APUNTES DE TEORÍA DE JUEGOS II

Natalia González
Julieth Solano

No. 5

Marzo 2005

APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

No. 5, Febrero de 2005

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición

Stephanie Vergara Rojas

Gestión Editorial

Departamento de Economía - Universidad ICESI

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 398. Fax: 5551441

Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

UNIVERSIDAD ICESI
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

APUNTES DE TEORÍA DE JUEGOS II

Natalia González[1]
Julieth Solano[2]

Febrero de 2005

Resumen

En este documento se desarrolla uno de los principales conceptos de la teoría de juegos, a saber, el equilibrio de Nash. En la primera parte, se presenta una definición formal de lo que es el equilibrio de Nash además del procedimiento que debe seguirse para llegar a este. Por último, se desarrollan ejemplos y se proponen ejercicios prácticos que permiten aterrizar los conceptos que se trabajan a lo largo de las notas. Este documento está dirigido principalmente a estudiantes de pregrado de economía, empero por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en la teoría de juegos.

Palabras Claves: Jugadores, estrategias, juego en forma extensiva, juego en forma estratégica, pagos, incertidumbre, información perfecta, preferencias asimétricas, preferencias negativamente transitivas, estrategia dominante, eliminación iterada de estrategias dominadas.

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

[1] Profesora tiempo completo del Departamento de Economía en la Universidad Icesi.
[2] Asistente de Investigación Departamento de Economía en la Universidad Icesi.

Introducción

Después de explorar algunos elementos y conceptos básicos de la teoría de Juegos, como por ejemplo, cómo representar un juego y la noción de solución de un juego por medio de la eliminación iterada de estrategias dominadas y estrictamente dominadas[3], se diseñaron estas notas de clase con la intención de que el estudiante tenga la oportunidad de examinar, comprender y aplicar otro concepto de solución más poderoso que el de la eliminación iterada. La intención de estos apuntes es propiciar otro encuentro entre el estudiante y la Teoría de Juegos y que tenga a su disposición material que ayudará a que al final sea capaz de emplear una herramienta nueva de solución de un juego que permite predicciones más precisas; ya que como se examinó en el Apunte de Economía No. 3… “la solución de eliminación iterada da lugar a predicciones imprecisas y en algunos casos el proceso no permite ninguna predicción en el desarrollo del juego”.[4]

Como se mencionó anteriormente, a continuación el estudiante tendrá la oportunidad de examinar, comprender y aplicar uno de los conceptos de solución más poderoso y comúnmente utilizado: el famoso equilibrio de Nash. La primera y más importante característica de todo juego donde aparezca una solución única (al enfrentarse todos los jugadores), debe ser un equilibrio de Nash. Sin embargo, cabe preguntarse ¿por qué? o mejor aún, ¿qué condiciones yacen detrás del concepto del equilibrio de Nash para que haya una única (y en algunos casos más de una) predicción sobre el vector de estrategias de cada jugador? Además, ¿qué requerimientos son necesarios para que no sólo haya una única predicción, sino que además sea correcta? Estas son algunas de las preguntas que responderán los estudiantes a lo largo de estos apuntes.

---

[3] Ver Apuntes de Economía No. 3. Natalia González.
[4] Ibíd.

EQUILIBRIO DE NASH

Anteriormente, el estudiante aprendió a utilizar la eliminación iterativa de estrategias estrictamente y débilmente dominadas como alternativa de solución que ofrece la teoría de Juegos. Aprendió por ejemplo, cómo una estrategia (x) domina a otra (z) independientemente de lo que hagan los demás jugadores, por lo cual no es una buena idea elegir la estrategia (z) sin importar lo que hagan los demás jugadores ya que siempre le irá mejor al elegir (x). Empero, ahora supongamos que el jugador elige la estrategia (x) a condición de que arroja una mayor utilidad que si escogiera (z) dado que ahora tiene una idea de lo que va hacer el otro (o los otros) agente económico. En otras palabras, el jugador elige (x) ya que considera que es una mejor respuesta frente a lo que él espera va hacer el otro (o los demás). Por lo tanto, la estrategia (x) predicha por el jugador debe ser su mejor respuesta a las estrategias predichas de los otros jugadores.

