

Taller #3
Econometría 06216

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:

- o Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller es para ser entregado los 10 primeros minutos de la clase del 2 de septiembre.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Debe mostrar **TODO** el procedimiento que justifique cada uno de los valores que use para resolver el taller.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar **únicamente** el trabajo de la pareja.

En un estudio económico del Departamento Nacional de Planeación de la República de Cimmericia, desean estimar una función agregada de producción. Para esto plantean el siguiente modelo de regresión:

$$Q_t = \alpha L_t^\alpha K_t^\beta \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde:

Q_t es el producto agregado en el año t.

L_t es el factor trabajo de la economía en el año t.

K_t es el stock de capital de la economía en el año t.

No obstante, los investigadores se preguntan si este modelo es pertinente para determinar varios aspectos económicos, por esta razón acuden a usted para indagar en algunos aspectos.

1. Responda las siguientes preguntas:
 - a. Interprete los coeficientes y los signos *a priori* de la ecuación (1).
 - b. Muestre las condiciones de Inada que se deben cumplir para la ecuación (1).
2. De acuerdo con los datos consignados en el archivo T3-02-08.xls, responda las siguientes preguntas:
 - a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T y$, explicando claramente a que pertenece cada componente.
 - b. Estime los coeficientes:
 - c. Construya una tabla ANOVA con los datos suministrados, luego calcule el R^2 y el R^2 ajustado de la regresión.
3. Conteste las siguientes preguntas:
 - a. Realiza una prueba de significancia global, plantee las hipótesis, muestre el procedimiento para calcular el estadístico y concluya adecuadamente.

- b. Realice las pruebas de significancia individual. Para esto estime y muestre la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes, plantee las hipótesis pertinentes y muestre el procedimiento para calcular los estadísticos requeridos.
4. Los investigadores le piden que determine si la función de producción tipo Cobb-Douglas para los datos de la economía Cimmericia, satisface las condiciones de Inada. Muestre claramente los procedimientos utilizados para justificar su respuesta.
5. Respecto al residuo de Solow, responda las siguientes preguntas:
 - a. Encuentre un estimador para el Residuo de Solow esperado y para su varianza.
 - b. Encuentre el valor estimado.
6. De los siguientes modelos, ¿cuáles pueden estimarse por MCO? Indique, de ser posible, cuál sería la transformación requerida para poder efectuar la estimación.

$$Y_i = \alpha^3 + \beta \ln(X_{1i}) + e^{\theta} \left(\frac{1}{X_{2i}} \right) + \varepsilon_i \quad (2)$$

$$U_i = \left[(\sin(\beta X_i))^2 + (\cos(\beta X_i))^2 \right]^{\beta} + \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i \quad (3)$$

Taller #3
Respuestas Sugeridas
Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso C.
Monitor: Manuel Serna Cortés

Notas:

- o Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- o Este taller es para ser entregado los 10 primeros minutos de la clase.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador.
- Debe mostrar **TODO** el procedimiento que justifique cada uno de los valores que use para resolver el taller.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar **únicamente** el trabajo de la pareja.

En un estudio económico del Departamento Nacional de Planeación de la República de Cimmeria, desean estimar una función agregada de producción. Para esto plantean el siguiente modelo de regresión:

$$Q_t = AL_t^\alpha K_t^\beta \varepsilon_t \quad (1)$$

Donde:

Q_t es el producto agregado en el año t.

L_t es el factor trabajo de la economía en el año t.

K_t es el stock de capital de la economía en el año t.

No obstante, los investigadores se preguntan si este modelo es pertinente para determinar varios aspectos económicos, por esta razón acuden a usted para indagar en algunos aspectos.

1. Responda las siguientes preguntas:

- a. Interprete los coeficientes y los signos *a priori* de la ecuación (1).

Respuesta sugerida:

Los investigadores tienen que linealizar la ecuación 1 para poder estimar los coeficientes por MCO, obteniendo así:

$$\ln(Q_t) = \ln(A) + \alpha \ln(L_t) + \beta \ln(K_t) + \ln(\varepsilon_t)$$

$$\text{si } \ln(A) = \lambda \text{ y } \ln(\varepsilon_t) = v_t$$

$$\ln(Q_t) = \lambda + \alpha \ln(L_t) + \beta \ln(K_t) + v_t$$

De esta forma, λ como tal, carece de interpretación económica, pero su antilog (e^λ) representa la Productividad Multifactorial o también denominada Productividad Total de los Factores (PTF). En cuanto a su signo esperado, este parámetro puede ser negativo o positivo, pues sin importar el signo, su antilog siempre será positivo.

