico la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.

Pensamiento métrico y sistemas de medida

Justifico resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y limites en situación de variación.

Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos

Analizo y **formulo** las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas.

Pensamiento aleatorio y sistemas de datos

Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.

Coherencia horizontal

1.1.3 Pregunta de investigación

¿Cómo contribuye un diseño didáctico en la enseñanza de la parábola como sección cónica basado en resolución de problemas, utilizando la modelación de diferentes sistemas de representación, para favorecer la movilización de este concepto en estudiantes de grado décimo de la institución educativa la Buitrera?

1.2 JUSTIFICACIÓN

En este trabajo de investigación se pretende evidenciar las ventajas de implementar diferentes sistemas de representación para construir el concepto del objeto matemático parábola, esto es, en la institución no se trabaja los procesos de resolución de problemas desde los distintos registros, lo cual indica la posibilidad que se sigan generando informes académicos de bajo rendimiento por parte de un porcentaje considerable de estudiantes en un área fundamental como las matemáticas en algunas de sus competencias trabajadas desde el pensamiento espacial y variacional en la institución, con referencia a lo anterior se analizaron los resultados mostrados por el MEN en las Pruebas Saber 2015 y 2016, en las cuales los estudiantes de 9° y 11° evidenciaron fortalezas en los procesos referenciados con el pensamiento y sistemas numéricos centrados en la parábola como sección cónica, es decir, movilizaron saberes en relación con la conversión del lenguaje algebraico al gráfico, por el contrario, mostraron debilidad en los procesos de resolución de problemas en relación con la parábola y otros objetos matemáticos en procedimientos vinculados con figuras y formas sobre el plano (volumen, longitud, área), los cuales se requieren de varios registros de representación para la transformación del lenguaje geométrico al algebraico.

En ese orden de ideas se puede partir de las prácticas del oficio del maestro en el aula, para diseñar una estructura didáctica que articule la resolución de problemas con la modelación en diferentes sistemas de representación en grado décimo para el tratamiento de la parábola como sección cónica, por consiguiente ante la situación planteada y luego de una evaluación permanente, es pertinente ejecutar la implementación de mediaciones didácticas como las tareas matemáticas organizadas en grados de dificultad progresiva, las cuales ocasionan que los estudiantes adquieran el manejo conceptual del objeto matemático así como el lenguaje del mismo, debido a que los procesos a corto y largo plazo en términos de codificación, decodificación, comunicación, representación y resolución permiten una construcción del concepto desde el entorno físico hacia el mundo matemático, teniendo en cuenta que para comprender algunos objetos matemáticos es indispensable utilizar diferentes maneras de representación.

Otro factor a tener en cuenta, son los recursos tecnológicos para promover una práctica innovadora en relación con el aprendizaje de las matemáticas, especialmente para interpretar la gráfica de una parábola a partir de su representación como sección cónica desde el registro grafico al algebraico y viceversa. En efecto, es probable que los ambientes tecnológicos como el sistema dinámico Geogebra permitan la interacción que favorezca los procesos de aprendizaje en la traducción de representaciones en diferentes sistemas que son requeridos en el currículo académico para obtener mejores resultados en las pruebas. En relación con este último, la institución cuenta con la libre licencia de trabajar con el software Geogebra instalado en todas las tabletas posibles ya que su descarga es gratuita y no requiere de ningún tipo de permiso. Así mismo, las características del Geogebra permite visualizar la relación entre la gráfica y la expresión algebraica correspondiente para las coordenadas y ecuaciones, lo cual ocasiona que tanto el docente como el estudiante se vean favorecidos en la construcción y comprensión del concepto de parábola como sección cónica que quizás, con la construcción de lápiz y papel no es tan fácil de interpretar.

1.3 FORMULACIÓN DE LOS OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1 Objetivo general

Desarrollar un diseño didáctico que articule la resolución de problemas y la modelación de diferentes sistemas de representación para la enseñanza de la parábola como sección cónica, en grado décimo de la institución educativa la Buitrera.

1.3.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar mediante el diseño didáctico, el nivel de desempeño en estudiantes del grado décimo basado en la resolución de problemas en el tratamiento de la parábola como sección cónica del pensamiento espacial y variacional de la institución educativa la Buitrera.

- Diseñar la estructura didáctica basada en la resolución de problemas para la enseñanza de la parábola como sección cónica, a través de su modelación en diferentes sistemas de representación para estudiantes de grado décimo de la institución educativa la Buitrera.

- Ejecutar el diseño de la estructura didáctica basada en la resolución de problemas para la enseñanza de la parábola como secciones cónica en grado décimo de la institución educativa la Buitrera.

- Analizar la forma como evoluciona el concepto de parábola, utilizando diferentes métodos de representación en estudiantes de grado décimo de la institución educativa la Buitrera.

2. MARCO REFERENCIAL

La siguiente propuesta tiene como sustento los estándares curriculares en el área de las matemáticas referidos por el MEN, desde el pensamiento espacial y variacional, basado en la resolución de problemas para la enseñanza - aprendizaje de la parábola a partir de su representación gráfica como sección cónica, a través de la modelación y mediación didáctica, igualmente orientada a partir del diseño didáctico fundamentado en la TAD (teoría antropológica de lo didáctico) desarrollada en la ingeniería didáctica.

2.1 MARCO TEÓRICO

2.1.1 Ingeniería didáctica

Según Artigue, la ingeniería didáctica surge como modelo de investigación para dar respuesta a una serie de exigencias en el aprendizaje representativo en inicios de los años 80, mostrando un paralelo entre el abordaje de la labor de un ingeniero que debe apoyarse en conocimientos científicos incluso cuando tenga que someterse a un control del mismo y la adopción del trabajo didáctico con la obligación de laborar con objetos problémicos que aún la ciencia no puede abarcar en momentos del desarrollo didáctico, así mismo, y la ingeniería didáctica está fundamentada en participaciones didácticas (experimentaciones) en el aula, enmarcadas en sucesión de lecciones, las cuales se entienden como materialización del trabajo teórico (Artigue, 2011). Por consiguiente, se puede diseñar, ejecutar, reflexionar y evaluar las secuencias de enseñanza hipotéticamente argumentadas con el propósito de movilizar necesidad de saberes establecidos como fenómenos didácticos.

2.1.2 Investigación modélica de la ingeniería didáctica de procesos didácticos

Cómo clasificación de la investigación de la ingeniería didáctica se puede mencionar entre otras, la de transposiciones didácticas de Yves Chevallard (1985,1986), las que se enmarcan en el dominio paramatemático, donde las ideas de evidencias y ecuaciones contienen una relevancia de herramientas (Yves Chevallard, 1982). Igualmente, este tipo de metodología tiene como característica fundamental, la comparación entre los análisis a priori a cerca de los diseños del trabajo en el aula y los análisis a posteriori sobre la importancia que se desarrollan en la ejecución de las tareas, como la forma base de comprobación y las conjeturas enunciadas en la investigación, distinguiendo cuatro faces en el proceso de experimentación (Artigue, y otros 1995).

La primera de ellas busca ahondar sobre contenidos considerados en la enseñanza, las consecuencias del análisis de la enseñanza tradicional, análisis epistemológico, análisis de la percepción de obstáculos y dificultades, las limitaciones donde se ubica la acción didáctica como *fase de análisis preliminar*. Michel Artigue y otros (1995).

La segunda fase se encarga de identificar variables en proporciones micro y macro didácticas, vinculadas con el estudio de las actividades propuestas a los estudiantes. *Como fase de concepción*, el análisis a priori, manifiesta un significado controlado para comprender de forma predictiva y descriptiva, con base en lo que se pretende mostrar en clase como situación diseñada para el análisis de tareas.

La fase que ejecuta, diseña y realiza la recolección de datos que advierten sobre el análisis a priori y su relación con fenómenos identificados, es la fase de experimentación, además el conjunto de datos obtenidos en la experimentación, corresponde a la *fase de análisis a posteriori* fundamentada en análisis de contenidos.

Por lo anterior, se puede interpretar que el núcleo del estudio de la ingeniería didáctica, se conforma por el análisis de tareas constituidas como un procedimiento propuesto para el desarrollo de aprendizajes en los estudiantes relacionados con el conocimiento en el aula, articulados con los diferentes factores que imprescindiblemente están inmersos en el diseño didáctico.

2.1.3 Resolución de problemas

En particular existe la dificultad para aprender e inclusive para enseñar a resolver problemas matemáticos en los estudiantes de todos los niveles de la institución educativa, quizás unos con mejor porcentaje de asertividad que otros, lo cual no es propio de la actualidad académica, de hecho, muchos autores han dedicado gran parte de su investigación a reflexionar sobre el aprendizaje matemático desde tiempos anteriores, en algunos pensamientos del doctor Santaló se explicitan apartes como que en la actualidad el oficio de maestro debe asumir la ardua labor de preparar a los estudiantes para que pierdan el miedo a enfrentar los problemas, a tener curiosidad por aprender, a argumentar por sí mismos y no simplemente a repetir reglas operativas o teoremas, a tener la agilidad para leer sin dificultad un texto en el momento en que lo requiera. Santaló L. (1966). *La matemática en la escuela secundaria* Buenos Aires: Edudeba. (pp.55). A pesar que este pensamiento corresponde al siglo XX, se puede incluir en la actualidad académica que presentan los estudiantes en las aulas, es decir, si hay algo que se ha perdido en la enseñanza de los procesos matemáticos, es lograr la expectativa y la curiosidad por la construcción del conocimiento de los objetos matemáticos, en parte por la mecanización de las propuesta pedagógicas y metodológicas trabajadas por los docentes que poco interés generan en los estudiantes, igualmente por el diseño y la planificación de las tareas a resolver en el aula. Para romper con la mecanización es necesario una reflexión sobre cómo abordar las actividades matemáticas sin generar desmotivación por la construcción de un conocimiento nuevo, sobre todo se debe apuntar a los estudiantes como protagonistas participativos en la construcción y no como simples actores que repiten una instrucción para llegar a conclusiones de un simple resultado, sin tener en cuenta la motivación para movilizar los saberes.

2.1.4 Aspecto histórico de la resolución de problemas

Resolver problemas matemáticos con alto grado de asertividad, no constituye una tarea fácil de llevar a cabo, por ello, muchos autores han basado sus investigaciones en este proceso que algunos llaman fases, momentos, modelo, etcétera. Polya (1945) instituye las necesidades para resolver un problema matemático en un modelo descriptivo, en el cual, el objetivo primordial es brindarle ayuda al alumno para que adquiera la experiencia necesaria para la resolución de problemas, dándole el papel de guía a los docentes con la condición de permitir que los alumnos asuman la responsabilidad como autor principal de la construcción del conocimiento, es así como se da origen a cuatro fases.

1. Interpretar el problema
2. Intuir un plan
3. Operar el plan
4. Comprobar la solución obtenida

Por otro lado, Schoenfel (1985) aborda la estrategia de Polya en una búsqueda por hallar explicaciones para la conducta de resolutores de problemas, consideró reducidas las estrategias de resolución de problemas planteadas por Polya, argumentando que el proceso profundiza una complejidad involucrando otros elementos como los de carácter sociocultural, psicológico al igual que el emocional y afectivo.

De igual manera sugiere Schoenfel que desde un enfoque sociocultural, se pueden diseñar secuencias de tareas matemáticas con grados de complejidad progresiva, donde estén incluidos procesos de enseñanza y aprendizaje en diferentes medios o ambientes, en los cuales los estudiantes puedan movilizar saberes en escenarios que requieran de la utilización de diferentes representaciones matemáticas, que posibiliten evidenciar, si los objetos matemáticos son socialmente útiles para compartir con otros actores de una sociedad, por consiguiente, es fundamental que los problemas en matemáticas analizados en diferentes contextos, sean pertinentes para la comunicación, representación y resolución de problemas sin dejar de lado lo psicológico, lo afectivo y lo emocional, es así como advierte que se deben tener en cuenta en la resolución de problemas y su comportamiento Schoenfel (1985).

1. Recursos cognitivos (conocimientos previos).
2. Heurísticas (estrategias para desarrollar situaciones con dificultad.
3. Control (permiten un uso eficaz en recursos disponibles.
4. Sistemas de creencias (percepción acerca de las matemáticas).

El conocimiento de las heurísticas no es suficiente para saber cuál utilizar y como utilizarlas, es decir, se advierte una ausencia de control de recursos disponibles, pero a su vez, un buen control relacionado con las heurísticas no satisface la resolución porque puede ser que el resolutor desconozca un procedimiento, un hecho o un algoritmo del dominio matemático, en dicho caso se apunta a la falta de recursos cognitivos como explicación al intento ineficaz de la resolución Schoenfel (1985). Así mismo, es probable que la concepción de resolver problemas en matemáticas de acuerdo a sus creencias, permita el poco desarrollo en la resolución generando dificultades para:

- Buscar un problema relacionado.
- Variar las condiciones del problema.
- Empezar el problema desde atrás.
- Dividir el problema en partes.
- Buscar regularidades.
- Resolver un problema similar más sencillo.
- Cuatro pasos de Schoenfel.
- Descomponer e interpretar un problema.
- Esbozar y planear una solución.
- Indagar soluciones.
- Comprobar soluciones.

En su libro Mathematical Problem Solving publicado en 1985, Schoenfel basó su investigación con docentes y estudiantes en propuestas experimentadas en problemas para resolver con grados de dificultad, cabe anotar que los docentes poseían formación para hacerlo y los estudiantes construían procesos de solución mediante conocimientos previos como las operaciones básicas, manejo de fórmulas, conceptos, entre otras, y tener habilidad para saber cómo utilizarlos. Mediante diferentes metodologías como trabajo en parejas, seguimiento de procesos, grabaciones y apuntes, el autor analizaba el trabajo de ambos grupos, obteniendo como conclusión, que en el trabajo por resolución de problemas se debe tener en cuenta factores involucrados en la solución de los mismos, encontrando los caminos posibles o intentar por otros, mantener control del trabajo para su solución.

2.1.5 Enfoque antropológico de la didáctica

El enfoque antropológico de la didáctica, surge como una de las aportaciones de la transposición didáctica correspondiente al marco de la didáctica esencial, en la cual, se manifestó la imposibilidad de interpretar apropiadamente la actividad matemática ni la matemática escolar, sin tener en cuenta los fenómenos asociados a la restauración escolar que tienen su núcleo en la institución de la creación del saber matemático, de hecho, estos fenómenos en referencia a la enseñanza de las matemáticas, sólo deben accederse desde lo científico, teniendo en cuenta los fenómenos de transposición didáctica, es decir, debe haber una integración de obras matemáticas, fenómenos relativos y actividad matemática institucional para formar la investigación didáctica del nuevo objeto primario. (Chevallard, 1990).

El desarrollo de la teoría de la transposición didáctica como derivación de la didáctica fundamental, trae como consecuencia el enfoque antropológico de la didáctica, el cual afirma que la actividad matemática debe ser *modelizada*, y no considerarla como la cimentación de un conjunto de conceptos, desarrollo cognitivo o uso de un lenguaje únicamente, integrando enfoques lingüísticos, sociológicos, o epistemológicos, así mismo, el enfoque antropológico precisa un modelo matemático institucional de actividades matemáticas incluyendo la enseñanza y aprendizaje. (Chevallard, 1990).

2.1.6 Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

Es la encargada de situar la actividad matemática de instituciones sociales en el conjunto de actividades humanas, entre otros, el matemático Chevallard especialista en la enseñanza de las matemáticas, inicia la TAD (teoría antropológica de lo didáctico) planteando un modelo que refiere el escolar en específico y saber matemático en su generalidad en términos de praxeologías como una función o actividad humana desarrolladas como una solución a un grupo de cuestiones, es decir que el saber matemático se construye alrededor de las averiguaciones de la respuestas a cuestiones(Chevallard, 1998b, 1999). Por consiguiente se pueden apreciar dos aspectos inherentes de acuerdo a las praxeologías, el “saber hacer” o la “la praxis”, que encierra un tipo de problema que se analiza, así como las técnicas para solucionarlos y el “saber” o el “logos”, que se refiere a la tecnología indispensable para la aclaración y justificación de las técnicas e igualmente de la teoría.

Es importante mencionar que esta teoría, clarifica el modelo de actividad matemática, de hecho, el modelo epistemológico de la TAD, no da por separado la resolución de problemas y la construcción del conocimiento, los cuales se pueden adquirir por distintas vías, incluyendo la resolución de problemas, por el contrario demanda que las personas construyen matemáticas a través de tareas problemáticas, así mismo, este modelo de actividad matemática construye la praxeologías a través de la descripción en forma de “momentos de estudio” comprendidos como extensiones que tienen espacio en el crecimiento de la actividad matemática vivido en diferentes tiempos y apareciendo en simultáneo (Chevallard, 1998b, 1999)..

2.1.7 Modelación de los procedimientos de estudio

Como objeto esencial de investigaciones en didáctica se encuentran inmersas las actividades matemáticas, que son desarrolladas con las ideas de procedimientos de estudio de una obra matemática como parte de un modelo en el enfoque antropológico, en donde se pueden inscribir diferentes actores para participar de actividades en el centro de una institución, en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje (Chevallard, Bosch, y Gascón, 1997).

Es de vital importancia que la planificación que se diseñe para el aula, se componga de este modo, por varias actividades matemáticas que permitan despertar la curiosidad de los estudiantes por la construcción del conocimiento y que simultáneamente, los docentes sientan que lo planeado puede interpretarse como una obra matemática bien diseñada, así pues; el enfoque antropológico pretende señalar que los procedimientos de estudio no son homogéneos, por lo cual se constituyen en distintos momentos para referenciar las actividades matemáticas, de hecho el enfoque sugiere que los momentos no pueden tratarse en una sola ocasión, por el contrario, recomienda que deben ser tratados de forma dispersa en los procedimientos de estudio, en una relación descrita por las técnicas, teorías, tecnologías y tipos de problemas que conforman la obra matemática.

Los momentos descritos por Chevallard

La Construcción de la praxeología es el *"primer encuentro",* hace referencia al primer momento con tipos de tarea que la constituye. Estas tareas se relacionan con una prueba diagnóstica, la cual consiste en realizar un recorrido por los diversos pre saberes que deben tener los estudiantes para iniciar el estudio del objeto y poder analizar en qué elementos del objeto matemático están las mejores bases de los nociones o por el contrario cuáles necesitan para enfrentar la tarea propuesta Chevallard (1999, pp. 249-255).

La Técnica relativa de tareas, *"exploración de un tipo de tareas"* hace referencia al segundo momento en paralelo con el primero, la técnica puede de esta manera ocasionar que los estudiantes adquieran herramientas para iniciar los procesos en la resolución de problemas en matemáticas, concerniente al tipo de problemas y a la técnica correspondiente que se ha desarrollado previamente Chevallard (1999, pp. 249-255).

La *"construcción del entorno tecnológico - teórico"* referencia el tercer momento en paralelo con los anteriores. Se puede trabajar algunas técnicas conocidas y no conocidas, como por ejemplo, la utilización de las nuevas tecnologías al igual que algunas herramientas y recursos necesarios para trabajar en el aula.

Otro de los momentos, consiste en retocar la tecnología elaborada *"el trabajo de la técnica"*, este momento hace referencia a los procesos desarrollados con eficacia y fiabilidad en cuanto a las tareas cuantitativas y cualitativas.

Precisar lo que es exactamente la praxeología elaborada es conocida como *"institucionalización"*, referencia al quinto momento identificando los elementos de su construcción que no hayan sido integrados en ella, además de los elementos que se consolidan de manera definitiva aprendidos en la praxeología.

El sexto y último momento, está relacionado con evaluar lo aprendido, la *"evaluación"*, en cuanto a la reflexión y las recomendaciones o sugerencias de los docentes y estudiantes en cuanto a las actividades realizadas y planteadas durante el proceso.

2.1.8 Definición de comprensión

La comprensión es otra de las tareas más difíciles de resolver en el oficio de maestro, no es fácil de medir, sobre todo por la falta de retroalimentación que realizan los maestros en las aulas de clase teniendo en cuenta las actividades que llevan a cabo los estudiantes, en otras palabras, es de vital importancia plantear un diseño de clase que permita hacer una introducción con objetivos, desarrollo de las actividades y el cierre de las mismas en donde los educandos y los profesores, puedan evaluar lo aprendido durante ese ciclo que dura la clase, reflexionando y respondiendo a la pregunta ¿Se cumplió el objetivo? En cuanto a la definición de la acepción comprender, podemos aseverar que es poder llevar a cabo una diversidad de acciones, actividades o tareas que evidencian que entiende y comprende el tema, al mismo tiempo que lo amplía, así mismo, ser capaz de asimilar un conocimiento y utilizarlo de una forma transformadora.

La diversidad de acciones es un punto que se debe trabajar en las actividades de aula, conservando el control de las mismas, pero si el diseño de la clase no contiene parámetros al respecto, será difícil que los estudiantes accedan a ellas, sobre todo que en muchas actividades matemáticas se trabajan pocas alternativas de representación de los objetos matemáticos Duval (2004). Para Morín (2000) comprender significa "aprender en conjunto", expresa que la comprensión no es digital, de hecho, comprender las matemáticas u otra disciplina del conocimiento tiene unas características, y la educación para la comprensión humana tiene otra perspectiva e interpretación, lo cual indica que la mirada de la educación, es facilitar y enseñar la comprensión entre las personas como condición y garantía de la solidaridad intelectual, social y moral de la humanidad.