Respecto a α tiene doble interpretación, por un lado representa la elasticidad producto-trabajo, es decir que ante un incremento de 1% en el factor trabajo, el producto se incrementará en $\alpha\%$, pues se espera que α sea positivo. Adicionalmente, este parámetro muestra que la participación del factor trabajo en la producción es constante.

Respecto a β tiene doble interpretación, por un lado representa la elasticidad producto-stock de capital, es decir que ante un incremento de 1% en el stock de capital, el producto se incrementará en $\beta\%$, pues se espera que β sea positivo. Adicionalmente, este parámetro muestra que la participación del stock de capital en la producción es constante.

- b. Muestre las condiciones de Inada que se deben cumplir para la ecuación (1).

Respuesta sugerida:

Las condiciones de Inada, en general, se refieren a tres características de las funciones de producción neoclásicas: i) rendimientos constantes a escala, ii) productividades marginales positivas pero decrecientes y iii) Productividades marginales asintóticas.

Para el caso de una función tipo Cobb-Douglas,

$$Q_0 = F(L, K)$$

Si incrementamos ambos factores λ veces

$$Q_1 = F(\lambda L, \lambda K)$$

Los rendimientos constantes a escala implican que,

$$Q_1 = \lambda F(L, K),$$

y por tanto

$$Q_1 = \lambda Q_0,$$

la producción se incrementa λ veces.

Para que la Cobb-Douglas cumpla esta condición, se debe cumplir que $\alpha + \beta = 1$

Respecto a las productividades marginales tenemos,

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

$$Pmg_L = \alpha AL^{\alpha-1} K^\beta > 0 \text{ si } \alpha > 0$$

$$\frac{\partial Pmg_L}{\partial L} = \alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^\beta < 0 \text{ si } \alpha < 1$$

$$Q = AL^\alpha K^\beta$$

$$Pmg_K = \beta AL^\alpha K^{\beta-1} > 0 \text{ si } \beta > 0$$

$$\frac{\partial Pmg_K}{\partial K} = \beta(\beta-1)AL^\alpha K^{\beta-2} < 0 \text{ si } \beta < 1$$

Respecto a los límites:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial Q}{\partial L} = 0$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial Q_i}{\partial K_i} = 0$$

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial Q_i}{\partial L_i} = \infty$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial Q_i}{\partial K_i} = \infty$$

2. De acuerdo con los datos consignados en el archivo T3-02-08.xls, responda las siguientes preguntas:
- a. Escriba las matrices $X^T X$ y $X^T y$, explicando claramente a que pertenece cada componente.

Respuesta sugerida:

$$X^T Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{50} \ln(Q_i) = 650.5483 \\ \sum_{i=1}^{50} \ln(Q_i) \ln(L_i) = 5901.6117 \\ \sum_{i=1}^{50} \ln(Q_i) \ln(K_i) = 5526.3143 \end{bmatrix}$$

$$X^T X = \begin{bmatrix} T = 50 & \sum_{i=1}^{50} \ln(L_i) = 450.5124 & \sum_{i=1}^{50} \ln(K_i) = 423.9847 \\ \sum_{i=1}^{50} \ln(L_i) & \sum_{i=1}^{50} \ln(L_i)^2 = 4117.6008 & \sum_{i=1}^{50} \ln(L_i) \ln(K_i) = 3819.3427 \\ \sum_{i=1}^{50} \ln(K_i) & \sum_{i=1}^{50} \ln(L_i) \ln(K_i) & \sum_{i=1}^{50} \ln(K_i)^2 = 3613.5499 \end{bmatrix}$$

- b. Estime los coeficientes:

Respuesta sugerida:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1070/561 \\ 535/771 \\ 591/1033 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9073 \\ 0.6939 \\ 0.5721 \end{bmatrix}$$

- c. Construya una tabla ANOVA con los datos suministrados, luego calcule el R^2 y el R^2 ajustado de la regresión.

Respuesta sugerida:

Fuente de Variación	SS	Grados de Libertad	MS
Regresión	33,41	2	16,70
Residuo (Error)	0,57	47	0,012142
Total	33,98	49	

El R^2 es igual a $SSR/SST=33.41/33.98=0.9832$ y el R^2 ajustado es igual a 0.9825.

3. Conteste las siguientes preguntas:

- a. Realiza una prueba de significancia global, plantee las hipótesis, muestre el procedimiento para calcular el estadístico y concluya adecuadamente.

Respuesta sugerida:

$H_0: \alpha = \beta = 0$ vs. H_a : No H_0 .

(Recuerde que no se incluye el intercepto)

Para calcular el estadístico F, basta con calcular $MSR/MSE=1375.65$. Luego se procede a comparar este valor con un F crítico, con 2 grados de libertad en el numerador y 47 en el denominador, igual a 5.08, con un grado de significancia del 1%.

Por tanto, existe suficiente evidencia para afirmar que al menos alguno de los coeficientes de la regresión es estadísticamente diferente de cero.

- b. Realice las pruebas de significancia individual. Para esto estime y muestre la matriz de varianzas y covarianzas de los coeficientes, plantee las hipótesis pertinentes y muestre el procedimiento para calcular los estadísticos requeridos.

Respuesta sugerida:

Para determinar la significancia, se debe estimar la matriz de varianzas y covarianzas, $Var(\hat{\beta}) = s^2 (X^T X)^{-1}$

$$s^2 = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n - k} = \frac{8498.2392 - \hat{\beta}^T X^T y}{50 - 3} = 0.01214$$

$$s^2 (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 335/5044 & -36/18377 & -196/34253 \\ -36/18377 & 9/43237 & 3/304874 \\ -196/34253 & 3/304874 & 17/25589 \end{bmatrix}$$

$$s^2 (X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0664155 & -0,0019590 & -0,0057221 \\ -0,0019590 & 0,0002082 & 0,0000098 \\ -0,0057221 & 0,0000098 & 0,0006643 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que:

$$s_{\lambda} = 0.25771, s_{\alpha} = 0.01443 \text{ y } s_{\beta} = 0.25771$$

Pues, recuerden que $s = \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})}$

Las pruebas de significancia individual son las siguientes,

Para el intercepto corresponden a:

Ho: $\lambda = 0$ vs. Ha: $\lambda \neq 0$

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\lambda}{s_{\lambda}} = \frac{1,9073}{0.25771} = 7.4009$$

Para las pendientes:

Ho: $\alpha = 0$ vs. Ha: $\alpha \neq 0$

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\alpha}{s_{\alpha}} = \frac{0,6939}{0.01443} = 48.0957$$

Ho: $\beta = 0$ vs. Ha: $\beta \neq 0$

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\beta}{s_{\beta}} = \frac{0,5721}{0.02577} = 22.1968$$

Al comparar los estadísticos con un t crítico de 99% de confianza igual a 2.6845, se concluye que existe suficiente evidencia para afirmar que los parámetros del modelo son individualmente significativos con un 99% de confiabilidad.

4. Los investigadores le piden que determine si la función de producción tipo Cobb-Douglas para los datos de la economía Cimmericia, satisface las condiciones de Inada. Muestre claramente los procedimientos utilizados para justificar su respuesta.

Respuesta sugerida:

Como se explicó en el literal b del primer punto, se debe hacer una prueba de hipótesis para probar los rendimientos constantes a escala, es decir que las elasticidades sumen 1.

Para esto escribimos la restricción de manera matricial:

Ho: $\alpha + \beta = 1$ vs. Ha: No Ho

$$R\tilde{\beta} = c$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 1$$

Utilizando la fórmula:

$$F_c = \frac{(c - R\hat{\beta})^T (R(X^T X)^{-1} R^T)^{-1} (c - R\hat{\beta})}{S^2}$$

Tenemos que:

$$F_c = \frac{\left(\begin{bmatrix} 1 & -[0 & 1 & 1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.9073 \\ 0.6939 \\ 0.5721 \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3271/598 & -217/1345 & -1919/4072 \\ -217/1345 & 181/10558 & 27/33316 \\ -1919/4072 & 27/33316 & 1157/21146 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.9073 \\ 0.6939 \\ 0.5721 \end{bmatrix} \right)}{0.57/47}$$

$$F_c = \frac{679/705}{0.012142} = 79.3214$$

Al comparar con un F crítico con 1% de significancia igual a 7.21 (1,47), se puede concluir que existe evidencia para afirmar que la función de producción agregada de la economía de Cimmericia no tiene rendimientos constantes a escala.

Por otro lado, para probar que las productividades marginales son positivas pero decrecientes, se deben realizar las siguientes pruebas de hipótesis:

Para el factor trabajo, la productividad marginal es positiva si $\alpha > 0$:

Ho: $\alpha \leq 0$ vs. Ha: $\alpha > 0$

Lo cual es una prueba t de cola derecha.

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\alpha}{s_{\alpha}} = \frac{0,6939}{0.01443} = 48.0957$$

Y se compara con un t crítico igual a 2.4083 con 47 grados de libertad y 99% de confiabilidad. Por tanto existe evidencia para afirmar que la Productividad Marginal del Trabajo es positiva.

La productividad marginal es decreciente si $\alpha < 1$:

Ho: $\alpha \geq 1$ vs. Ha: $\alpha < 1$

Lo cual es una prueba de cola izquierda

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\alpha}{s_{\alpha}} = \frac{0,6939-1}{0.01443} = -21,2160$$

Y se compara con un t crítico igual a -2.4083 con 47 grados de libertad y 99% de confiabilidad. Por tanto existe evidencia para afirmar que la Productividad Marginal del Trabajo es decreciente.