En lo que se refiere al currículo según Stone (2003), "debe involucrar a los alumnos en constantes espirales de indagación, que los lleven desde un conjunto de respuestas hacia preguntas más profundas, que revelen conexiones entre el tema que se está tratando y otras ideas, con preguntas y problemas fundamentales y no quedarse en simple transmisión de información que no ocasiona la comprensión" Stone (2003), los temas que se caracterizan por ser el centro del dominio o disciplina en el desarrollo de una determinada área del conocimiento, partiendo de las necesidades, expectativas, intereses, realidades, motivaciones donde se mueve el estudiante en contextos socioculturales ocasionando la curiosidad y conexión con saberes preconcebidos.

2.1.9 Metas de comprensión

Según Stone (2003), las metas conllevan a la comprensión que se espera por parte de los estudiantes por medio de las ideas, relaciones, procesos o preguntas que se toman para la indagación, dichas metas desarrollan los alcances en una unidad curricular en un tiempo determinado, por otro lado, deben ser públicas y explícitas para que sirvan como orientación para relacionar las diferentes actividades entre sí, siguiendo una secuencia que permita avances en la comprensión del área de las matemáticas. Ahora bien, las metas se cumplen, siempre y cuando el estudiante sienta la necesidad de construir el conocimiento del objeto en estudio, en otras palabras, debe mantener la curiosidad por el aprendizaje, adquirir nociones nuevas, compartirlas con sus pares, por otro parte, deben permanecer expuestos a la comprobación de sus definiciones conceptuales, por tanto el papel del maestro radica en exponer a los estudiantes en continuas tareas, que les permitan poner en conversación los avances y retrocesos desarrollados mediante las distintas actividades académicas.

2.1.9.1 Registros semióticos y representación semiótica

Los procesos complejos, abstractos y de carácter concreto se realizan de manera efectiva por parte del cerebro humano, a pesar de su limitación en la capacidad de memoria y procesamiento Kaput (1987a, 1992, 1998). Sostiene el autor, que la experiencia matemática utiliza inicialmente, sistemas de notación para posteriormente utilizar sistemas de representación, con base en la habilidad de implementar los medios físicos de organización de las experiencias como de los elementos cognitivos que forjen la construcción de un conocimiento duradero, así mismo, afirma que es inminente emplear un lenguaje en el desarrollo para dar sentido a las experiencias para la utilización de diversos registros para su representación, igualmente, la necesidad de interacción entre ellos ya que tienen lugar entre los procesos que vinculan las estructuras mentales y objetos físicos. La noción de representación es perdurable en las matemáticas, sin embargo, el origen de algunos fenómenos que se enmarcan en el desarrollo del ejercicio pedagógico enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, están relacionados con la simbolización y representación, ya que hacen parte del núcleo de los procesos cognitivos y contenidos matemáticos (Kaput 1987a).

Con relación a Kaput, Duval (1993, 1995) confirma la presencia de dos mundos que se relacionan, el de las representaciones semióticas y las representaciones mentales, con una distinción entre objetos matemáticos y sus representaciones ya que éstas permiten la aprehensión del concepto u objeto. Según Duval (2004), enseñar y aprender matemáticas conlleva a que las actividades cognitivas como la comprensión, conceptualización, razonamiento y resolución de problemas sean analizadas en el terreno del lenguaje de imágenes, de expresión, lenguaje natural y distintos registros de representación en el aprendizaje de las matemáticas, encontrando diferentes sistemas de escritura para los números como, algebraicas, lógicas y simbólicas para los objetos y funcionales que son lenguajes simultáneos al lenguaje natural, haciendo de estas una forma semiótica diferente. Cabe anotar que las actividades de formación están representadas y realizadas por medio de signos. Por otra parte, es probable que la causa de obstáculos del dominio de las operaciones, puede estar con los procedimientos de comprensión y dificultades del aprendizaje conceptual, por su relación con la necesidad para modificar la manera por la cual se socializa un conocimiento, donde sólo la coordinación de diferentes registros semióticos contribuye a solucionarlos.

La tarea primordial en matemáticas consiste, no solamente por estudiar la representación de una estructura por otra, sino que debe determinar efectivamente qué estructura se mantiene en cada representación; de hecho, las mismas son relativamente independiente de los símbolos externos empleados, porque la propia estructura se maneja como idealización o abstracción (Kaput, 1987a, p.20).

Teniendo en cuenta la presencia en la mente de cada individuo de un nivel neurobiológico nivel 1 del cual sobresalen los símbolos nivel 2, que aceptan expresar y representar algo nivel 3, la psicología cognitiva ha indagado sobre cómo la coordinación y la manipulación de diferentes representaciones que enmarcan el cimiento fundamental de la cognición Font (2000).

Es así como por ejemplo, en el constructo mental que se forma en los estudiantes se facilita más la comprensión de los objetos matemáticos cuando hay una relación consciente y cercana con el entorno. En los procesos de formación de símbolos, conceptos empleados como sinónimo de representación, juegan un papel primordial en la integración del conocimiento existente, porque están conectados a una idea cuyo significado asimila las nuevas ideas y en la reflexión sobre los esquemas conceptuales Skemp (1980) en su obra Psicología del aprendizaje de las matemáticas.

Según Chevallard (1985), la transformación de una representación semiótica en otra exige colocar la relación entre la ciencia y su enseñanza, así como el dominio de las ciencias cognitivas, en particular la transposición didáctica.

“El uso de representaciones semióticas es fundamental para la actividad matemática y para serle intrínseca” Duval (2004). No obstante, no deben mezclarse con las representaciones mentales dado que el grupo de imágenes y concepciones que puede tener un sujeto a cerca de un objeto como concepto matemático, dista de un objeto real, por lo tanto se debe referir a diferentes representaciones para su estudio, de hecho resulta muy valioso tener presente que las mismas no corresponden al objeto matemático en sí, sino que aportan a su comprensión, esto es, si no se diferencia el objeto matemático (triángulos, funciones, números etcétera,) de sus representaciones (escritura fraccionaria, gráficos etcétera) no puede haber comprensión en matemáticas. Las representaciones semióticas son fundamentales para el proceso de la actividad matemática como para la finalidad de la comunicación, así mismo, el sistema de representación semiótica empleado está en relación directa con el tratamiento de los objetos matemáticos, por ejemplo cuando se realizan cálculos numéricos se observa que hay una subordinación del sistema de escritura seleccionada, decimal, binaria, etcétera, es decir que los tratamientos matemáticos no pueden ejecutarse efectivamente si se elimina el sistema semiótico de representación, al mismo tiempo la creación y desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos acompañan los avances de los conocimientos Duval (2004).

Un objeto matemático no es otra cosa que el invariante de una multiplicidad de representaciones posibles (Duval, 1995, 2009b, 2011). A pesar de que sus contenidos no tengan nada en común, un objeto de conocimiento puede surgir del reconocimiento de que dos o más representaciones semióticas son representaciones de un mismo objeto, es decir, el objeto matemático surge de la actividad concreta de producción y transformación, lo que el autor define como tratamientos y conversiones, de signos oportunos (representaciones semióticas) entre particulares o entre sistemas semióticos, los define como registros de representación.

2.1.9.2 Semiótica y noética

Para analizar la variabilidad de rutas de acceso a uno o varios problemas en matemáticas, se hace necesario establecer la multiplicidad cognitiva que presentan los estudiantes en una misma clase, en donde la adquisición del concepto matemático debe estar referido por las condiciones de organización de cambios de registro para conseguir el aprendizaje, a esto es que se denomina noética, no obstante, no existe noética sin semiótica, porque es esta la que decreta los requisitos que posibilitan el aprendizaje con recursos de varios sistemas semióticos de representación y la organización entre los mismos Duval (1993), en la actualidad sabemos que debemos mutar a través de varias representaciones semióticas para lograr la construcción cognitiva del objeto, y lograr que los estudiantes se den cuenta que frente al mismo, existen múltiples representaciones semióticas, conviene subrayar entonces que cuando se dominen las representaciones, es decir, usarlas en contextos oportunos y transformarlas las unas de las otras, se podrá concluir que los estudiantes han construido cognitivamente. D'Amore (2003).

El caso de la manera de adherirse a los objetos matemáticos se relaciona estrechamente con los procesos semi cognitivos, puntualmente aquellos movilizados en matemáticas, en otras palabras, con la producción o elección de representaciones semióticas en oportunos registros y su movilización explícita o implícita en dos tipos de transformaciones, tratamiento, transformación de una representación a otra del mismo tipo, es decir, en el mismo registro semiótico del mismo objeto, además de conversión, transformación de una representación semiótica en otra de tipo diferente, ósea en otro registro del mismo objeto, esta es la secuencia de la construcción cognitiva del objeto matemático (D'Amore et al., 2013).

2.2 MARCO CONCEPTUAL DISCIPLINAR (REFERENTES TEÓRICOS DE LAS SECCIONES CÓNICAS CENTRADOS EN LA PARÁBOLA)

2.2.1 La parábola en la historia de las cónicas

A través de la historia de las secciones cónicas, fueron consideradas perpendiculares a la generatriz, por lo tanto eran llamadas secciones de un cono rectángulo, de un cono agudo, de un cono obtuso entre otras, la construcción de un cubo de doble volumen que otro dado, conocido como la duplicación del cubo, hacía parte de un interrogante fuerte en la geometría griega estudiado por Menecmo, matemático griego (350 A.C.) inspirado por Platón. A continuación se relacionan aspectos históricos y recientes para darse cuenta que, las cónicas y en este caso, la parábola, trascendieron y han trascendido en temas como, las funciones, ecuaciones y la cinemática entre otras.

2.2.2 Desde las cónicas

Iniciando con Menecmo que aportó a la teoría apenas como un bosquejo de las secciones cónicas, por el contrario es fundamental introducirnos en la figura del gran Euclides (330 A.C.) fundador de la escuela de Alejandría y autor de trece libros distribuidos en: geometría plana, proporciones, magnitudes inconmensurables, aritmética de los números racionales y geometría del espacio, donde se dan las definiciones de línea recta, cuadriláteros, punto, figura plana, ángulos, círculo, rectas paralelas y triángulos. Posteriormente Apolonio de Pérgamo (262 y 190 A.C.) se esforzó por orientar de manera exclusiva al estudio de las cónicas en su libro, "Tratado de las cónicas", entre los ocho libros que se conocen, se tiene que el primero se refiere a la generación de la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola, "secciones opuestas" el tercero de los teoremas indispensables para la creación de los "lugares sólidos", que son aquellos cuya elaboración se logra cortando conos o cilindros; el cuarto de los cruces de las cónicas entre sí, el sexto de los requisitos de similitud y semejanza de las secciones cónicas. El autor estudió los cortes de las cónicas como secciones de un mismo cono circular inclinado por planos diferentes, en interpretaciones diferentes a las de Arquímedes y Euclides que las estudiaron como secciones por un plano perpendicular a una generatriz de un cono circular recto, en donde el ángulo cónico tuviera forma obtusa (elipse), agudo (hipérbola) y recto (parábola) trascendiendo al estudio proyecto de las cónicas elaborado por Steiner.

Se hace evidente entonces, que para la construcción del concepto de parábola como sección cónica, se movilicen saberes previos necesarios para fortalecer la estructura conceptual del objeto matemático en estudio, donde el estudiante tenga la posibilidad de interactuar con elementos del entorno en paralelo con las características adheridas al lenguaje natural y matemático.

El interés por estudiar las cónicas se refleja en otros autores después de Apolonio, tal es el caso de Perseo (130 A.C.), construyó las curvas empíricas derivadas como sección de una superficie tórica por un plano en su intento generalizar la teoría de las cónicas. De la segunda etapa de la escuela de Alejandría Pappus en el año 385, escribió los libros "Colecciones Matemáticas", en los que se halla el volumen y área de que las superficies de revolución desde el centro de gravedad de la línea o de la superficie que los reproduce, luego sirve para que Guldin trabaje sobre la propiedad fundamental de la razón inarmónica o doble en la proyección de la geometría sobre el concepto de directriz y la definición de las secciones cónicas, igualmente que el uso de métodos de síntesis y análisis para la solución de problema geométricos similares. A finales del siglo XV e inicios del siglo XVI mediante las obras de Euclides, Arquímedes y Apolonio, surgió el renacimiento de la Geometría y con estudiosos matemáticos, cuya atención se dirigía generalmente al Álgebra, se despertaron nuevas curiosidades por la geometría como la de los autores: Johann Kepler (1.571-1.630), quien planteó la utilización del infinito en la Geometría, igualmente pluralizó los trabajos elaborados por Arquímedes en relación con los volúmenes de los esferoides y de los conoides. Luego, en 1.609 escribió "Astronomía Nova", en donde expuso las tres leyes que llevan su nombre, sobre las órbitas planetarias y un modelo gráfico proyectado para definir las circunstancias de los eclipses de Sol en distintos lugares de la Tierra.

Cada aporte que proponen los autores, refleja la importancia que ha tenido la Geometría Analítica a lo largo de la historia, donde se intercambian significados modificados por la insistencia de obtener con mayor veracidad, los elementos que argumentan la teoría de cada proceso en evolución, lo que indica que ningún planteamiento corresponde a un producto terminado en su totalidad, es decir, que lo planteado anteriormente puede exponerse a modificaciones parciales para un mejoramiento continuo.

Girard Desargues (1.593-1.663), en su obra escrita "Borrador de un ensayo que refería de los resultados de la relación de un cono con un plano", introdujo las rectas paralelas como idea primordial para originar una perspectiva en el arte pictórico, consideró también la suposición del foco infinito en la parábola cuyas curvas creaban un grupo con similitudes usuales.

Blas Pascal (1.623-1.663), desde la geometría analítica como una nueva geometría, hacia el mundo de las letras, escribió su "Ensayo sobre las cónicas", donde es evidente la propiedad del hexagrama místico, convertido en otro momento como teorema del hexágono inscrito en una cónica, sin referenciar magnitudes de secciones ni a longitudes angulares, por lo que se estima como el creador de la geometría moderna.

Isaac Newton (1.642-1.727), creador de la obra "Principia" dedicó dos capítulos a las secciones cónicas, generando la organización de rectas móviles mediante intersecciones, y la relación con el cuadrilátero completo, igualmente ofreció su obra "Enumeratio linearum tertii ordinis", apéndice de su "Óptica", al estudio de la representación gráfica de curvas planas, dibujando y catalogando setenta y dos tipos de cúbicas.

2.2.3 Desde las funciones

Arquímedes de Sirácusa (287- 212 A.C.), sucesor cronológico de Euclides, realizó la transferencia desde la geometría estática a una geometría cinética, constituyendo una relación estrecha entre la experiencia y razón pura. Igualmente realizó aportes al entorno de la Mecánica y la Física, se deben resaltar, entre un sin número en favor de la Geometría, los procedimientos generales centrados en los continuos acercamientos, para el cálculo de volúmenes de los cuerpos limitados por superficies curvas y de las áreas de las figuras curvilíneas aplicados al segmento parabólico, al círculo, y a la elipse, en los que se obtuvieron las cuadraturas de la superficie determinadas entre dos espiras continuas de una hélice.

También se resaltan aportes sobre fenómenos naturales trabajados por Nicolás Oresme (1.323-1.382) en el inicio de la representación de funciones en su expresión gráfica.

Igualmente, en la obra "Instituciones Geométricas" donde se reglamentaron las representaciones de poliedros semirregulares y regulares para su construcción sobre los planos, también sobre las curvas alabeadas y la hélice en forma análoga, aportadas por el autor Alberto Durero (1.471-1.525).

Otro autor que dominó la Geometría Analítica utilizada para conseguir lugares sólidos y planos, y que también completó el trabajo de Arquímedes, organizando las parábolas de todo orden determinando los centros de gravedad de los paraboloides y volúmenes, la rectificación de la parábola cúbica, y solución de problemas de trazados de tangentes a una curva. Pierre de Fermat (1.601-1.665).

Finalmente, Isaac Newton utilizó el álgebra simbólica y la geometría analítica para desarrollar el Cálculo Diferencial, y luego dar explicación a fenómenos naturales. Puede observarse también, que las situaciones cuadráticas son analizadas en el plano, presentándose mediante expresiones algebraicas dando interpretación a puntos que vinculan dos magnitudes en una cantidad establecida, cuando finalice el comportamiento de la curva elaborada por medio de una ecuación cuadrática, se distingue un modelo de relación unívoca entre magnitudes que luego se llamó función cuadrática.

2.2.4 Desde las ecuaciones

A través de diferentes culturas como la babilónica, se hicieron propuestas para hallar un número tal, que sumado a su inverso diera un número dado, conduciendo a una ecuación cuadrática desde el punto de vista aritmético, en Grecia por ejemplo, se encuentran las primeras ideas de cuadráticas con la escuela pitagórica para establecer el razonamiento de progresiones y sucesiones, pensamientos de Euclides como que el cuadrado es la figura equilátera y rectangular entre las figuras cuadriláteras, además de vincular Geometría y Aritmética para trabajar con cuadrado como figura y área. Los árabes tomaron en cuenta las investigaciones de Euclides para desarrollar expresiones cuadráticas, y representaciones geométricas a través del Algebra. Por otro lado, desde la Geometría de la edad media surgieron autores como Al- Joarizmi (830 D.C) y Tabit (835-901) quienes aportaron soluciones para resolver geométricamente las ecuaciones de segundo y tercer grado respectivamente.

Desde el renacimiento de la Geometría, Francisco Vieta (1.540-1.603), fue catalogado como uno de los primeros introductores del Álgebra con la Geometría, logrando restituir el tratado que se había perdido de Apolonio "De Tactionibus" referente a las tangencias, además construyó las ecuaciones de segundo y tercer grado en forma gráfica, así mismo, resolvió de una forma sencilla y vistosa, la dificultad de encontrar la circunferencia tangente a otras tres dadas.

En este recorrido, no puede faltar la Geometría Analítica de Descartes (1637) y (1656) considerado como uno de los primeros en extender el método cartesiano en el espacio, contribuyó con la restitución de los lugares planos de Apolonio, además, elaboró el primer tratado sistemático de Geometría Analítica titulado "Elementa curvarum linearum", y el canónigo René de Sluze (1.622-1.658), quien perfeccionó la elaboración de las soluciones de una ecuación por intersección de curvas.

2.2.5 Desde la física

La Geometría sufrió un revés con la caída del Imperio Romano en el año de1453 y con la desaparición de la escuela de Alejandría, sin embargo, aparecieron algunos autores que realizaron aportes significativos, como por ejemplo, la determinación del volumen producido por la rotación de la parábola en cercanías a su eje, igualmente la resolución de encontrar el punto de un espejo cóncavo en el cual debe coincidir un rayo luminoso para causar una reflexión por un punto determinado Alhazen (987-1.038). Luego con el renacimiento de la Geometría, con un enfoque cinemático, se consideró a la curva como el camino de un punto y a la tangente como la trayectoria del movimiento en dicho punto, quedando resuelto el problema de la tangente a una curva. Ejecutando esas apreciaciones a la cicloide se descubrieron procedimientos para trazar la tangente en un punto, demostrando que un arco de cicloide corresponde a 3 veces el área del círculo que lo produce, lo anterior tiene que ver con el área encerrada bajo el arco. Gilíes Personne de Roberval (1.602-1.675). La Geometría Analítica también hizo su aporte, en la obra "Geométrica Orgánica" (1648), se completaron las nociones de Newton centrados en la generación orgánica de las secciones cónicas, además, las características del cuadrilátero inscrito deducido para las secciones cónicas generaron la extensión hacia las cúbicas. Colin Maclaurin (1.698-1.746).

Finalmente, Galileo (1638), refuerza la comprensión geométrica del gnomon, definida por Euclides en relación a los conceptos de distancia y ángulo recto entre otros, igualmente introduce el concepto de función cuadrática en procesos de modelización con fenómenos de variación. Galileo expresa que la parábola se identifica como el producto del contorno de un cuerpo que está en continuo movimiento de acuerdo a una ley, además es un punto en movimiento que deja observar las cónicas como objetos matemáticos.

2.3 MARCO CONCEPTUAL DISCIPLINAR (CONCEPTOS BÁSICOS)

2.3.1 Definición del cono circular

Apolonio indica la definición del cono circular recto como se conoce actualmente.

La cual indica que de un cono pueden obtenerse cuatro tipos de secciones, variando la inclinación del plano que corta al cono, estas demostraciones fueron:

Un círculo: corte paralelo a la base del cono.

Una elipse: corte oblicuo con respecto a la base.

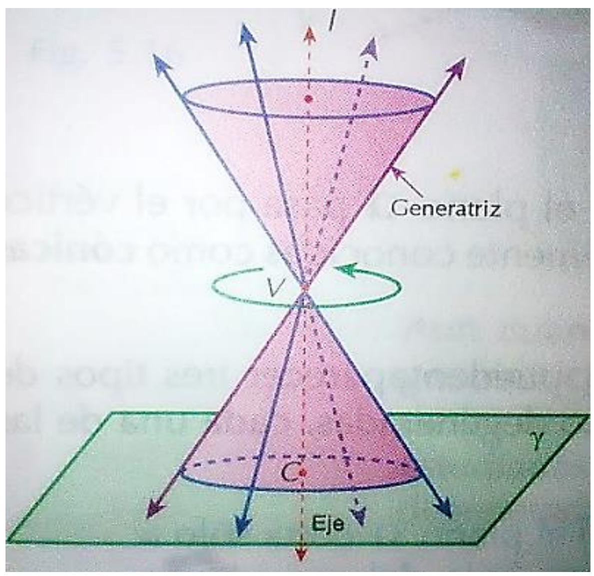
Una hipérbola: corte más o menos paralelo a la altura del cono enfrentado a su imagen unido por el vértice.

Una parábola: corte paralelo a una generatriz del cono que atraviesa su base.

Consideremos en un plano “**γ**” una circunferencia C. tracemos una recta “***l***” perpendicular a “**γ**”, que pase por el centro de la circunferencia C.

Sea “**V**” un punto en “***l****” destino del centro C.* La agrupación de todas las rectas que convergen por el punto “**V**” y la circunferencia C se llama **cono circular recto.** Cualquier recta que pase por “**V**” y por un punto de C se llama **Generatriz** del cono. La recta “***l***” se llama **eje del cono** y el punto “**V**” se llama **vértice del cono.** Sobre cómo se generan algunas características de un cono circular (ver figura 4)

Figura 4. Definición del cono circular

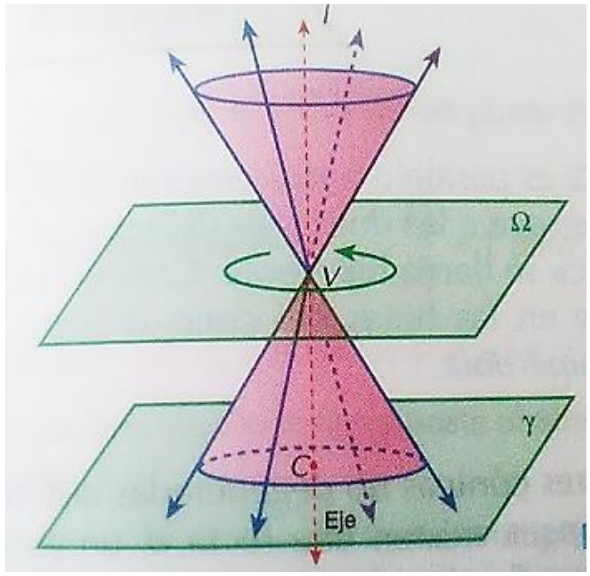


Fuente: Alfa 10 pág. 147

2.3.2 Punto común entre el cono y el plano

Sea Ω el plano con el que vamos a intersecar el cono, y se ubica paralelamente al plano “**γ**” y pasa por “**V**”, entonces el vértice “**V**” es el unico punto en común entre el cono y el plano Ω, en otras palabras, la sección cónica se reduce a *un punto*. Sobre la intersección del plano con un punto común del cono circular. (ver figura 5)

Figura 5. Punto común entre el cono y el plano

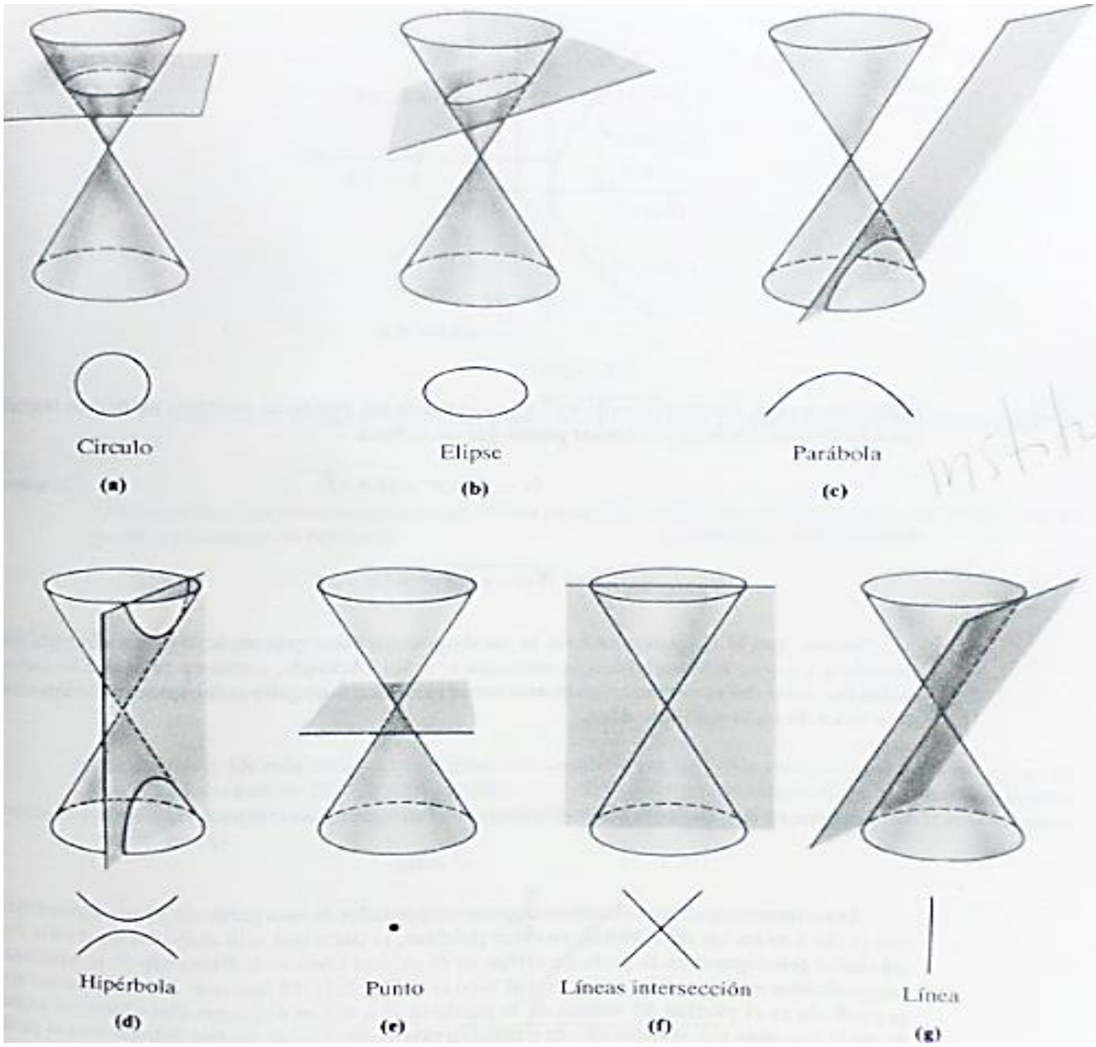


Fuente: Alfa 10 pág. 147

2.3.3 Formación de las secciones cónicas

Se puede evidenciar las diferencias que se generan para la formación de las distintas gráficas como secciones cónicas emanadas del corte de un cono, en otras palabras, se muestran las representaciones definidas por la intersección de un plano con el cono, el cual puede pasar por el vértice o por un lado dependiendo de la inclinación, para comprender la determinación de las secciones cónicas degeneradas pasando por el vértice del cono y las no degeneradas que no pasan por el origen, pero que se relacionan con el plano y el cono de acuerdo a una inclinación, (ver figura 6).

Figura 6. Formación de las secciones cónicas.

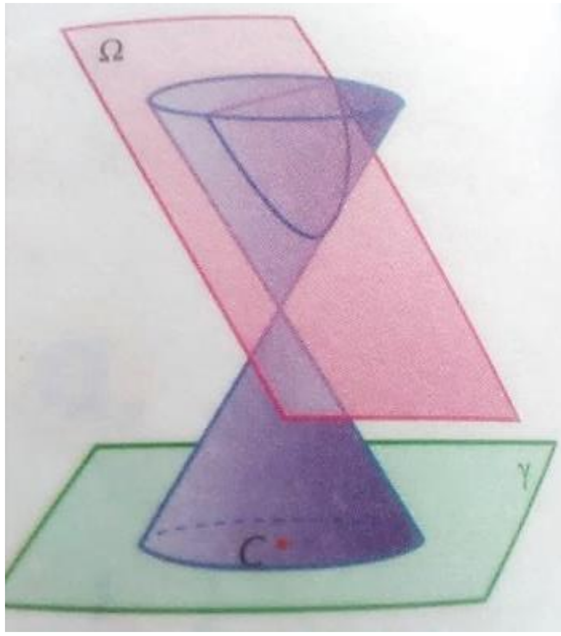


Fuente: Geometría analítica pág. 149

2.3.4 Definición de la parábola

Se hace evidente que la formación de la parábola como sección cónica, depende del grado de inclinación con que se relacionan el plano que realiza el corte y el cono que lo recibe en forma paralela a uno de sus lados, como se muestra en la figura 7.

Figura 7. Definición de la parábola



Fuente: Alfa 10 pág. 148

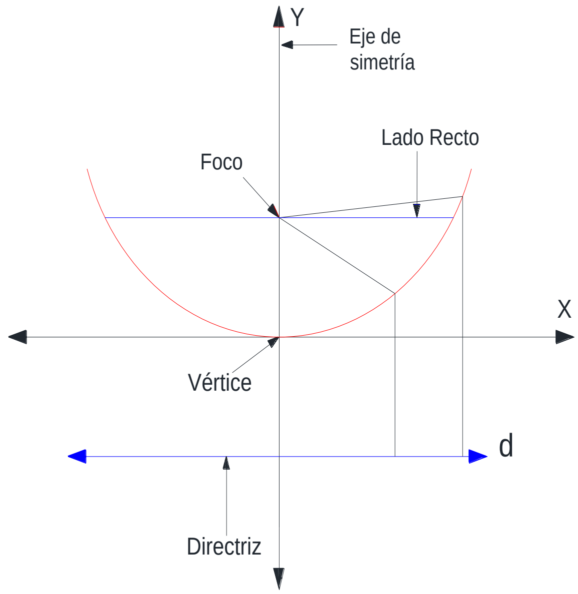
Defunción de la parábola como sección cónica

La parábola está definida como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal forma que su distancia de una recta fija ubicada en el plano, será siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano que no pertenece a la recta, el punto fijo F se denomina foco y la recta fija l se llama directriz Charles H. (1990).

2.3.5 Características de la parábola

Están determinadas por la ubicación estratégica de cada uno de sus elementos, estos permiten la comunicación del lenguaje matemático para dar información de la gráfica, hallar la ecuación de acuerdo con su posición, y realizar ejercicios de procesos de talleres relacionados con el entorno. Para observar las principales características (ver figura 8).

Figura 8. Características de la parábola con vértice en el origen



Fuente: Elaboración propia

Eje de simetría o eje focal (l): Permite el reflejo de una rama de la parábola sobre la otra dependiendo de la ubicación del eje coordenado, además, contiene al Vértice y al Foco.

Directriz (d): Corresponde a la recta que está ubicada a igual distancia del vértice que del foco, además, su posición es perpendicular al eje de simetría.

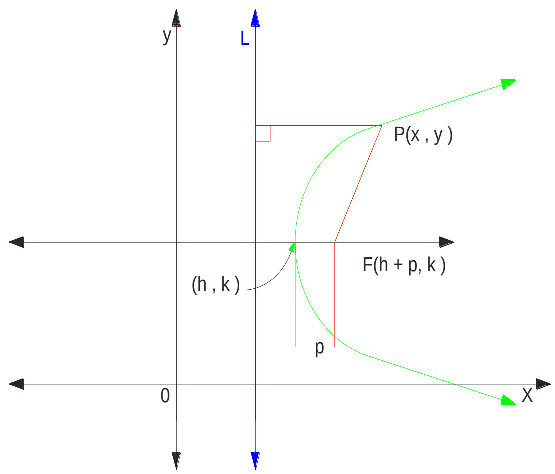
Foco (F): Es el punto ubicado sobre el eje de simetría que se encuentra a igual distancia del Vértice que de la directriz.

Lado recto (LR): Es la cuerda focal perpendicular al eje de simetría. Su longitud es de 4 veces la distancia del Foco al Vértice.

Vértice (V): Es el punto medio entre la recta directriz y el Foco, pertenece al punto de la curva que se intersecta con el eje de simetría.

A continuación en la figura 9, se puede observar la imagen de la parábola en posición horizontal cuando vértice no pasa por el origen, así mismo, para analizar los puntos coordenados que se generan por el desplazamiento del objeto matemático, (ver figura 9).

Figura 9. Parábola horizontal con vértice (h, k) y eje paralelo al eje X



Fuente: Elaboración propia

2.3.6 Representación de la parábola desde las ecuaciones

Teorema: La ecuación de la parábola con foco N (p, 0), directriz x = - p, vértice en O (0,0) y el eje X como eje focal o de simetría es:

Análogamente, podemos demostrar que la ecuación de la parábola con el eje de simetría del eje Y es: $x^2 = 4py$, cuando la parábola está en posición vertical.

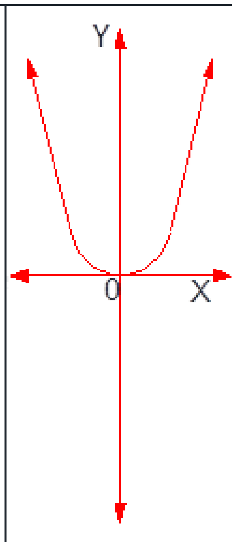
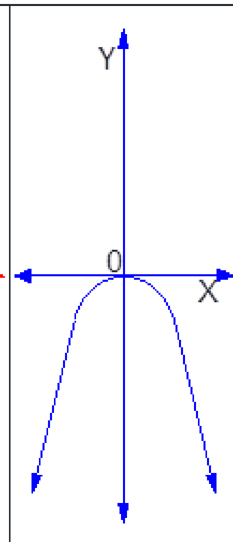
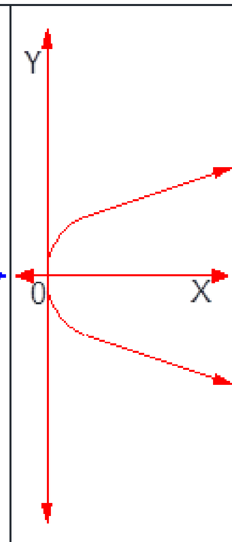
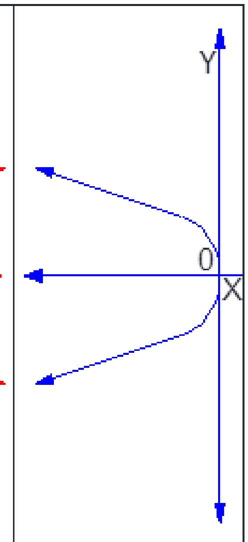
Análogamente, podemos demostrar que la ecuación de la parábola con el eje de simetría del eje X es: $y^2 = 4px$, cuando la parábola está en posición horizontal. ver figura 10 y ver figura 11

Figura 10. Procedimiento para determinar la ecuación de la parábola con vértice en el eje de simetría.

Afirmaciones	Razones
1. $PF = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2}$ $= \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$	1. Por distancia entre dos puntos
2. $PQ = x + p$ (siempre es ≥ 0) 3. $PQ = PF$ 4. $\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = x + p$ $(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$ 5. $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = 2px + p^2$ $y^2 = 4px$	2. Por distancia de un punto a la recta 3. Definición de parábola 4. Sustituyendo 1 y 2 en 3 5. Por el cuadro de los dos miembros y simplificación

Fuente: Elaboración propia

Figura 11. Gráficas y Ecuaciones de la parábola con vértice en el origen y eje focal en un eje coordenado

Parábola con vértice (0,0)				
Ecuación	$X^2 = 4py,\ p > 0$	$X^2 = 4py,\ p < 0$	$Y^2 = 4px,\ p > 0$	$Y^2 = 4px,\ p < 0$

Fuente: Elaboración propia

Teorema: La ecuación de la parábola con eje focal paralelo al eje Y coordenado y vértice (h, k), está determinada por:

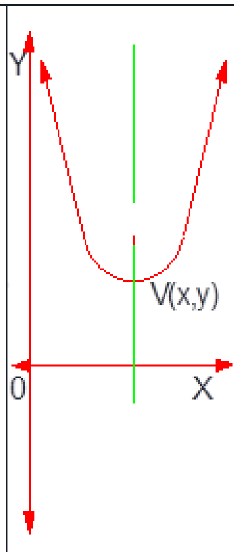
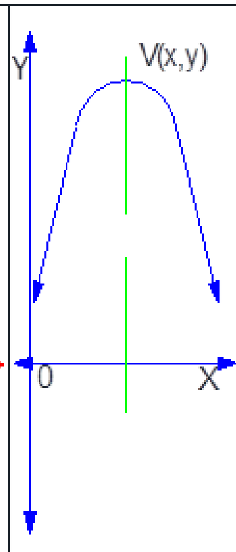
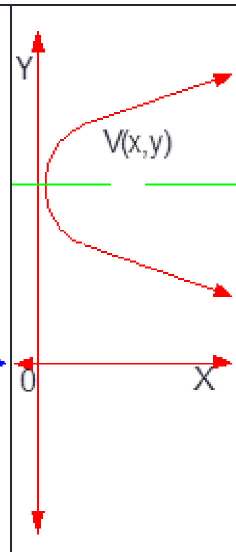
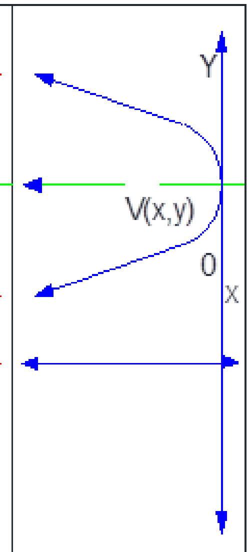
$(y - k)^2 = 4p(x - h)$, ver figura 12 y ver figura 13

Figura 12. Procedimiento para determinar la ecuación de la parábola con eje focal paralelo a un eje coordenado.

Afirmaciones	Razones
1. $PF = \sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2}$ 2. $PQ = x - h + p$ 3. $PQ = PF$ 4. $\sqrt{(x - h - p)^2 + (y - k)^2} = x - h + p$ 5. $y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph$ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$	1. Por distancias entre dos puntos 2. Distancia de un punto a la directriz 3. Definición de parábola 4. Sustituyendo 1 y 2 en 3 5. Factorizando

Fuente: Elaboración propia

Figura 13. Gráficas y Ecuaciones de la parábola con eje focal paralelo a un eje coordenado.

Parábola con vértice (h,k)				
Ecuación	$(X-h)^2=4p(y-k)$ $p>0$	$(X-h)^2=4p(y-k)$ $p<0$	$(Y-k)^2=4p(x-h)$ $p>0$	$(Y-k)^2=4p(x-h)$ $p<0$

Fuente**:** Elaboración propia

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

La Institución Educativa La Buitrera (zona rural) es de carácter pública, cuenta con cinco sedes ubicadas en el corregimiento la Buitrera de la ciudad de Cali departamento del Valle del Cauca, para el trabajo de investigación se tomó como referencia la sede de José María García de Toledo ubicada en el kilómetro 3 sector el plan vía la Buitrera, sus estudiantes llegan desde diversos sectores de la región contando así con una población heterogénea en cuanto a sus costumbres culturales, religiosas y académicas entre otras, de otro lado, existe una población que surge de otros lugares del país por situación de desplazamiento por motivos ajenos a la institución.

La institución cuenta en la actualidad con siete docentes en el área de matemáticas, uno en comisión del Programa para la calidad educativa Todos a Aprender (PTA 2), en calidad de provisionalidad, dos que acaban de llegar a la nueva sede San Gabriel en el periodo lectivo 2018 y dos en calidad de nombramiento en propiedad que es donde yo me encuentro, por tanto, no es un dato menor analizar que, a pesar de que han habido avances en la construcción de planes de área y aula en cuanto a la trazabilidad que estos deben tener desde los ciclos de primaria, es claro que la institución está en continua movilización de saberes en diferentes puntos de vista para la reflexión en la ejecución de los mismos, debido a que todos los docentes no son profesionales en el área en cuanto a la pedagogía, sino que tienen especializaciones en áreas de ingenierías. Por otro lado, en algunas sedes el docente debe atender los ciclos por multigrados (un docente y varios grados de escolaridad), lo cual, nos convoca a realizar la planeación teniendo en cuenta esta problemática fundamental para el desarrollo de las actividades propuestas para trabajar en las aulas.

3.1.1 Sujetos de la investigación

Para ésta intervención se contará con la participación de todos los estudiantes en los grados *10 – 1 y 10 – 2* que posteriormente serán *11 – 1 y 11 – 2* en la sede José María García de Toledo, es decir, a pesar que habían estudiantes seleccionados como muestra de la población en la investigación, se tenía una gran expectativa por la movilización de saberes que se podrían dar en la construcción del concepto parábola como sección cónica, debido a que en la institución, no se tenía la costumbre de abordar el aprendizaje de las matemáticas desde las diferentes representaciones mencionadas. Los criterios para seleccionar los estudiantes en la propuesta obedecen al liderazgo académico que han presentado durante los últimos tres años, lo anterior indicaba que debían liderar y acompañar los procesos de los otros compañeros en los diferentes momentos que se trabajaron en el aula, ello no significa que fueron los mejores del área de matemáticas, es necesario contar con estudiantes con liderazgo pero con rendimientos no tan sobresalientes para tener un equilibrio en los resultados obtenidos de la propuesta.