Para el factor stock de capital, la productividad marginal es positiva si $\beta > 0$:

Ho: $\beta \leq 0$ vs. Ha: $\beta > 0$

Lo cual es una prueba t de cola derecha.

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\beta}{s_{\beta}} = \frac{0,5721}{0.02577} = 22.1968$$

Y se compara con un t crítico igual a 2.4083 con 47 grados de libertad y 99% de confiabilidad. Por tanto existe evidencia para afirmar que la Productividad Marginal del Capital es positiva.

La productividad marginal es decreciente si $\beta < 1$:

Ho: $\beta \geq 1$ vs. Ha: $\beta < 1$

Lo cual es una prueba de cola izquierda

El estadístico t corresponde a:

$$t = \frac{\beta}{s_{\beta}} = \frac{0,5721-1}{0.02577} = -16,6006$$

Y se compara con un t crítico igual a -2.4083 con 47 grados de libertad y 99% de confiabilidad. Por tanto existe evidencia para afirmar que la Productividad Marginal del Capital es decreciente.

5. Respecto al residuo de Solow, responda las siguiente preguntas:

a. Encuentre un estimador para el Residuo de Solow esperado y para su varianza.

Respuesta sugerida:

Solow (1956)¹ presenta una forma de descomponer las fuentes del crecimiento económico a partir de las elasticidades del producto con respecto al trabajo y el stock de capital. En especial, según Solow, el crecimiento del producto se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\Delta\%Q_t = \alpha\Delta\%L_t + \beta\Delta\%K_t + R_t$$

La variable R_t corresponde al residuo de Solow, que es interpretado como la medida contribución del progreso técnico al crecimiento.

Tomando la siguiente expresión:

$$R_t = \ln(Q_t) - \alpha \ln(L_t) - \beta \ln(K_t)$$

lo cual es:

$$R_t = \lambda + v_t$$

y el valor esperado del residuo de Solow corresponde a:

$$E(R_t) = E(\lambda + v_t) = E(\lambda) + E(v_t) = \lambda + 0 = \lambda$$

Por tanto, un estimador del Residuo de Solow, corresponde al estimador de MCO para el intercepto del modelo de regresión lineal $\hat{\lambda}$.

Para encontrar el estimador de la varianza del Residuo de Solow, tenemos:

$$R_t = \lambda + v_t$$

y la varianza del residuo de Solow corresponde a:

$$Var(R_t) = Var(\lambda + v_t) = Var(\lambda) + Var(v_t),$$

pues la covarianza entre una constante y una variable estocástica es cero.

$$Var(\lambda) + Var(v_t) = 0 + \sigma^2$$

$$Var(R_t) = \sigma^2$$

Por tanto, el estimador de la varianza del residuo de Solow, corresponde al estimador de MCO de la varianza de los errores de la regresión s^2 .

b. Encuentre el valor estimado.

Respuesta sugerida:

Como se explica en el literal a. la estimación del residuo de Solow corresponde a la estimación del intercepto en el modelo de regresión lineal, esta estimación es igual a 1.9073 como se probó.

¹ Solow, Robert M. 1956. "A contribution to the Theory of Economic Growth." *Quarterly Journal of Economics*, 70, pp. 312-20.

6. De los siguientes modelos, ¿cuáles pueden estimarse por MCO? Indique, de ser posible, cuál sería la transformación requerida para poder efectuar la estimación.

$$Y_i = \alpha^3 + \beta \ln(X_{1i}) + e^{\theta} \left(\frac{1}{X_{2i}} \right) + \varepsilon_i \quad (2)$$

$$U_i = \left[(\sin(\beta X_i))^2 + (\cos(\beta X_i))^2 \right]^{\beta} + \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i \quad (3)$$

Respuesta sugerida:

El modelo (2) si puede estimarse por MCO, pues la función cúbica en el intercepto es impar uno a uno, para linealizar se procede así:

$$Y_i = \delta + \beta Z_i + \lambda W_i + \varepsilon_i$$

Donde:

$$\delta = \alpha^3, Z_i = \ln(X_{1i}), \lambda = e^{\theta} \text{ y } W_i = \frac{1}{X_{2i}}$$

El modelo (3) si puede estimarse por MCO, pues recuerden la identidad trigonométrica $(\sin(\beta X_i))^2 + (\cos(\beta X_i))^2 = 1$, por tanto, al linealizar tenemos:

$$U_i = 1^{\beta} + \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i = 1 + \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i$$

$$U_i - 1 = \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i$$

Si

$$Z_i = U_i - 1$$

tenemos que

$$Z_i = \beta Y_i + \alpha X_i + \varepsilon_i$$