En el devenir de los años anteriores 8° y 9°, los estudiantes han realizado trabajo de participación en diferentes exposiciones dentro y fuera de las aulas, lo que ha permitido tener un posible panorama del desempeño y liderazgo en el momento de enfrentar actividades nuevas o poco comunes planteadas para el área de matemáticas, lo cual permitió escoger líderes para las diferentes actividades planificadas, por ejemplo, los estudiantes que debían trabajar la representación de la parábola utilizando herramientas como Geogebra en recursos digitales como las tabletas que se encuentran disponibles en la institución, fueron los que realizaron el curso de TIT@ (educación digital) con el apoyo del profesor del área de informática.

3.1.2 Tipo de investigación

Se refiere a una intervención de carácter cualitativo e interpretativo sobre el uso de algunos sistemas de representación, para analizar las experiencias que ocurren en el aula sobre la construcción del concepto de parábola como sección cónica, por lo cual, los estudiantes tienen la oportunidad de resolver propuestas pedagógicas en actividades que contribuyen a desarrollar habilidades cognitivas que permiten relacionar objetos del entorno con objetos matemáticos, mediante la manipulación de elementos físicos o virtuales en el tratamiento de la resolución de problemas, es así como el punto de vista cualitativo sobre la investigación, ocurre cuando el hábito de interpretar permite un entorno evidente que debe ser transformado y convertido en una repetición de exhibiciones en forma de percepciones, comentarios, reproducciones y escritos, porque está basado en el interés de la comprensión del significado de los actos realizados por los seres humanos y reclama que la “realidad” se concreta a través del razonamiento que los implicados descubren de la investigación en relación con sus realidades, desde lo puntual a lo general. León (2011).

Cabe anotar que las sensaciones exhibidas, se encargan de considerar diferentes fenómenos de aquellos que son analizados para inspeccionar el contexto de los datos definidos de acuerdo a su realidad, además de construir ciertas conclusiones que posibiliten la toma de decisiones y darle su autenticidad, de tal forma que se dirijan más allá de lo representativo y genere razonamientos reflexivos en relación con un contexto determinado, debido a que los mensajes no presentan un solo significado por pertenecer a una interpretación cualitativa.

3.1.3 Sistematización de experiencias

Una de las funciones más relevantes que se deben desarrollar en el oficio de maestro, es la sistematización de experiencias pedagógicas dentro y fuera del aula, no obstante, pareciera que es de las tareas con menor cantidad de evidencias a la hora de realizar las actividades programadas como procesos de formación de enseñanza - aprendizaje, en las cuales tienen oportunidad de participar toda la comunidad educativa; en efecto, tal inconsistencia ocasiona que muchas de las transformaciones que se deben dar a nivel de crecimiento y evolución académica, se puedan perder porque no se tiene registro alguno sobre el inicio, el proceso, las conclusiones y mucho menos de la reflexión de lo que se pretendió alcanzar como meta en la planeación de las competencias elaboradas desde una propuesta pedagógica y metodológica en particular.

Por ello, es importante resaltar el aporte que nos brinda el autor Oscar Jara (2017) en el proceso de sistematizar nuestras prácticas pedagógicas, porque en ellos, se puede dar fe de lo que se realiza al interior y exterior de las aulas de clase, así mismo, de las actividades que comúnmente se realizan como propuestas de estudio, conviene subrayar entonces que fue de mucho ayuda utilizar y desarrollar las preguntas que el autor nos refiere, porque cada una de ellas contiene el enfoque necesario para identificar, seleccionar, y representar los momentos con mayor relevancia que ocurrieron durante el periodo en el que se desarrolló cada situación académica, de hecho, una de las recomendaciones que más énfasis requiere, es la de obtener el aprendizaje crítico, la experiencia y la reflexión que realizó de las mismas, porque sin ellas no se consigue la retroalimentación constante entre lo que se diseña y lo que se ejecuta.

Las categorías de análisis se alinearon de acuerdo a tipo de tareas y procedimientos diseñados que permitan agrupar y hacer seguimiento a la evolución del aprendizaje de las SD (situaciones didácticas). También se tendrán en cuenta como categorías, las competencias matemáticas de representar y comunicar, pertinentes al objeto matemático que se abordaron.

4. DESARROLLO

4.1 SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

“PARA BOLA Y OIME PUES”

Líneas de fuerza: Diseño de la práctica docente

Resolución matemática por modelación

4.1.1 Situaciones Problema “*para bola y oime pues*”

En el devenir de las prácticas pedagógicas entendidas como el oficio de maestro se debe evidenciar la intervención que se realiza en el aula, esto es, los posibles cambios y transformaciones académicas que deben presentar los estudiantes, en la medida que ejecutan las propuestas de enseñanza aprendizaje que se diseñan como aportes para la construcción de conocimiento nuevo o para fortalecimiento de alguna noción que se tuviera del mismo, sin embargo, los resultados que se obtienen pueden manifestarse de una manera que no fue planificada, sobre todo, porque en muchos casos no se registra los acontecimientos académicos de una forma continua y secuencial, es decir, los maestros deben sistematizar poco de lo que se produce dentro y fuera de las aulas, tampoco se trabaja culturalmente para que estudiantes lo hagan.

La sistematización de nuestra práctica nos debe permitir una reflexión constante de nuestra función como acompañantes del proceso académico que desarrollan los miembros de la comunidad educativa, para lograr producción critica de saberes

4.1.2 De cómo surge la propuesta

Una competencia fundamental que se debe desarrollar en el oficio del maestro, es la capacidad de análisis en los comportamientos académicos que presentan los estudiantes a lo largo de un periodo o etapa, en los cuales se debe tener en cuenta la motivación, destreza, creatividad, resultados entre otros factores, es así como aparecen las primeras motivaciones respecto al trabajo de investigación, promovidas por la presentación de las pruebas internas y externas realizadas periódicamente a los estudiantes. Por otro lado, debo manifestar que en mi práctica docente luego de la realización de una prueba a los estudiantes, los invitaba a resolverla entre todos, observando la proyección sobre el tablero, de esa manera podría confrontar las diferentes respuestas que arrojaban los estudiantes argumentando el porqué de la posible solución. Por otra parte considero que una de las pruebas que fortaleció la pregunta de investigación, está relacionada con la frace de "*supérate"* porque de nuevo se me pidió trabajar las preguntas por parte de la orientadora del PTA Dora Gómez, motivada por la preocupación de los resultados insuficientes de las mismas, de este modo, podía confirmar que la metodología empleada en las clases perseguían el mismo propósito de comprender en donde se estaba fallando. Sin embargo, las preguntas en las cuales hacía mayor énfasis, eran las relacionadas con el pensamiento espacial y sistemas geométricos, relacionados con el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, en los que tome como referencia las secciones cónicas en especial la parábola. De igual importancia debo referirme a una deficiencia que tenía la institución educativa la Buitrera, de no incluir de manera explícita, la parte de geometría en los planes de área desde los grados inferiores, los cuales se modificaron sólo partir del año 2016, de ahí que los resultados de las pruebas no fueran los esperados por toda la comunidad educativa en relación con los pensamientos mencionados anteriormente.

Es así como se acude a la primera convocatoria por parte del grupo de investigación de la universidad Icesi para el trabajo de grado entre los meses de mayo y julio de 2017, que se presenta a una parte de los estudiantes en maestría la propuesta de macro proyecto llamado *innovación en didácticas de la ciencia* por parte de docentes de la Universidad ICESI, para la realización de la tesis de grado que requiere sistematizar la práctica reflexiva dentro del subgrupo de investigación *didáctica de las matemáticas* en el cual decido participar, es así como la Mg. Dora

Janeth Gómez asume el papel de orientadora del proceso como apoyo para la sistematización. En el transcurso de éste periodo se tuvieron que realizar ajustes en la propuesta en el objeto matemático de estudio que comenzó inicialmente con la función cuadrática y que posteriormente fue modificada a las secciones cónicas (parábola), debido a un cambio en la carga académica en la institución y que a su vez conservaba la idea inicial de la dificultad presentada por los estudiantes en la resolución de problemas desde el registro gráfico al algebraico.

En el tercer semestre cursado en la universidad se inicia un trabajo de investigación en la institución educativa sobre el seguimiento de los procesos matemáticos trabajados durante los años 2015 y 2016, necesarios para la comprensión del objeto matemático parábola como sección cónica, en el cual se evidencia con claridad que existía un déficit de la geometría en la institución.

Luego de revisar e investigar sobre los resultados poco satisfactorios obtenidos por los estudiantes de los grados superiores (10° y 11°) durante los últimos tres años en la institución, sobre el objeto matemático parábola como sección cónica desde el registro gráfico al algebraico, me di cuenta de que no era una situación exclusiva de esos niveles, por el contrario, las dificultades se presentaban desde el grupo de niveles 1° a 3° debido a que en la institución no se trabajaba de manera adecuada las diferentes formas de representar un objeto matemático como lo recomienda Duval (2004), tampoco se planificaba teniendo en cuenta la coherencia vertical y horizontal que deben respetarse desde los lineamientos y en los estándares en matemáticas desarrollados por el currículo del MEN. De hecho, los planes de área y aula se trabajaban por la exclusividad de los contenidos y no de los procesos matemáticos para alcanzar las competencias, de igual manera los docentes del área de las matemáticas no estábamos actualizados en el trabajo de planificación del área por competencias, tampoco eran vinculados ejes temáticos en el área de la geometría analítica desde los primeros ciclos de básica primaria.

4.1.3 De los primeros objetivos de la sistematización de la “parábola”

Después de hacer seguimiento a los resultados académicos poco eficientes arrojados por los estudiantes de distintos grados en *primaria y bachillerato,* en las diferentes pruebas internas y externas desarrolladas durante varios años lectivos, en relación con el pensamiento espacial, sistemas geométricos y pensamiento variacional, sin encontró que no había una propuesta metodológica eficiente para modificarlos a pesar de muchos esfuerzos realizados por la comunidad educativa. Se puede tomar como *primer objetivo* adoptar ésta propuesta académica, que propende por implementar ideas nuevas en el desarrollo de las clases para generar un cambio en la manera de construir el concepto del objeto matemático (parábola) a través de los diferentes sistemas de representación, en la cual estudiante y docente interactúan de forma activa cumpliendo el rol que le corresponde a cada uno, aportando elementos que contribuyen en su formación para obtener resultados acordes con los propósitos planteados al inicio de la planeación curricular, más aún, si se tiene en cuenta que las dificultades presentadas en las pruebas están identificadas en el proceso de la investigación.

En otras palabras, la traducción de lo anterior refiere en que, para arrojar unos posibles resultados más positivos, se necesita de un *segundo objetivo*, me refiero a modificar algunos aspectos en mi práctica como docente desde la planeación de las actividades que se deben proponer dentro y fuera del aula de clase, como de la motivación que debo ocasionar en los estudiantes en la participación y producción. Por otro lado, la metodología no debe perseguir únicamente resultados, porque lo más importante es que los estudiantes adquieran herramientas que les permitan en cualquier momento poder comprender de manera explícita e implícita un objeto matemático. En ese orden de ideas el *tercer objetivo* pretende analizar los avances o retrocesos de los desempeños académicos ocasionados por la construcción del concepto de parábola con un enfoque metodológico desde los diferentes sistemas de representación.

4.1.4 De cómo me enfrento al reto de las dificultades de ejecución de la sistematización

En la institución educativa la Buitrera, ubicada en el corregimiento la Buitrera kilómetro 3 en la ciudad de Cali en la **sede José maría García de Toledo** se realizó la experiencia de aula sobre la que voy a sistematizar en el ciclo de 10° y 11°. Conviene subrayar que, por un lado la institución está conformada por cuatro sedes más, los Comuneros, el Otoño, Nuestra Señora de las Lajas y San Gabriel (nueva sede), en ese sentido, se debe planificar por ciclos porque las primeras sedes trabajan con la estrategia de escuela nueva, (enfoque multigrado) por otro lado el tema de las secciones cónicas generalmente es abordado al final del grado 10° y a principios del grado once según planificación curricular, aunque no siempre se termina el proceso completo, ni se continua en el año lectivo siguiente.

Los retos a los que se ven enfrentados los estudiantes ocasionados por la nueva metodología hacen parte del proceso que se requiere sistematizar, así mismo el grado de aserción de manera progresiva y a su vez compleja que se generan por las tareas planteadas desde los procesos de codificación, decodificación, representación, comunicación y resolución de problemas del objeto matemático parábola como sección cónica desde diferentes registros de representación, deben ocasionar una serie de herramientas metodológicas modernas, debido a que la institución no tiene por cultura académica trabajar sobre las diferentes representaciones desde los ciclos inferiores, por lo que puede ocasionar en primera instancia, incomodidad por el cambio de esquema en las clases, aparte de ello, en los últimos años, el pensamiento geométrico variacional ha estado como en un letargo por parte de la planificación de los planes de área y aula, luego, los análisis y resultados de las intervenciones en el aula y fuera de ella desarrollado en la propuesta, por último, iniciar con una reflexión de los aspectos a mejorar, reforzar o cambiar que fueron trabajos durante todo el proceso de investigación.

Se pretendía que los periodos en los cuales se llevaran a cabo la sistematización serían desde el mes de **octubre del año 2017** hasta que se termine el proceso a principios de **marzo de 2018**, pero por algunos inconvenientes de horario en las clases se ha tenido que ampliar hasta principios del mes de abril.

4.1.5 De cómo surge los momentos de la planificación de la propuesta

Antes de nada debo dejar claro que en mi opinión ocurrieron dos momentos importantes en la experiencia para sistematizar, el primero de ellos tiene relación con la planificación de las actividades propuestas a realizar por parte de los estudiantes, ya que con respecto a la manera de planificar las tareas matemáticas nos estamos exponiendo a nuevos desafíos profesor y estudiante, pero somos nosotros los que tenemos la responsabilidad y la capacidad para plantear propuestas innovadoras, asertivas, dinámicas y con objetivos concretos en lo que queremos propiciar en los estudiantes, las metas, propósitos, los posibles errores, la reflexión de los mismos etcétera, en otras palabras, nos estamos jugando una carta fundamental con las actividades a desarrollarse en el proceso de enseñanza aprendizaje que requiere de todo nuestro esfuerzo para lograr los propósitos a corto y largo plazo. En segundo lugar, los resultados mostrados en la etapa de exploración, me refiero a la puesta en escena que los estudiantes desarrollaron, es decir, la investigación de las tareas, la exposición en grupo, la construcción del concepto del objeto parábola desde el entorno y los posibles errores como punto de partida para seguir en el resto del proceso, en ese orden de ideas puedo dar fe que se cumplieron expectativas planteadas en el inicio de la propuesta.

4.1.6 De los aspectos importantes que surgieron en la experiencia

En primer lugar, uno de los aspectos que facilitó el proceso en el diseño de intervención en la experiencia fue la disposición positiva de los estudiantes para participar en las actividades, por otra parte, la planificación del diseño didáctico, aunque debo confesar que no fue fácil, porque se modificaron las tareas en varias ocasiones a pesar de que se tenía clara la idea desde el principio, es un aspecto muy importante en el oficio de maestro, pero parte de esto tiene que ver con que en la institución educativa no se trabaja con diferentes sistemas de representación para construir el concepto de un objeto matemático, de igual manera los estudiantes están inmersos en una cultura que no se refiere a la importancia por las representación geométricas, pero al mismo tiempo los estudiantes estuvieron muy receptivos a la propuesta pedagógica.

A continuación se expresan algunas acciones que contribuyeron para alcanzar el propósito, como por ejemplo, el contrato académico que se estableció entre los estudiantes y el profesor como participantes de las actividades, estos tiene que ver con el estímulo no solamente visto desde la nota sino también desde el conocimiento que se iba construyendo a través de la realización de las tareas, porque cuando el estudiante nos copia la idea, tenemos un terreno ganado ampliamente, sobre todo por la manera como defendían su investigación en los argumentos, es decir, estuvieron apropiados de la función que les corresponde como estudiantes del siglo XXI, además de las reflexiones creadas por ellos mismos acerca de la evaluación del trabajo en equipo y sobre la importancia de observar avances en la consecución de un propósito en común como era el de construir el concepto de parábola.

4.1.7 De las fuentes información utilizadas

La información de la sistematización inicia con la planeación de tareas matemáticas trabajadas por procesos matemáticos con grado de complejidad progresiva, así mismo se tienen registros de las consultas, investigaciones, material manipulable, fotografías, seguimiento de resultados de las pruebas internas y externas en años anteriores, planes de área y aula antiguos y modificados, etcétera. De igual manera, se puede manifestar que un factor fundamental que influyó para el diseño de la propuesta metodológica, tiene relación con la revisión de la práctica en el aula realizada por los docentes del departamento falta en el área, en cuanto a la manera de trabajar los objetos matemáticos durante años, igualmente de la no renovación constante en los planes de área y aula, de hecho, como se mencionó anteriormente, era poco probable que los estudiantes se enfrentaran a la comprensión de un concepto desde diferentes maneras de representación, lo que ocasionó dificultades para diseñar situaciones de resolución de problemas a la hora de escoger las actividades a realizar durante las clases.

4.1.8 De cómo se llevó a cabo la experiencia

Para empezar, se describen las acciones que pretenden orientar objeto matemático "parábola" como sección cónica en relación con la resolución de problemas, desde el inicio de la construcción del concepto a través de diferentes representaciones, posteriormente dichas acciones darán cuenta del diagnóstico, diseño, exploración, ejecución, estructuración, transferencias, evaluación y reflexión.

4.1.9 Aplicación de la propuesta didáctica

Diseño didáctico para la enseñanza de las secciones cónicas, centrado en la parábola, a través de su modelación en diferentes sistemas de representación.

La propuesta consistió en la aplicación del diseño didáctico para el aprendizaje de la parábola en seis momentos organizados de la siguiente manera.

4.2 MOMENTO 1 "PRIMER ENCUENTRO" - "DIAGNOSTICO"

Para el desarrollo del primer momento, se diseñó y construyó la primera tarea matemática para los grupos 10 - 1 y 10 – 2, en los cuales están los estudiantes focalizados para el proceso de investigación de la propuesta metodológica, con el propósito de tener una excusa para introducir a los estudiantes en el mundo de la sección cónica "parábola", se introdujo una actividad que tuviera que ver con un objeto del entorno conocido y a su vez similar al del objeto matemático, es así como en la tarea darían cuenta de las siguientes preguntas ***¿Cuáles son los elementos relevantes de una antena parabólica? ¿Qué función cumple cada uno de ellos? ¿Por qué las antenas parabólicas se diseñan de esa forma y no de otra?,*** se tomó esa propuesta como iniciativa para romper con el esquema de las clases magistrales, lo anterior indica que los estudiantes estarían construyendo el concepto sin hablar propiamente de él, así mismo, es importante destacar que en la primera tarea el trabajo se realizó de manera grupal pero con un tinte de individual, porque cada estudiante debía estar en capacidad de resolver las inquietudes planteadas con el fin de retroalimentar los procesos de codificación, decodificación, interpretación, traducción y comunicación de características que están inmersas en la parábola como por ejemplo, (vértice, paralelismo, proyección, ángulo, etcétera), que estarán en proceso de evaluación en otros momentos. Por otro lado, en la exposición debían salir al tablero sin ningún apunte que sesgara la consulta, la dinámica se llevó a cabo con dos grupos expositores al mismo tiempo, los demás estudiantes se encontraban en otros lugares sin observar inicialmente lo que realizaban los otros para que cada grupo tuviera la necesidad de crear su exposición sin tener que partir de lo que otros habían realizado. Para el desarrollo de la tarea los estudiantes utilizaron material tecnológico que existe en la institución en horas de clase, (ver figura 14) y (ver figura 15)

Figura 14. Inicio de la prueba diagnóstica

Fuente: Elaboración propia

Figura 15. Las tabletas como recurso de consultas

Fuente: Elaboración propia

4.2.1 Momento 2 “exploración de un tipo de tareas”

Es la puesta en escena de mayor fundamento de la investigación para la construcción del concepto del objeto matemático parábola, porque contiene la mayor cantidad de actividades y requieren de mucha creatividad académica en su producción, además, están en juego la mayoría de las representaciones que se trabajaran desde la modelación, así mismo, cabe anotar que el papel del docente no es el de impartir juicios de lo que está correcto o no, es decir, su misión será la de observación y la toma de datos del desarrollo de las actividades para posteriormente institucionalizar el concepto con la ayuda de toda la secuencia procesada en el aula.

Los estudiantes debían construir el concepto, utilizando herramientas físicas de cualquier material para trabajar desde las diferentes representaciones a través de la modelación, así mismo, debían colocar en práctica con sus compañeros lo aprendido en sus consultas e investigaciones, esto es, tenían que compartir una actividad realizada por ellos, con el grupo en donde se mostrara la validez de los resultados de formación en la construcción del concepto del objeto, sin que el docente avaluará de manera correcta o incorrecta dicha actividad.

Estas actividades fueron:

- Explicar la forma gráfica de la parábola como sección cónica desde el corte de un cono.
- Relacionar la forma gráfica de una parábola con algunos objetos del entorno, para responder ¿Por qué se diseñan de esa forma?
- Representar la forma de una parábola por medio de métodos y trazados, utilizando el compás, regla o escuadra, (se deben señalar sus partes).
- Representación gráfica de la parábola con el método doblando papel.

Además de responder a las siguientes preguntas, para relacionar el momento 1 y 2

¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola?

¿Qué similitud encuentra entre algunas características de la parábola con algunos elementos fundamentales de las antenas parabólicas en cuanto a su diseño?

¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola que utiliza la antena parabólica para su funcionamiento?

Los procesos matemáticos que los estudiantes debían experimentar en el momento 2, estaban relacionados con el anterior, pero es claro que están con grados de complejidad superior, ya que, deberían movilizar procesos como, razonar, argumentar, representar, y comunicar sobre el objeto en estudio, de hecho, el rastreo que se realizó sobre las preguntas en la tarea, deberían dar cuenta de la importancia de las mismas para poder argumentar con un enfoque de análisis exhaustivo. Todo ello conduce de manera asertiva, a la construcción del concepto del objeto matemático parábola, y sin la necesidad que los estudiantes imaginaran que detrás de todo ese análisis había un propósito de comprensión del objeto, además se pretendía transferir la terminología desde el lenguaje del entorno al matemático y viceversa, para lograr un lenguaje común entre los estudiantes. Una decisión importante que experimentaban los estudiantes en este momento, fue la de definir los materiales para las representaciones de la parábola en realización de los puentes colgantes, o las lámparas para explicar la ubicación del bombillo, fue evidente que la comunicación del lenguaje matemático iniciaba de manera progresiva y contundente.

4.2.2 Momento 3 “construcción del entorno tecnológico - teórico”

Conviene subrayar en primer lugar que el grado de motivación de los estudiantes por la construcción del concepto del objeto matemático debería ser cada vez mayor, la estrategia de trabajar en grupos funcionaría de tal manera que se dividieran los roles, en donde cada integrante tendría voz y voto en la participación global en la construcción, por otro lado, este momento es fundamental para obtener la institucionalización del concepto matemático en momentos posteriores, es decir, de aquí depende que el resto de los momentos tengan la base de la construcción del conocimiento del objeto y la interpretación del mismo, debido a que las actividades planificadas contienen grados de complejidad aun mayor que todos los anteriores pero partiendo de la misma base de las representaciones. Esta práctica pretendió retomar las expresiones algebraicas de acuerdo a una característica en particular, para contribuir a la conversión de otros sistemas de representación, como por ejemplo el hecho de representar la gráfica correspondiente a la ecuación con eje de simetría en el eje X o Y ubicadas sobre el origen únicamente, al mismo tiempo, se aprovechó para retomar del momento uno el concepto de espejo, reflexión, despeje, y vértice.

4.2.3 Momento 4 “el trabajo de la técnica”

Con la información obtenida de los momentos anteriores, se pudo ingresar sin dificultad en el momento 4, porque existe una relación entre los mismos, es decir, las diferentes representaciones del objeto parábola realizadas anteriormente, son la base necesaria para poder iniciar parte de la institucionalización del concepto. En el devenir de las actividades propuestas se originaron herramientas que permitirían relacionar las características de la parábola con la parte algebraica, la actividad consistió en señalar las partes del objeto halladas mediante las formulas correspondientes, para este momento se trabajó con la ecuación del eje focal paralelo a los dos ejes, por otro lado, analizar otras características nuevas ocasionadas por otro sistema de representación como la combinación de la conversión de lo numérico con lo gráfico. La actividad permitía la retroalimentación de conceptos expuestos anteriormente, en este punto, los estudiantes debían relacionar el objeto matemático con el entorno, para comprender el funcionamiento de algunos elementos como las antenas parabólicas, puentes, las farolas, etcétera, que en el transcurrir de nuestras ocupaciones de la vida cotidiana en muchas ocasiones se pasan por alto.

Al mismo tiempo, este momento se encargó de mostrar otra faceta de resolución de gráficas por medio de las TIC, como otra manera de representar la gráfica de una parábola, en la cual los estudiantes encargados debían manipular el programa GEOGEBRA para trabajar con los demás compañeros del salón, en una actividad planeada por el profesor, para poder tener una apreciación de las ventajas que puede tener trabajar con otro tipo de tecnología.

4.2.4 Momento 5 “institucionalización”

En primer lugar, antes de abordar este momento, fue conveniente que el docente realizara la retroalimentación de los momentos anteriores, con el objetivo de lograr la caracterización de manera más cercana al concepto en estudio, porque en esta etapa la tarea estaba relacionada con el desarrollo de ejercicios compuestos por el lenguaje natural (entorno), el algebraico y el gráfico, elementos que a través de los tiempos han causado mayores dificultades en la resolución de problemas matemáticos de cualquier objeto cuando se trabajan de forma compuesta, los estudiantes debían consultar sobre ejercicios con características similares a la combinación de los sistemas de representación antes mencionados, realizarlos y posteriormente trabajarlos en clase con los demás compañeros, para reconocer las diferentes maneras de resolución, emanadas de la conversión y tratamiento de las diferentes expresiones, es decir, de un lenguaje a otro. Uno de los objetivos era trabajar los procesos de interpretación, comunicación y resolución de problemas. La participación del docente debería darse en términos de consolidación del conocimiento construido por medio de la comunidad educativa.

4.2.5 Momento 6 “evaluación

Con el fin de indagar sobre los avances en la comprensión del conocimiento del objeto matemático parábola, surgió el momento de la evaluación y reflexión sobre todos los momentos anteriores a este, la actividad consistía en lograr resolver de manera asertiva algunos problemas que presentan las pruebas externas como el ICFES, analizando la representación desde lo algebraico hacia lo gráfico y enfatizando el tratamiento desde lo gráfico a lo algebraico en situaciones de la vida cotidiana y con el objeto trabajado con enfoques situados en otras áreas del conocimiento, como las ciencias sociales, las naturales, entre otras, la actividad consistía no solamente en dar la respuesta, si no que había que argumentarla, tomando como base las actividades planteadas en los momentos anteriores a este.

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS DEL DISEÑO DIDÁCTICO

El ejercicio de análisis del diseño didáctico permitió establecer de manera general, el balance cualitativo de los resultados obtenidos por los estudiantes luego de la intervención en el aula, con relación al pensamiento espacial y variacional en el área de las matemáticas, así mismo, de aciertos y dificultades que se presentaron en el proceso de aprendizaje en el devenir de las actividades. La ejecución de la propuesta pedagógica, dará cuenta de los aportes de los estudiantes en la articulación en base a la resolución de problemas con la modelación de diferentes sistemas de representación para el tratamiento de la parábola como sección cónica.

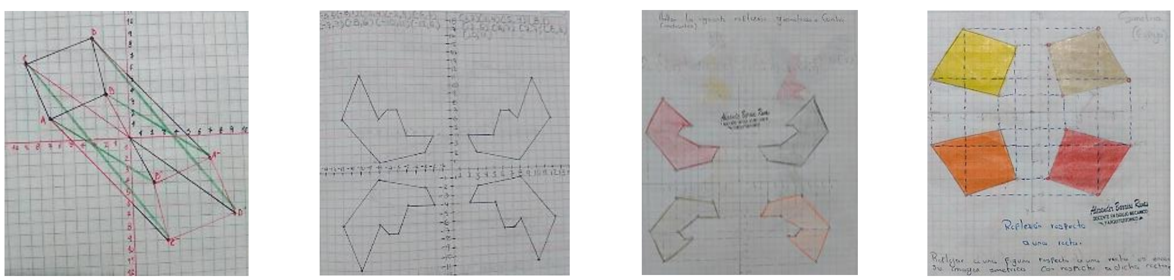
Para cumplir con los objetivos propuestos en el diseño didáctico, se orientaron aspectos centrados en la resolución de problemas del objeto parábola, con el aporte de algunos autores como; D'Amore, Duval y Brousseau. Además, se desarrollaron actividades con base en la (TAD) la teoría antropológica de lo didáctico de Chevallard, igualmente la resolución de problemas investigadas por Shoenfeld, por otro lado, de los referentes teóricos para la contribución al desarrollo de la competencia representar, de igual manera Análisis del primer momento "primer encuentro" diagnóstico.

5. 1 ANÁLISIS DE PRIMER MOMENTO "PRIMER ENCUENTRO" DIAGNÓSTICO

En el desarrollo de la primera tarea, se pudo evidenciar que hubo gran compromiso por resolver las inquietudes, sobre todo por los argumentos expuestos durante la defensa de lo que se había consultado, destaco la manera como distribuyeron los roles en esta actividad, porque unos tenían la tarea de explicar los elementos, otros de respaldar con otras explicaciones, otros de dibujar en el tablero, otros relacionaban las características en relación con lo escrito y lo graficado, considero que en los datos de la consulta se podrían presentar elementos que a la postre no tenían relación con el objeto matemático, pero la introducción al diagnóstico estaba en proceso de desarrollo.

Con un ejercicio de baja complejidad, se inició la puesta en escena del cumplimento de los objeticos planteados en el trabajo de investigación, es por ello que la primera tarea evidenció el desempeño favorable de todos los estudiantes en cuanto al reconocimiento de algunos pre saberes, como la representación de coordenadas cartesianas, posteriormente realizaron figuras con el propósito de mostrar la reflexión, rotación y traslación sobre los ejes. Se pudo apreciar, que los implicados relacionaron de manera asertiva el lenguaje simbólico con el lenguaje matemático en características que se utilizaron en la resolución de otras tareas. (ver figura 16), (a), (b), (c) y (d).

Figura 16. Transformaciones en el plano. (a) Rotaciones (b) Reflexión sobre ejes (c) desplazar sobre los ejes (d) Simetría sobre el eje X

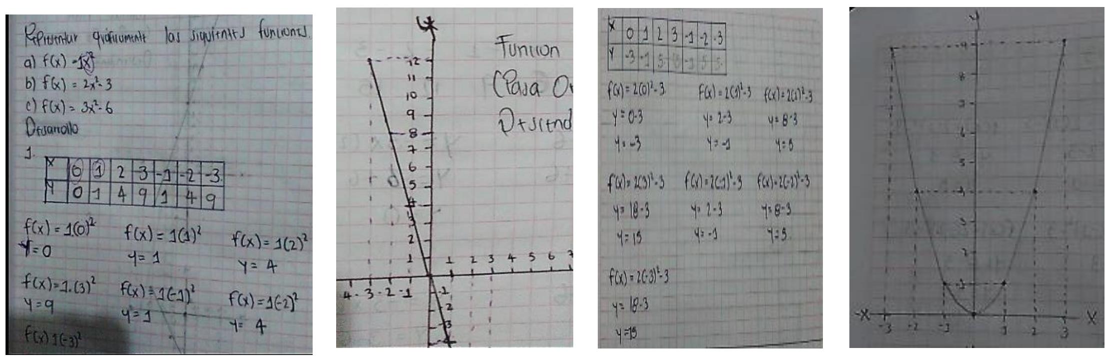


(a) (b) (c) (d)

Fuente: Elaboración de estudiantes

Por otra parte, se resolvieron ejercicios sobre la relación entre la ecuación, el tabulado y la gráfica para representar la función lineal y la función cuadrática que sirvió como introducción al proceso de conversión y de representación del objeto matemático. En esta práctica, se evidenció en un principio dificultades para conceptuar sobre la forma creciente y decreciente de las funciones, además se asumió en la gran mayoría de los estudiantes, que la función pasaba por el origen, lo cual permitió introducir ejercicios para trabajar la traslación y rotación de figuras sobre el plano, por el contrario, hubo gran acierto en el manejo de operaciones porque generalmente están acostumbrados a ellas, (ver figura 17), (a) y (c),(b),(d).

Figura 17 Registros de estudiantes*. (a) y (c) S***olución del proceso de ecuación algebraica y Tabulado***,* **(b) Conversión a la gráfica de la función lineal y** (d) **Conversión a la gráfica de la función cuadrática**

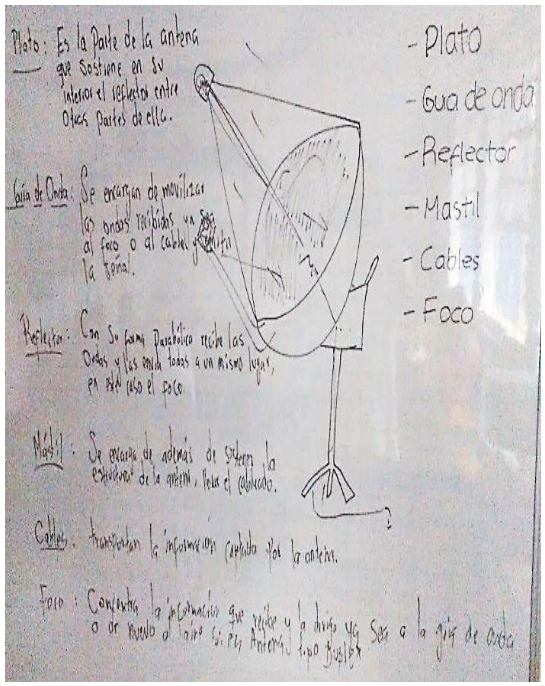


(a) (b) (c) (d)

Fuente: Elaboración de estudiantes

La parte relevante del primer momento, hace referencia a la propuesta de introducción al objeto matemático parábola, a través de las preguntas *¿Cuáles son los elementos relevantes de una antena parabólica? ¿Qué función cumple cada uno de ellos? ¿Por qué las antenas parabólicas se diseñan de esa forma y no de otra?,* Ésta puesta en escena, marcó el inicio del acercamiento a la construcción del concepto del objeto matemático parábola, porque se pudo evidenciar el manejo del lenguaje matematico expresado por los estudiantes en las intervenciones de las expociciones, acotando, que en ningun momento se habló propiamente del objeto, es decir, esta práctica permitió a los estudiantes encontrar similitud en algunos elementos, que tienen las antenas parabólicas y de algunas características del objeto en estudio como por ejemplo eje de reflexión, foco, y proyección los resultados fueron muy buenos en un 90% sobre todo porque se rompió con el esquema tradicional de iniciar la construcción de un concepto sobre un objeto matemático. Fue un acierto relacionar el objeto matemático con un elemento del entorno, de hecho se escucharon argumentos como, “según lo que yo investigue la antena se construye de esa forma porque facilita las transmisiones de radio y televisión” Ricardo Núñez, en otras palabras, se inició una apropiación del lenguaje simbólico y matemático como manifiesta el autor D’ Amore (2006). Para analizar los aportes de la primera tarea matemática (ver figura 18)

Figura 18. Exposición sobre la utilidad e importancia de los elementos de una antena parabólica.

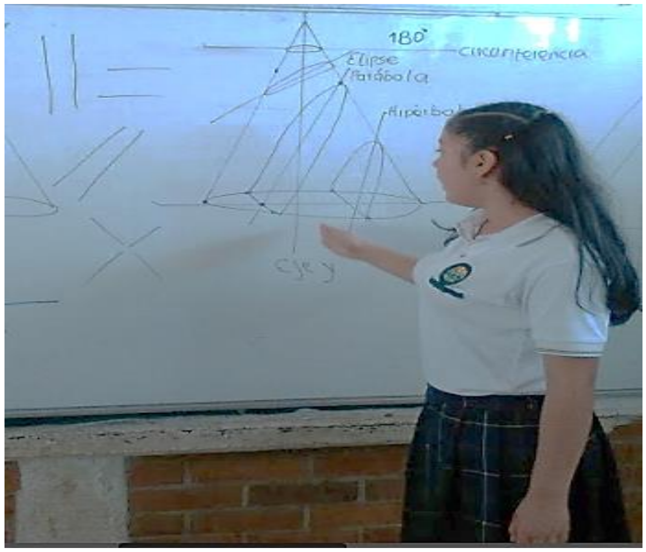


Fuente: Elaboración de estudiantes

5.1.1 Análisis del segundo momento “exploración de un tipo de tareas”

Señalado como un momento fundamental de la sistematización, debido a que fue la mayor contribución en la modelación de diferentes tipos de representaciones para el tratamiento de la parábola como sección cónica, por tanto, fue la tarea más compleja de diseñar, sin embargo, se elaboró la estructura didáctica que dio sentido y relación del objeto en estudio con el entorno. En el análisis del corte de un cono como primera actividad, se evidenció la construcción del origen de la parábola como sección cónica desde la posición de corte entre dos planos realizada por las averiguaciones de Laura Buendía (estudiante focal), quien decidió utilizar el tablero con mucha propiedad en el análisis de la formación del objeto. El manejo del lenguaje matemático estuvo presente durante la exposición, fue contundente en la explicación de la diferencia entre cada objeto que se originaba en cada corte, el reconocimiento del grupo fue notable, (ver Figura 19a). Por otro lado, otra estudiante Karina Rivas tomo plastilina y una regla como material para realizar los cortes y explicar la razón de cada uno, esta actividad fue sin duda el inicio categórico para la comprensión de la parábola (Figura 19b).

Figura 19. Exposición sobre la formación de las secciones cónicas a través del corte de un cono, (a) sobre el tablero y (b) con material manipulable.



(a)

Fuente: Elaboración de estudiantes

(b)

Fuente: Elaboración de estudiantes

Otra actividad que se llevó a cabo fue la realización de un puente vehicular, en ella se mostró la importancia de la curva de la parábola como función de amarre con la estructura de columnas como soporte del puente, a propósito del accidente del puente colgante Chira jara en la autopista al llano entre Bogotá y Villavicencio, la coincidencia fue grande, pero la intención de la práctica fue resaltar el papel fundamental que cumple la curva de la parábola en ese tipo de estructura, asumiendo un posible fallo de ese u otro puente. De hecho, causo impacto en los estudiantes debido a que relacionaron el mal cálculo de las matemáticas en estructuras físicas, como también la respuesta de la pregunta eterna del ¿para qué estudio esto?. (ver figura 20).

Figura 20. Exposición sobre la importancia que tiene la parábola con aplicaciones del entorno (puente colgante)

Fuente: Elaboración de estudiantes

Así mismo, la experiencia relevante que se tuvo sobre la explicación de la ubicación del bombillo dentro de una lámpara o farola con forma de parábola realizada inicialmente por Anturi Mirley, quien demostró poca preparación al respecto, pero que fue retomada en el mismo momento por Laura Buendía, en este punto debo expresar que mi intervención como maestro no se dio, fue una decisión de la estudiante, la cual tomo la linterna y explicó de manera precisa sobre la ubicación y función del bombillo y la importancia del porqué el diseño de la linterna relacionada con la forma curva de la parábola, en otras palabras, la estudiante relaciono la posición del bombillo con el foco. (ver figura 21).

Figura 21. Exposición sobre cómo están ubicadas algunas de las partes de la parábola y la similitud en relación con la función que cumplen algunos elementos de una linterna como por ejemplo el bombillo.

Fuente: Elaboración de estudiantes

Sin duda que las actividades fueron subiendo el nivel en la medida que se fueron desarrollando, se resalta que en las actividades como la del bombillo explicada también por Jimmy Ramírez, la representación de la forma de la parábola por medio de métodos y trazados, utilizando el compás y regla, así como también el método doblando papel, que tuvieron como responsables a los estudiantes Lisseth Anturi, Dayana Viveros y Arenas, coincidieron con hacer énfasis en la ubicación de algunas características y partes de la parábola. Jimmy Ramírez expresó “el bombillo es el foco de luz que ilumina un espacio determinado por medio de las líneas de proyección”, Laura Buendía manifestó “el vértice es el punto donde comienza la base de la linterna”, por su parte Johan Arenas grupo focal explicó, que “en el proceso de doblar el papel se genera la curva de la parábola y la ubicación del foco, expresó también “si se sigue la secuencia del dobles, se evidencia que la distancia entre el vértice y el foco es semejante con la distancia de la directriz”, Lisseth y Dayana enfatizaron en la curvatura, el lado recto y la directriz como respuesta a las preguntas *¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola? ¿Qué similitud se encuentra entre algunas características de la parábola con algunos elementos fundamentales de las antenas parabólicas en cuanto a su diseño?¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola que utiliza la antena parabólica para su funcionamiento,* estas tareas involucraron los dos primeros momentos dando relevancia a lo que el autor Duval (1999) define como expresión, comunicación y transformación de representaciones semióticas en actividades cognitivas de formación. Para comprender la secuencia de la formación de la parábola en el proceso de doblado del papel, (ver figura 22).

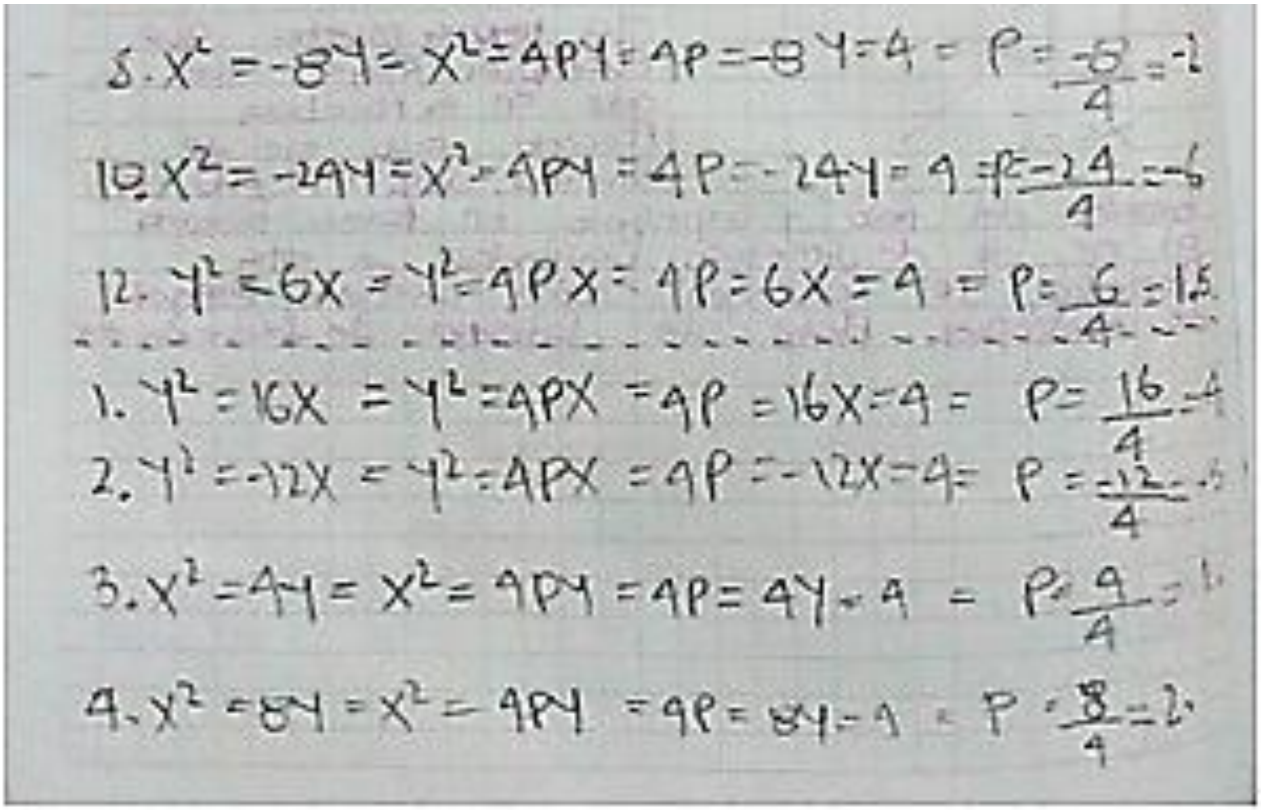
Figura 22. Actividad sobre la construcción de la parábola y algunas de sus características en el proceso de doblado del papel.

Fuente: Elaboración de estudiantes

5.1.2 Momento 3 “construcción del entorno tecnológico - teórico”

Para este momento los estudiantes contaron con la experiencia de haberse enfrentado a diferentes procesos de formación del objeto matemático, aparecieron las ecuaciones definidas que fueron desarrolladas con algunos obstáculos, se trabajó sobre el registro algebraico al gráfico y viceversa, se pudo evidenciar que los conceptos de simetría, vértice, eje focal, directriz y foco no presentaron inconvenientes, sin embargo, el lado recto presentó dificultades debido a que en las características de la parábola mencionadas anteriormente, no hubo claridad al respecto, esto ocasionó que algunos estudiantes no pudieran representar la gráfica de las ecuaciones sobre el eje Y, (ver figura 23.).

Figura 23. Resolución de ejercicios de la ecuación de una parábola sin la conversión al registro gráfico.



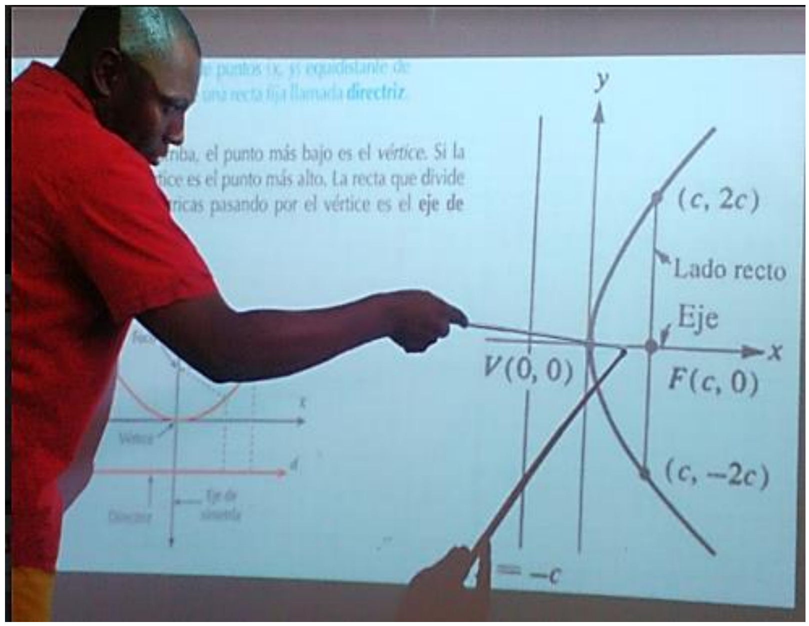
Fuente: Elaboración de estudiantes

Fue evidente que la parte del lado recto, no se comprendió en toda su extensión, en otras palabas pudo haber ocurrido lo que el autor Brousseau en relación con las situaciones de formulación manifiesta que se debe contrastar la comunicación de sensaciones en la construcción de aprendizaje.

5.1.3 Análisis del Momento 4 “el trabajo de la técnica”

De lo anterior se dedujo que existieron algunas contradicciones de los estudiantes en relación con la parte del lado recto en una parábola, en consecuencia y tomando como referente nuevamente al autor Brousseau en las situaciones de validación, permitieron la interacción del docente para dar claridad sobre ese u otro elemento que pudo haber quedado sin la retroalimentación necesaria para utilizarlo dentro del esquema del objeto en estudio (ver figura 24.).

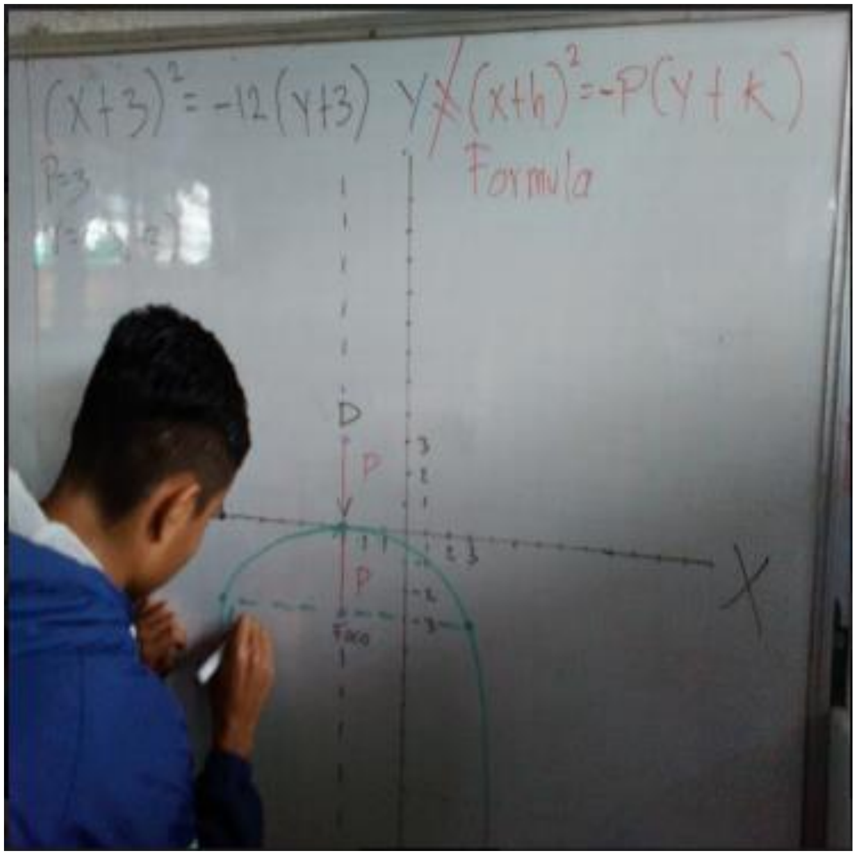
Figura 24 Retroalimentación de características de la parábola como sección cónica.



Fuente: Elaboración de estudiantes

Posteriormente, se continuó con lo planeado en la tarea, se retomó las ecuaciones estándar de una parábola con vértice en el origen y se trabajaron también cuando el vértice (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x. (ver figura 25.).

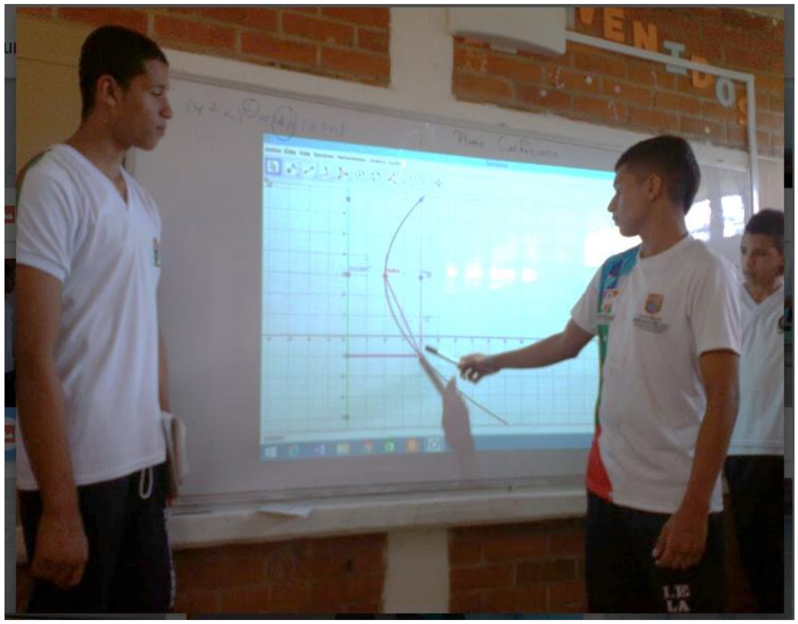
Figura 25. Resolución de ejercicios de la ecuación de una parábola y la conversión del registro gráfico al algebraico.



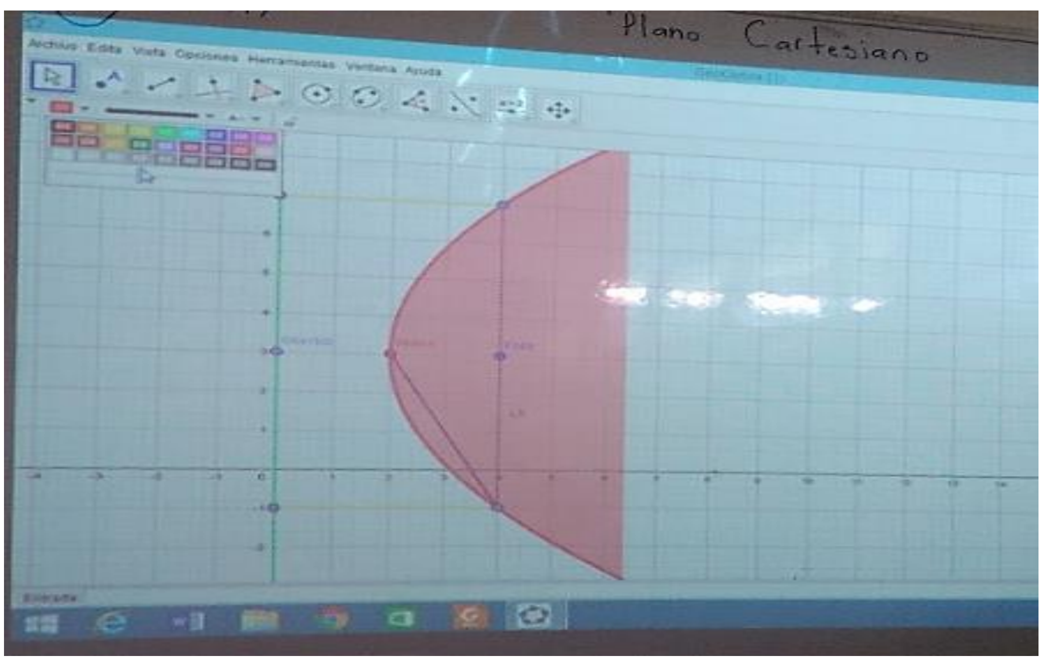
Fuente: Elaboración propia

Por otra parte debo resaltar que el momento 4 tuvo la pertinencia de trabajar con las TIC, los estudiantes capacitados para manejar TIT@ en la institución educativa, tuvieron como tarea la representación gráfica de la parábola a través de la herramienta Geogebra, utilizando las ecuaciones antes mencionadas, la expectativa fue grande, porque pasamos de la escuadra, el lápiz, y el trabajo a pulso, a utilizar una herramienta muy útil para graficar esta serie de imágenes. Tuvimos muchas dificultades en esta etapa debido a que el programa no estaba instalado en las tabletas, por otro lado, la institución no contó con los docentes completos para trabajar las asignaturas iniciando el año lectivo, lo que ocasiono que los grupos focales no tuvieran clase durante algunos días. Pese a ello, los resultados fueron satisfactorios y los avances por construir el concepto del objeto matemático siguieron su curso normal. Ricardo Núñez del grupo focal expreso, “esa es la gráfica correspondiente a la ecuación matemática de acuerdo con lo que yo investigué”, Cristian Ramírez (grupo focal) se encargó de manera efectiva de movilizar la practica con el resto del curso (ver figura 26) (a) y (b) y (ver figura 27).

Figura 26. Representación de la parábola en registro algebraico y gráfico, utilizando GEOGEBRA como sistema dinámico.



(a)



(b)

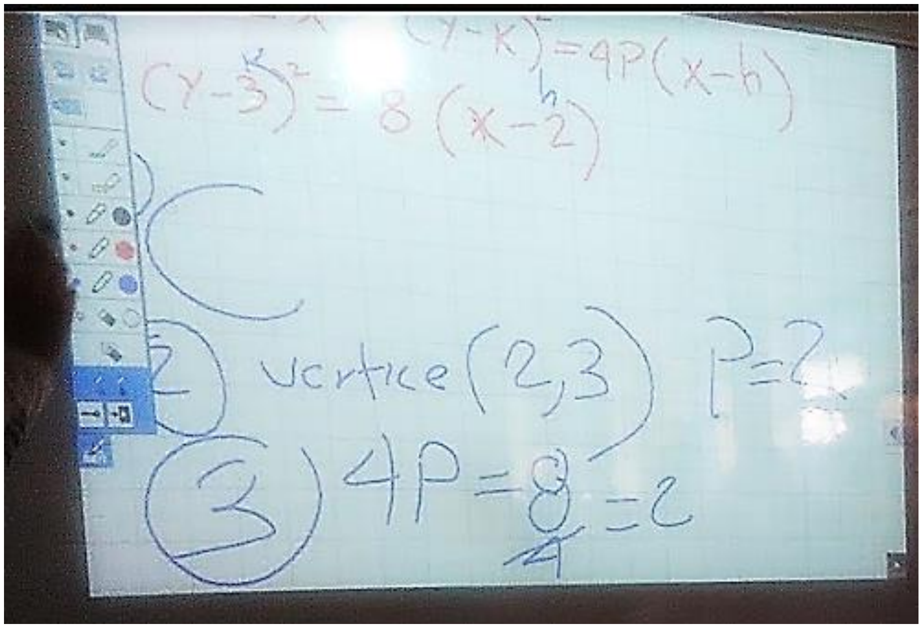
Fuente: Elaboración de estudiantes

Figura 27. Actividad práctica del grupo manejando las tabletas de la institución, utilizando GEOGEBRA como sistema dinámico.

Fuente: Elaboración de estudiantes

No ocurrió así con el trabajo presentado por Juan Pablo Martinez, el cual tuvo dificultades para colocar la función en el comando de la plataforma GEOGEBRA, decidió trabajar sin la ecuación simulando el trabajo que se practica en forma tradicional. (ver figura 28).

Figura 28. Dificultad que se presentó para la actividad de manejar el sistema dinámico Geogebra con las tabletas.



Fuente: Elaboración de estudiantes

5.1.4 Análisis del Momento 5 “institucionalización”

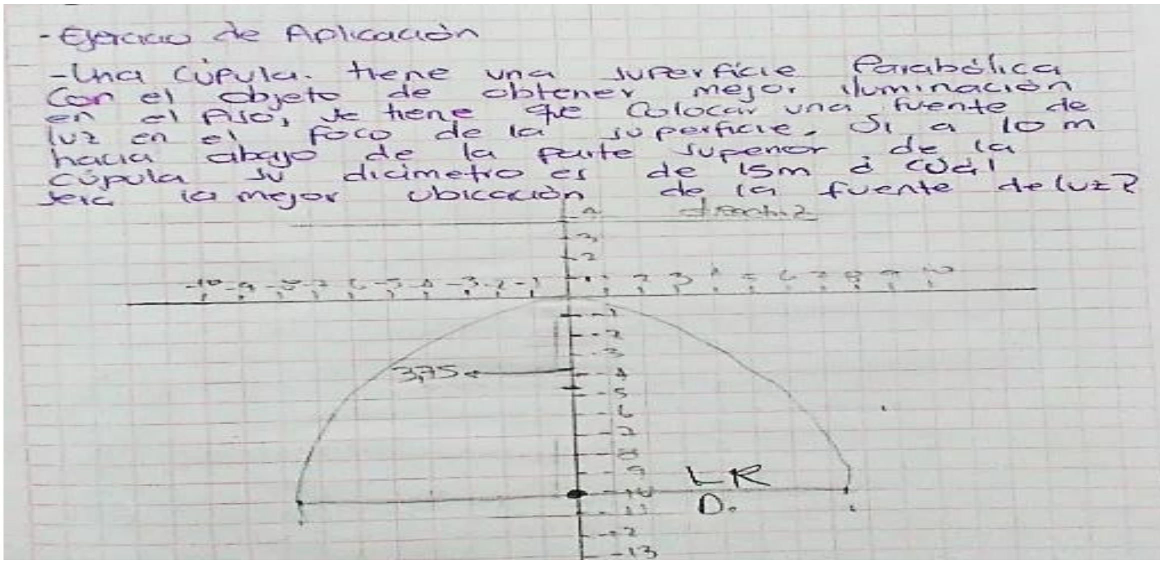
La tarea de este momento tuvo como responsabilidad, no solamente la manipulación del objeto matemático en términos de modelación y representación, también tuvo como consecuencia, que los estudiantes resolvieran problemas de la parábola con situaciones cotidianas, en las cuales se relacionaron casos concretos, como por ejemplo encontrar la distancia adecuada para ubicar un bombillo en una linterna, o responder preguntas como ¿cuántos metros de altura debe saltar un clavadista en una piscina para lograr la menor cantidad de agua salpicada por el salto?.

Se pudo evidenciar el manejo del lenguaje matemático del estudiante focal Esteban Sabogal en comunicación con el lenguaje natural, sus conocimientos se basaron en nombrar cada característica de la parábola en relación con el ejercicio, utilizo las ecuaciones adecuas para el recorrido de la resolución del problema con mucha propiedad, comprendió el contexto de la situación y la compartió con sus pares. (ver figura 29.) (a) y (b).

Otra evidencia acertada, fue trabajar el objeto en otras ciencias del conocimiento. Sobre la solución de problemas, se observó que cuando el estudiante tiene suficientes herramientas de trabajo, los temores a equivocarse son menores, Camila Bermúdez relacionó un problema de movimiento parabólico del lanzamiento de un balón con los elementos de la parábola y las ecuaciones de altura máxima, tiempo, ángulo de tiro y distancia sobre el eje X.

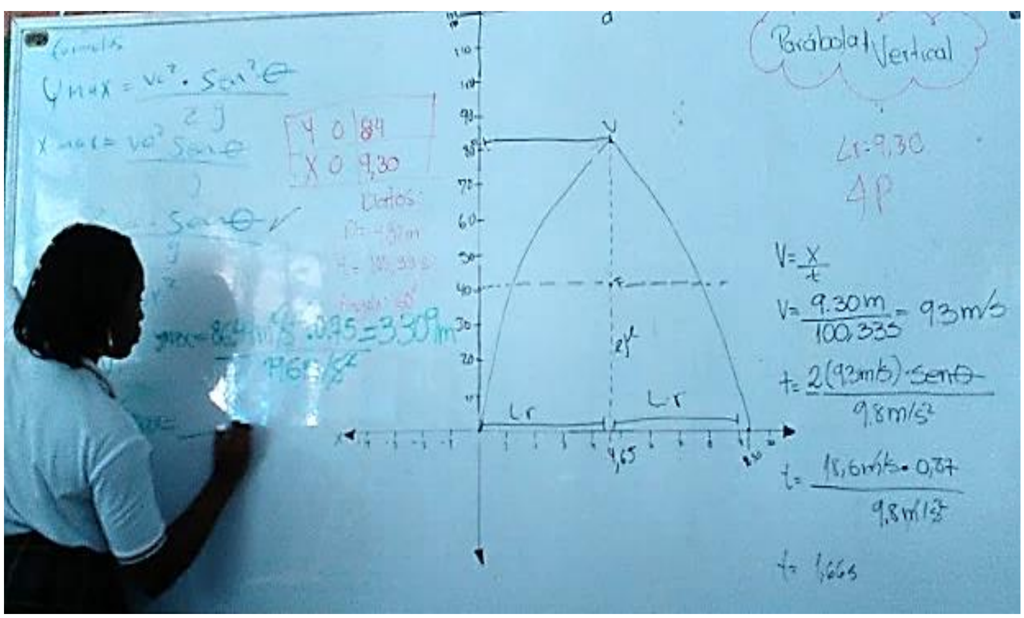
Las discusiones que se escucharon en el salón sobre el desarrollo de la resolución de problemas, evidenciaron que los estudiantes manejaron un lenguaje adecuado para cada elemento del problema en la consolidación de elementos aprendidos en la praxis, como lo manifiesta Chevallard (1999), la participación del docente fue clave para hacer parte de la construcción en la solución de la situación planteada.

Figura 29. Resolución de problemas centrados en la parábola en relación con otras áreas del conocimiento.



(a)

Fuente: Elaboración de estudiantes



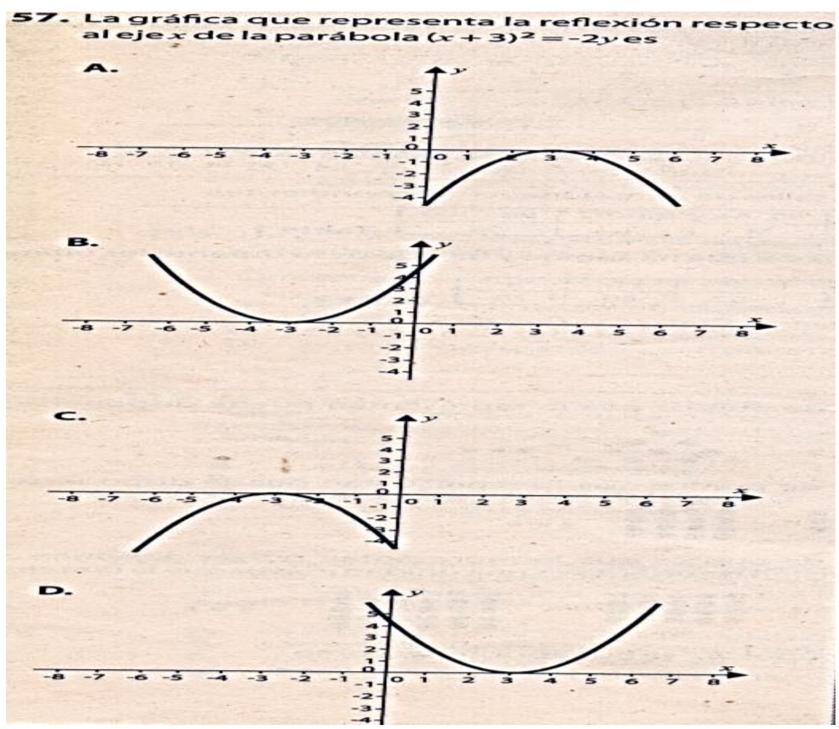
(b)

Fuente: Elaboración de estudiantes

5.1.5 Análisis del Momento 6 “evaluación

En este momento, se presentaron evaluaciones tipo Pruebas Saber, en donde los estudiantes movilizaron saberes para poner en conversación todas las herramientas, conceptos y experiencias adquiridas desde el inicio de las tareas, al enfrentarse a las situaciones problema, manifestaron en su gran mayoría que haber trabajado en la construcción del objeto, les permitió enfrentar las preguntas con mayor seguridad. Ésta actividad la resolvieron escogiendo la respuesta que para ellos era la indicada, y al mismo tiempo dieron cuenta del porqué de la respuesta. La actividad se tomó de esa forma porque me intereso saber la manera de argumentación después de la interacción con la propuesta de diseño, en este caso muy pocos estudiantes se negaron a contestar de manera argumentativa. Al menos dos de cada tres estudiantes responden acertadamente a preguntas tipo pruebas saber en el área de matemáticas y otras áreas del conocimiento. (ver figura 30.)

Figura 30. Resolución de problemas centrados en la parábola en relación con otras áreas del conocimiento, tipo pruebas saber.



Fuente: Pruebas saber

Prueba diagnóstica por evaluadores externos a la institución, luego de terminar el desarrollo de la investigación

1. ¿Usted qué entiende por parábola?
2. ¿Los conceptos de parábola y cónicas están relacionados?
3. Dibuje una parábola y señale cada una de sus partes.
4. ¿Conoce usted la ecuación de la parábola? Sí ___ No ____
5. Si sabe la ecuación de la parábola, escríbala.
6. Si se genera un cono y éste es cortado por diferentes planos, ¿qué generan estos cortes?
7. ¿Conoce otro tipo de cónicas? Si __, No ___. Si dijo sí, diga cuáles.
8. ¿En qué campos ha visto usted una parábola?

Fuente: Estudiantes de licenciatura en Matemáticas y física Univalle

En la siguiente tabla se muestran resultados de la prueba

	preguntas										
estudiante No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total	porcentaje
1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	5	55,6
2	1	0	1	1	0	0	0	1	0	4	44,4
3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	4	44,4
4	1	1	1	1	0	0	0	1	0	5	55,6
5	1	1	1	0	1	1	0	1	0	6	66,7
6	0	1	1	1	1	1	0	1	1	7	77,8
7	1	0	1	1	1	1	0	1	0	6	66,7
8	0	1	1	1	1	0	1	1	1	7	77,8
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	100,0
10	1	0	1	1	1	1	1	1	1	8	88,9
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	100,0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8	88,9
13	1	1	1	0	0	0	0	1	1	5	55,6
14	0	1	1	0	1	1	0	1	1	6	66,7
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	100,0
16	1	0	1	1	1	1	0	1	0	6	66,7
17	1	0	1	0	0	1	0	1	1	5	55,6
total	14	12	17	12	11	11	6	17	9		

media	6,4
Desviacion tipica	1,69774938
CV	26,47866

6. CONCLUSIONES

1. Primera intervención en el aula: a través de la prueba diagnóstica se pudo evidenciar que la gran mayoría de los estudiantes, no manejaron símbolos geométricos ni el lenguaje matemático propios del tema, para referirse a los elementos que componen una gráfica ubicada con coordenadas sobre el plano cartesiano, pocos relacionaron la palabra vértice con un punto en común, para la rotación de figuras, fue necesario trabajar nuevamente los nombres de los cuadrantes, así como el giro positivo o negativo de los ángulos, algunos confundieron los ejes coordenados, otros no recordaban los conceptos de ascendente o descendente, lo anterior, causó preocupación en el aula debido a que las bases estaban débiles, sobre todo, la preocupación del maestro, porque muchos de estos elementos tienen relación con el objeto en estudio, por el contrario, lo que se puede destacar fue que hubo la motivación suficiente por trabajar la retroalimentación de nociones olvidadas o no interiorizadas de manera asertiva.

2. En la segunda intervención, se muestra un avance notorio en el desarrollo de las tareas, en primer lugar, porque la forma de abordar la situación didáctica se dió a manera de consulta en el salón de clase, lo cual permite que los estudiantes interactúen de forma inmediata, además, el aporte del diseño de la propuesta fue trabajar sin la presión de saber para qué de la consulta, de hecho, no se trabajó con el objeto matemático en sí, se introdujo entonces un elemento similar que subyace en el entorno y que los estudiantes manipulan a diario como lo son las antenas parabólicas, los estudiantes se identificaron con los compromisos de las tareas, es así como el devenir de

las mismas evidenciaron situaciones como por ejemplo, en esta actividad algunos de los estudiantes que poco participan en clase, resultaron exponiendo con propiedad, respetando sus limitaciones pero aportando como actores principales a la construcción del concepto del objeto en estudio.

3. Se evidenció un cambio en la manera de asumir las mismas, es allí donde la propuesta toma importancia, porque se incluye una práctica que los estudiantes no tenían como costumbre académica, como fueron las diferentes maneras de representar un objeto matemático por medio de varios registros. Por costumbre tenían preguntar por los materiales, los esquemas de trabajo y demás, para estas actividades, lo que se sugirió, fue tener toda la autonomía posible para desarrollar las prácticas, de hecho, ocurrió que varios estudiantes modificaran la forma de presentar sus trabajos, es decir, este estilo le dio mayor creatividad a las presentaciones, y se notó el esfuerzo, por mejorar lo que los compañeros habían presentado anteriormente.
4. La creatividad para representar el objeto en distintos contextos fue fundamental, así mismo de la autonomía que se evidenció para escoger los elementos para la representación del objeto en estudio, se expusieron las ideas de manera clara de acuerdo a lo investigado, utilizando argumentos con lenguaje común para todos los participantes de la intervención.

5. La propuesta metodológica, logro transformar la manera de diseñar las tareas para los estudiantes por parte del maestro, evidenciando un enfoque creativo, participativo y emotivo, hecho que fue un factor que prevaleció en todo el proceso de ejecución de la propuesta, orquestado por la evidencia de las mejoras en los desempeños de las tareas realizadas por los estudiantes. Y los estudiantes pudieron experimentar situaciones a las cuales no estaban acostumbrados, se logró la apropiación del lenguaje matemático, la comunicación entre pares y la resolución de problemas como objetivo propuesto en el inicio de las actividades.

7. RECOMENDACIONES

1. Fomentar el uso frecuente de algunos sistemas de representación con base a la resolución de problemas, como mediadores desde el registro grafico al algebraico y viceversa, en el tratamiento de la parábola como sección cónica, debería ser una acción que los maestros deben implementar, porque los resultaos lo avalan en esta propuesta metodológica, de igual manera se deben diseñar planes de aula que permitan tener participación verdaderamente activa desde la construcción del concepto del objeto a trabajar como de la utilidad que tenga en el entorno que rodea.

2. La incorporación de las herramientas virtuales, fue de vital importancia, debido a que los procesos se realizan a velocidades mayores que con el sistema tradicional, por tanto, si en la institución existen los recursos para utilizarlos, se deben educar a los estudiantes con las nuevas propuestas como ayudas metodológicas para mantener a la altura de enseñanzas educativas actuales.

3. Diseñar propuestas académicas que generen curiosidad, motivación de construcción del concepto de los objetos matemáticos en relación con el entorno para generar mejores resultados académicos.

BIBLIOGRAFÍA

Alfa 10 con estándares, serie de matemáticas para educación secundaria y media.

Alfa 8 con estándares, serie de matemáticas para educación secundaria y media.

Artique, M. (2007, julio). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. Conferencia Internacional de educación matemática, Querétaro, México. Ostensifs et non - ostensifs dans.

Brousseau, G. (1986) Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemáticas, universidad nacional de córdoba.

Chevallard, Y. (1994). Ostensifs et non-ostensifs dans I´activité mathematique. Intervention au seminaire de IÁssociazione Mathesis. Texte parudans les actes du seminaire pour Iannéet.

Chevallard, Y. (1997). La transpocicion Didactica: del saber sabio al saber enseñado.

D' Amore B. (2004). Conceptualizacion, registros de representaciónes semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, España

Decreto 1290. (2009). Evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes de los niveles de educación básica y media

Duval R. (1993). Registres de representations semiotique et fonctionnment cognitif de la pensé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg.

Font (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica

García B., Coronado A., Montealegre L., Giraldo A., Tobar B., Morales S., Cortes D. (2013) Competencias matemáticas y actividad matemática de aprendizaje.

García B., Coronado A., Giraldo A. (2015) Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas.

Geometría analítica sexta edición.

Kaput, J (1987b). Towards a Theory of Symbol Use in Mathematics

Kaput, J (1992). Technology and Mathematics Ed.ucation

Libro de Geometría analítica pág. 149

Ministerio de Educación Nacional MEN (1998). Lineamientos Curriculares en Matemáticas.

Ministerio de Educación Nacional MEN (2006). Estándares Básicos de competencias Matemáticas.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015a). *Derechos básicos de aprendizaje*.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2015b). *Matriz de referencias. Matemáticas*.

Morin, E. (1996). Introducción al pensamiento complejo. España: Editorial Gedisa

Polya G. (1965) como plantear y resolver problemas, México, Editorial Trillas

Santaló l. (1966). *La matemática en la escuela secundaria* buenos aires:

Schoenfel (1985) Mathematical Problem Solving

Stone, M. (2003). La enseñanza para la comprensión: vinculación entre la investigación y la práctica

Edudeba. (pp.55).

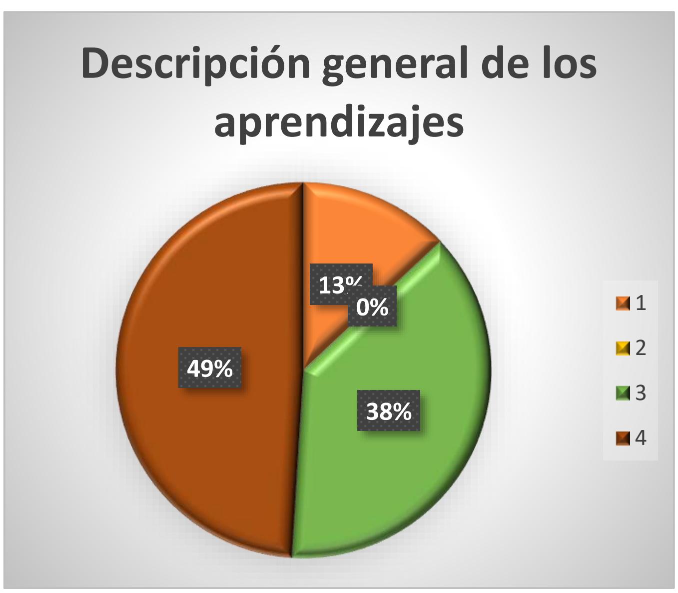
ANEXOS

ANEXO A. ANTECEDENTES INSTITUCIONALES

A.1 GRÁFICAS ESTADÍSTICAS DEL DESEMPEÑO EN LAS PRUEBAS SABER EN ESTUDIANTES DEL GRADO TERCERO, AÑO 2016 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA BUITRERA

Figura 1. Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado tercero

PRUEBA: Matemáticas	**COMPETENCIA:**	***Resolución***
Establecimiento Educativo	Entidad territorial Certificada	Colombia
28%	31%	34%



Fuente: tomada de los resultados del (MEN) Pruebas Saber *grado tercero,* Construción propia.

Interpretación

El 28% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia ***Resolución*** en la prueba de matemática.

Interpretación

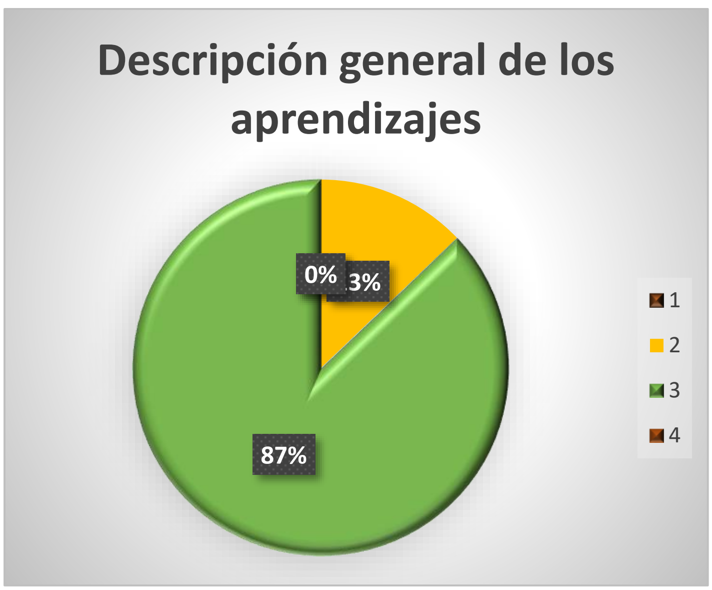
De los aprendizajes evaluados en la competencia ***Resolución*** su establecimiento educativo tiene el 0% de aprendizajes en amarillo, el 38% en verde, el 49% en café y 13% en naranja.

A.2 GRÁFICAS ESTADÍSTICAS DEL DESEMPEÑO EN LAS PRUEBAS SABER EN ESTUDIANTES DEL GRADO QUINTO, AÑO 2016 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA BUITRERA.

Figura 2. Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado quinto

PRUEBA: Matemáticas	**COMPETENCIA:**	***Resolución***
Establecimiento Educativo	Entidad territorial Certificada	Colombia

52% 48% 51%



Fuente: tomada de los resultados del (MEN) Pruebas saber *grado quinto,* Construción propia.

Interpretación

El 52% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia ***Resolución*** en la prueba de matemática.

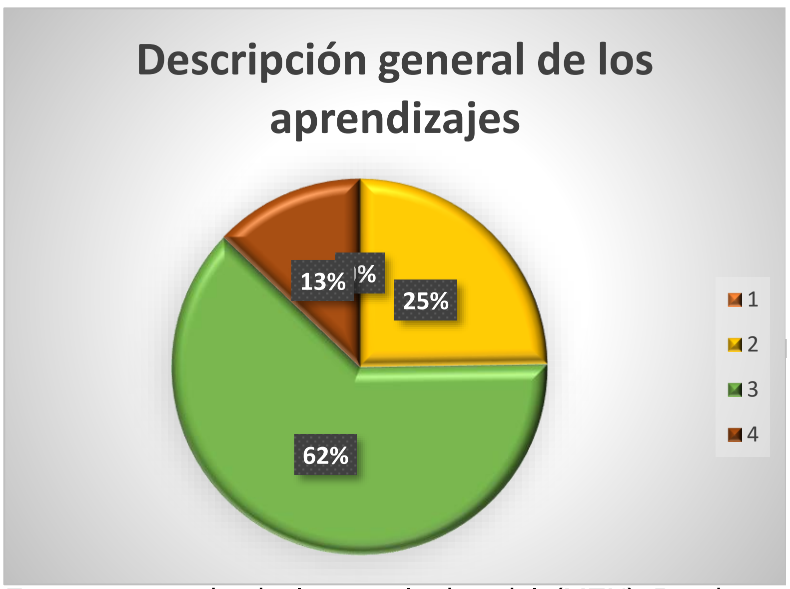
Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia ***Resolución*** su establecimiento educativo tiene el 13% de aprendizajes en amarillo, el 87% en verde, el 0% en café y 0% en naranja.

A.3 GRÁFICAS ESTADÍSTICAS DEL DESEMPEÑO EN LAS PRUEBAS SABER EN ESTUDIANTES DEL GRADO NOVENO, AÑO 2016 DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA BUITRERA

Figura 3. Análisis del desempeño en las Pruebas Saber en estudiantes del grado noveno

PRUEBA: Matemáticas	**COMPETENCIA:**	***Resolución***
Establecimiento Educativo	Entidad territorial Certificada	Colombia
64%	59%	60%



Fuente: tomada de los resultados del (MEN) Pruebas saber *grado noveno,* Construción propia.

Interpretación

El 64% de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes a la competencia ***Resolución*** en la prueba de matemática.

Interpretación

De los aprendizajes evaluados en la competencia ***Resolución*** su establecimiento educativo tiene el 25% de aprendizajes en amarillo, el 62% en verde, el 13% en café y 0% en naranja.

A.1 ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO EN LAS PRUEBAS SABER EN ESTUDIANTES DEL GRADO ONCE, AÑO 2016

Tabla A.1.1 Reporte de resultados del establecimiento educativo

Reportes de resultados para establecimientos educativos 2016-2

Información del establecimiento educativo

Establecimiento educativo:	81/01 LA BUITRERA
Código DANE:	276001005184
Dirección:	K.3 CORREGIMIENTO LA BUITRERA
Municipio - Departamento:	CALI - VALLE
Entidad territorial certificada (ETC):	CALI
Sector:	Oficial
Zona:	Rural
Grupo de comparación (GC):	2

Fechas que debe tener en cuenta:

Fecha de presentación del examen:	Julio 31 de 2016
Fecha de corte del SIMAT:	Septiembre 2016
Fecha de actualización de datos :	Noviembre 05 de 2016

Para simplificar y mejorar la presentación de la información contenida en este reporte se utilizarán las siguientes convenciones:

Código Dane	Nivel de agregación	Convención
276001005184	INSTITUCION EDUCATIVA LA BUITRERA	Establecimiento educativo (EE)
276001005184	INSTITUCION EDUCATIVA LA BUITRERA JOSE MARIA GARCIA DE TOLED	Sede 1
276001005184	INSTITUCION EDUCATIVA LA BUITRERA JOSE MARIA GARCIA DE TOLED - MAÑANA	Sede 1 / Jornada 1
276001003394	CENTRO DOCENTE NUESTRA SEÑORA DE LAS LAJAS	Sede 2
276001003394	CENTRO DOCENTE NUESTRA SEÑORA DE LAS LAJAS - MAÑANA	Sede 2 / Jornada 1

Ficha técnica | General | Lectura crítica | Matemáticas | Sociales y ciudadanas | Ciencias naturales | Inglés

4. Resultados en la prueba de Matemáticas

4.1 Promedio y desviación estándar en Matemáticas

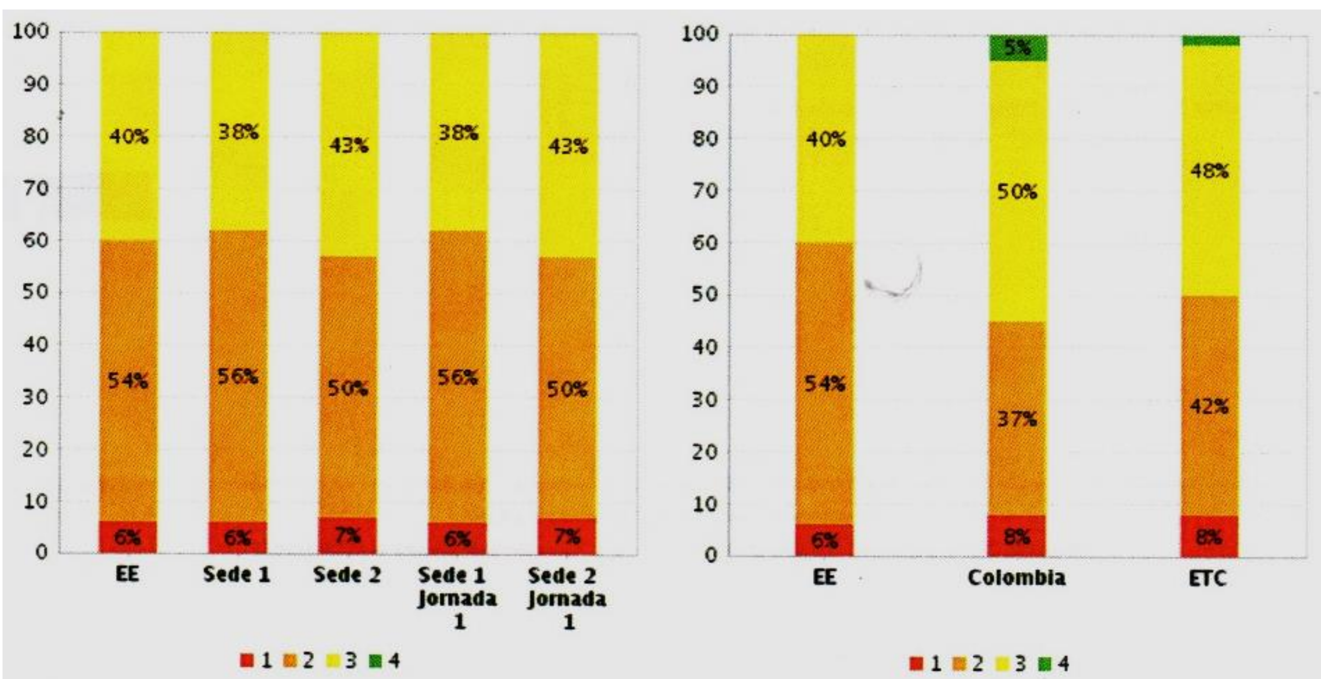
Fuente: tomada de los resultados del (MEN) Pruebas Saber *grado once*.

Tabla A.1.2 Porcentaje promedio de respuestas incorrectas en cada aprendizaje evaluado en matematicas

Aprendizaje	EE	Colombia	ETC
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	57%	53%	54%

Fuente: tomada de los resultados del (MEN) Pruebas Saber *grado once*. Construción propia.

Tabla A.1.3 Resultados comparativos del establecimiento por cada sede



Fuente: tomada de los resultados del MEN Pruebas Saber *grado once*.

Tabla A.1.4 Niveles de desempeños históricos

Reconociendo los resultados de la institución				
Matemáticas				
Aplicación	Nivel de desempeño			
	1	2	3	4
2016 - 2	48%↓	36%↑	14%↑	2%●
2017 - 2	44%	37%	17%	2%
Diferencia (2017 - 2016)				

Fuente: tomada de los resultados del MEN Pruebas Saber *grado once (2016), construcción propia*.

Flecha haci arriba: avance en resultado

Flecha haci abajo: bajó en endimiento

Punto relleno: se sostuvo el rendimiento

Tabla A.1.5 Niveles de desempeños en la matriz de referencia

NIVELES DE DESEMPEÑO MATEMÁTICAS SABER 11	
MATRIZ DE REFERENCIA MATEMÁTICAS GRADO 11	
INTERPRETACIÓN Y REPRESENTACIÓN	
APRENDIZAJE / AFIRMACIÓN	EVIDENCIA
1. Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos	1. Da cuenta de las características básicas de la información presentada en diferentes formatos como series, tablas y esquemas
	2. Transforma la información de una o más piezas de información

Fuente: tomada de los resultados del MEN Pruebas Saber grado once, construcción propia.

Tabla A1.6 Puntaje representativo de la prueba

2. Puntaje en la prueba de 36 a 50
2. Identifica valores o puntos representativos en diferentes tipos de registro a partir del significado que tiene la situación

Fuente: tomada de los resultados del MEN Pruebas Saber grado once, construcción propia.

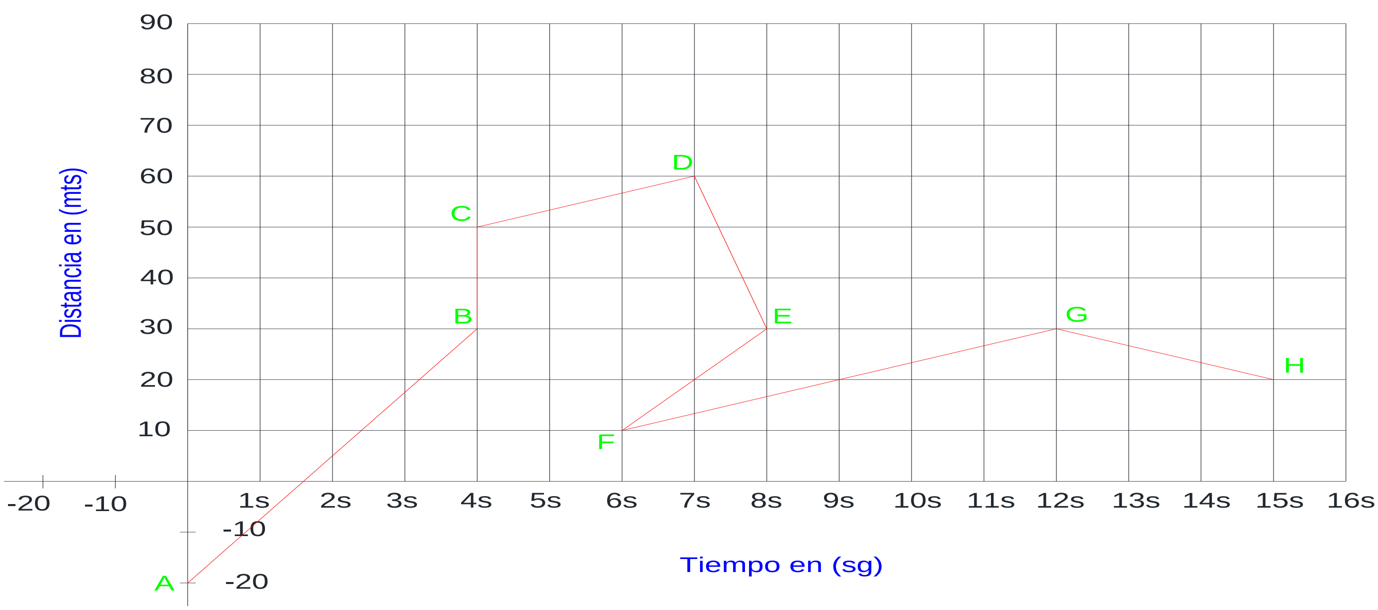
ANEXO B. SISTEMATIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

B.1 PRUEBA DIAGNÓSTICA

Nombre--fecha---------------------grado-----------

Debes seguir todas las indicaciones y realizar los procedimientos

La siguiente gráfica, representa el movimiento de una partícula a velocidad constante



Indique

PENDIENTE	SIGNO	METROS	SEGUNDOS
AB			
BC			
CD			
DE			
EF			
FG			
GH			

De acuerdo a la gráfica anterior responda:

¿En qué intervalo de tiempo, la pendiente realizó el mayor recorrido en mts? R//

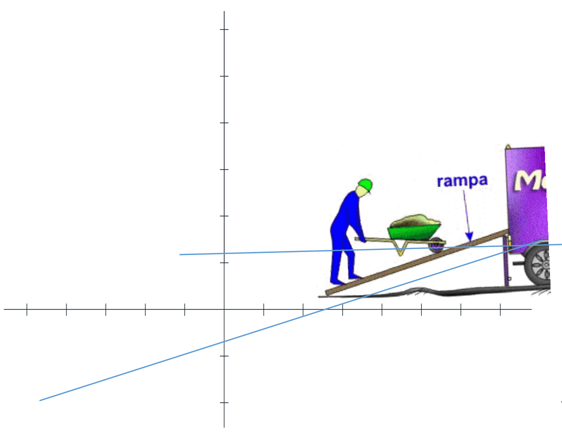
¿Cuál o cuáles intervalos tienen pendiente positiva? R//

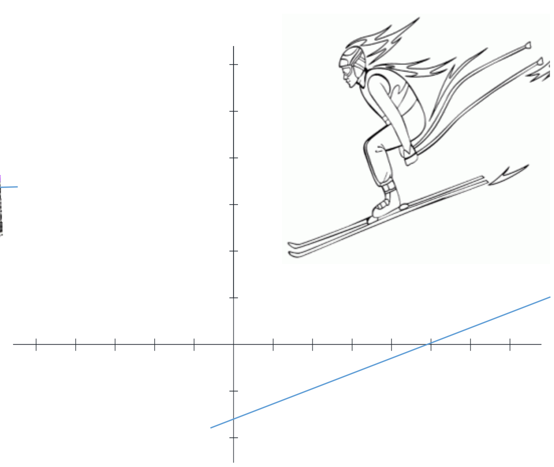
¿Cuál fue el recorrido total realizado por la partícula? R//

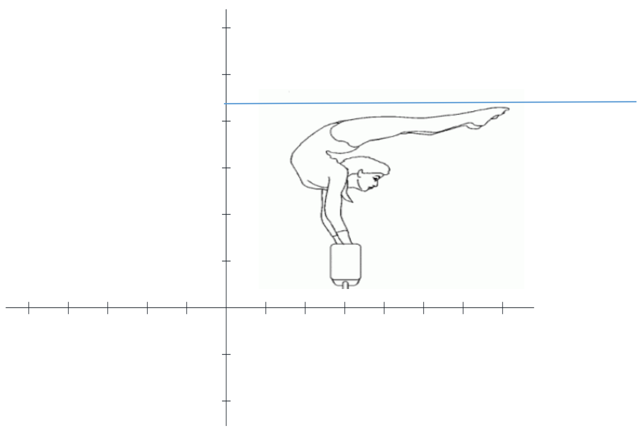
¿Cuál fue el desplazamiento total

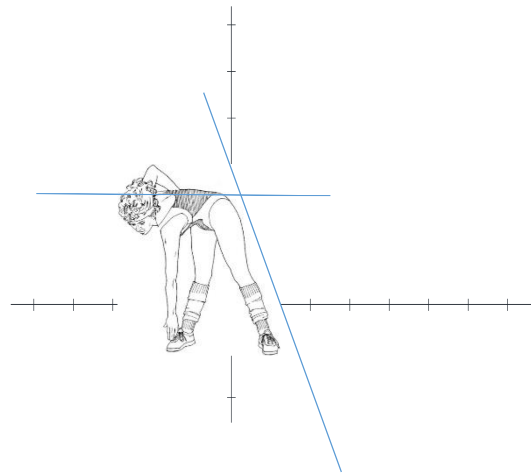
Tenga en cuenta que, cada espacio del plano cartesiano tiene un valor de **1**

Indique el valor de la pendiente en cada gráfica



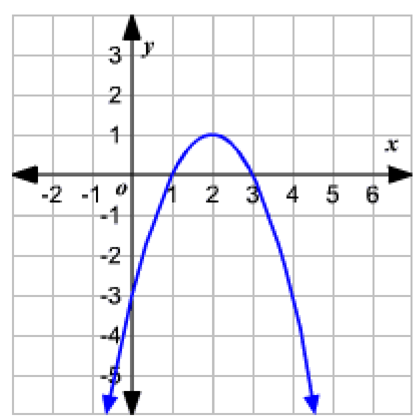






Complete l tabla para la función **$f(x) = x^2-5x +3$,** realizando las operaciones para obtener los valores correspondientes a la función

X	0	1	2	3	1-	-2	-3
F(x)							



Grafique la figura de acuerdo con la tabla anterior.

5. de acuerdo con la siguiente gráfica llene la información:

Puntos de corte con el eje X

En qué punto está el vértice de la parábola

Indique por qué punto está el eje para que se cumpla la simetría en la grafica

Parte segunda de la prueba diagnostica

B.2 TAREAS MATEMÁTICAS PARA LOS MOMENTOS 1 Y 2

“para bola y oime pues”

Situaciones didácticas para el momento **1**

Tarea matemática # **1** Identificar elementos de una antena parabólica.

Paso #1: Organizarse en grupos de cuatro estudiantes, utilizar el internet para escoger y observar el video apropiado que les permita resolver las siguientes preguntas.

¿Cuáles son los elementos relevantes de una antena parabólica?

¿Qué función cumple cada uno de ellos?

____

____

____

____

____

____

Tarea matemática # **2** Diseño de una antena parabólica

¿Por qué las antenas parabólicas se diseñan de esa forma y no de otra?

____

____

____

____

____

B.3 TAREA MATEMÁTICA # 3 PARA EL MOMENTO 2

Representación y resolución de una parábola con elementos manipulables, desde el registro algebraico al gráfico y desde el registro gráfico al algebraico a través de la modelación.

Situaciones didácticas para el momento **2**

Situación didáctica: **1** Explicar la formación de las secciones cónicas a partir del corte de un cono. Definir materiales de acuerdo con las consultas.

Situación didáctica: **2** Relacionar la forma gráfica de una parábola con algunos objetos del entorno, ejemplo (puente colgante, la farola de un automóvil) explicar ¿Por qué se diseñan de esa forma y no de otra?

Situación didáctica: **3** Representar la forma de una parábola por medio de métodos y trazados, utilizando el compás, regla o escuadra, (se deben señalar sus partes).

Situación didáctica: **4** Representación gráfica de la parábola con el método doblando papel. (Construcciones geométricas doblando papel)

Responder:

¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola?

¿Qué similitud se encuentra entre algunas características de la parábola con algunos elementos fundamentales de las antenas parabólicas en cuanto a su diseño?

¿Cuáles son las características fundamentales de la parábola que utiliza la antena parabólica para su funcionamiento?

B.4 TAREA MATEMÁTICA # 4 PARA EL MOMENTO TRES

Situaciones didácticas para el momento **3**

Representación y construcción gráfica de la parábola desde el registro algebraico al gráfico y viceversa según la ecuación asignada. Ecuación de una parábola con eje paralelo al eje de simetría **Y**, forma canónica de la ecuación de una parábola con eje paralelo al eje **Y**.

Explicar los comportamientos de la gráfica como por ejemplo, desplazamiento, punto de corte, ubicación en el origen, simetría etcétera.

B.4.1 Tarea matemática # **5**

Situaciones didácticas para el momento **4**

Representación gráfica de la parábola desde el registro algebraico al gráfico y viceversa, utilizando el programa Geogebra según la ecuación asignada. Ecuación de una parábola con eje de simetría paralelo al eje **X**, forma canónica de la ecuación de una parábola con eje paralelo al eje **X**, así como el comportamiento del desplazamiento, rotación, traslaciones y punto de corte con el eje x.

Explicación de la importancia de utilizar las TIC

B.4.2 Tarea matemática # 6

Situaciones didácticas para el momento **5**

Resolución de ejercicios en relación con la parábola en talleres de procesos, enfocados desde el registro algebraico al gráfico y viceversa. *Se deben trabajar las aplicaciones utilizando los recursos antes mencionados.*

Ejemplos: Hallar la ecuación de la parábola con foco (4,0) y directriz la recta X= -5. Dibuja la gráfica.

Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje focal es el eje x y pasa por el punto (-7,12), hallemos su ecuación y dibujar su gráfica.

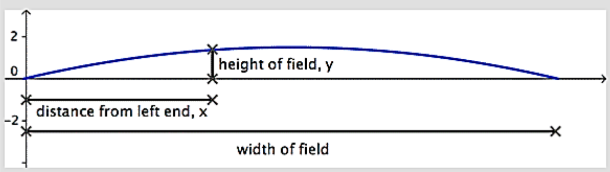
B.4.3 Tarea matemática # **7**

Situaciones didácticas para el momento **6**

Resolución de ejercicios en relación con la parábola en talleres de procesos, enfocados desde el registro gráfico al algebraico y viceversa con aplicaciones en situaciones de la vida cotidiana. *Se deben trabajar utilizando los recursos antes mencionados.*

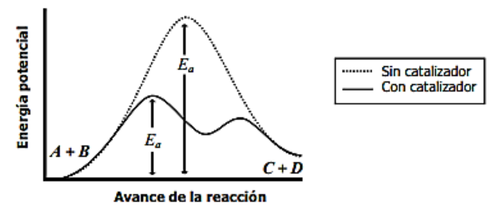
Ejemplos El cable de suspensión de un puente colgante tiene forma de parábola cuando el peso está uniformemente distribuido horizontalmente. La distancia entre las dos torres es de 150 metros, los puntos de soporte del cable en las dos torres están a 22 metros sobre la carretera y el punto más bajo del cable está a 7 metros por encima de la carretera. Calcule la distancia vertical entre el cable y un punto, sobre la carretera, situado a 15 metros del pie de una torre.

A pesar de que el césped sintético del campo de un estadio es aparentemente plano, su superficie tiene la forma de una parábola. Esto es para que la lluvia resbale hacia los lados. Si tomamos la sección transversal del campo, la superficie puede ser modelada por $y = -0.000234(x-80)^2 + 1.5$, donde x es la distancia desde la izquierda del campo y y es la altura del campo. ¿Cuál es el ancho del campo?



A) 80 pies
B) 1.5 pies
C) 234 pies
D) 160 pies

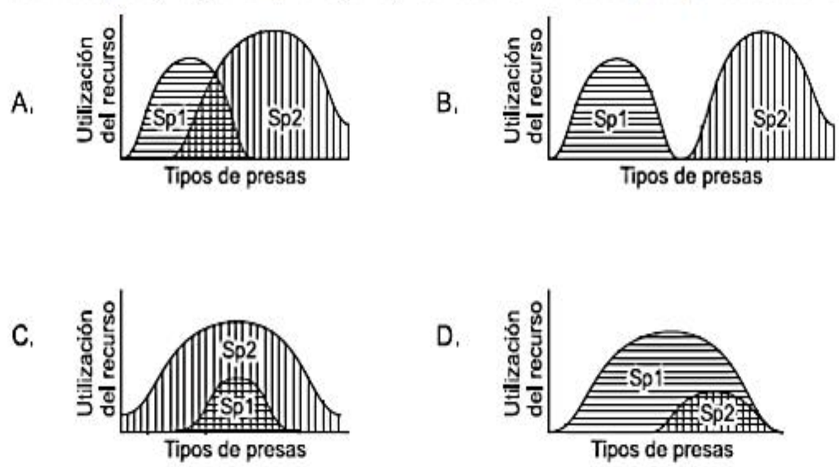
. Los catalizadores son sustancias que no aparecen en la ecuación estequiométrica y sin embargo alteran el camino por el cual los reactivos se transforman en productos, es decir, modifican el mecanismo de reacción.



Al comparar la energía de activación de una reacción en equilibrio no catalizada y la de la misma reacción en presencia de un catalizador, se puede afirmar que éste altera el mecanismo de una reacción porque

A. disminuye la energía de activación de la reacción.
B. aumenta la energía de activación de la reacción.
C. modifica la constante de equilibrio de la reacción.
D. mantiene constante la rapidez de la reacción.

44. De acuerdo con esta descripción, la gráfica que mejor representaría el nicho ocupado por estas dos especies es



Sp = Especie

Fuente: pruebas saber 11 2014

B.4.4 Rúbrica para evidenciar el proceso de resolución de problemas, tomado de Competencias Matemáticas y actividad matemática de aprendizaje

COMPETENCIA MATEMÁTICA	ASPECTOS DESARROLLO HUMANO	COMPET	PROCESOS	INDICADORES O DESCRIPTORES	TAREAS	ESTUDIANTES														
						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Perspectiva de resolución que se evidenciara a partir de las expectativas a corto plazo como los procesos matemáticos de codificar, formular, traducir, representar, comunicar y resolver con el propósito de contribuir en el desarrollo de la competencia resolución de problemas.	COGNITIVO - AFECTIVO - TENDENCIA DE ACCIÓN - METACOGNITIVO	PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS	Codificar	Reconoce cuáles son los elementos relevantes de una antena parabólica	1															
					2															
					3															
					4															
			Decodificar	Utiliza la representación de elementos de una parábola para argumentar sobre sus funciones	1															
					2															
					3															
					4															

			Razonar	Explica con argumentos de manera verbal o escrita, sobre el diseño de una antena parabólica	1															
					2															
					3															
					4															
			Representar	Justifica sobre la representación de la parábola en diferentes registros	1															
					2															
					3															
					4															
			Aplicar	resuelve problemas y tareas matemáticas en	1															
					2															

				las que se encuentra inmerso el objeto matemático parábola y comunica los procesos desarrollados																
					3															
					4															
			Persistencia	Actúa con gusto y voluntad para resolver actividades matemáticas, evaluación de procesos y resultados	1															
					2															
					3															
					4															