Definición. En un juego de forma estratégica con *n* jugadores, la estrategia $s_i^\wedge$ es la mejor respuesta del jugador i a las estrategias predichas de los otros (n – 1) jugadores:

$$\text{p}_i(s_1^\wedge, s_2^\wedge, \ldots, s_{i-1}^\wedge, s_i^\wedge, s_{i+1}^\wedge, \ldots, s_n^\wedge) \geq \text{p}_i(s_1^\wedge, s_2^\wedge, \ldots, s_{i-1}^\wedge, s_i, s_{i+1}^\wedge, \ldots, s_n^\wedge)$$

Donde s_i representa todos los elementos en el espacio de estrategias del jugador *i*, a excepción del elemento $s_i^\wedge$.

Lo que quiere decir que $s_i^\wedge$ es una estrategia débilmente dominante, es decir, que es la mejor respuesta a condición de que los demás jugadores elijan $(s_1^\wedge, s_2^\wedge, \ldots, s_{i-1}^\wedge, s_{i+1}^\wedge, \ldots, s_n^\wedge)$. Sin embargo, cabe preguntarse si el jugador, ¿conoce las intenciones de su rival?. Y, ¿será absolutamente imprescindible que cada jugador conozca exactamente lo que sus rivales harán?.

En el mejor de los casos, cada jugador simplemente sospecha algo, por lo cual, tanto las predicciones hechas por un jugador, como por otro, deben auto imponerse para que ningún jugador quiera desviarse de la estrategia predicha para él. A continuación se presentarán las condiciones para asegurar que la conjetura del jugador *i* acerca de lo que los demás eligen: $(s_1^{\wedge}, s_2^{\wedge}, ..., s_{i-1}^{\wedge}, s_{i+1}^{\wedge}, ..., s_n^{\wedge})$, es correcta. Asimismo, que los demás jugadores no se equivoquen en sus conjeturas.

Definición. La estrategia $s_i^{\wedge}$ es la mejor respuesta del jugador fila[5] a la estrategia predicha del jugador columna y s_{-i}^{*} es la mejor respuesta del jugador columna[6] a la estrategia predicha del jugador fila, por lo tanto $p_i(s_i^{\wedge}, s_{-i}^{*})$ corresponde a un equilibrio de Nash.

$p_i(s_i^{\wedge}, s_{-i}) \geq p(s_i, s_{-i})$ Donde s_i contiene todos los elementos en el espacio de estrategias del jugador *i*, a excepción del elemento $s_i^{\wedge}$

$p_{-i}(s_i^{\circ}, s_{-i}^{*}) \geq p(s_i^{\circ}, s_{-i})$ Y s_{-i} contiene todos los elementos en el espacio de estrategias del jugador -*i*, a excepción del elemento s_{-i}^{*}.

Tanto el jugador fila, como el jugador columna carecen de incentivos para modificar su estrategia, de ahí que las estrategias predichas de cada uno de los rivales son correctas. Para ilustrar las definiciones anteriores vamos a resolver algunos ejercicios.

Recordemos el juego denominado «batalla de los sexos».[7] Las preferencias de los esposos sobre estos dos espectáculos se representan a continuación en la Figura 1.

Figura 1. Matriz de pagos juego “Batalla de los sexos”.

J1\J2	Opera	Ballet
Opera	1 , 2	0 , 0
Ballet	0 , 0	2 , 1

En este juego no hay estrategias dominadas para ser eliminadas por lo que el proceso de eliminación iterada no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego. Sin

[5] De acuerdo a la representación matricial de un juego con dos participantes, el jugador fila y sus estrategias, se encuentran ubicadas en las filas de la matriz.
[6] Según la representación matricial de un juego con dos participantes, el jugador columna y sus estrategias, se encuentran ubicadas en las columnas de la matriz.
[7] Se trata de una pareja de esposos que se van de viaje juntos e infortunadamente quedan separados en una ciudad que no conocen. Cada uno debe decidir independientemente del otro a dónde ir por la noche con la esperanza de encontrarse. Sentados desayunando la pareja había descartado una serie de alternativas para la velada, excepto ir al ballet o ir a la opera.

embargo, vamos a ver a continuación cómo la estrategia seleccionada por cada jugador corresponde a la mejor respuesta frente a la elección de su rival.

$p_{J_1}(O,O) > p_{J_1}(B,O)$ y $p_{J_2}(O,O) > p_{J_2}(O,B)$	El primer equilibrio de Nash corresponde a (O,O).
$p_{J_1}(B,B) > p_{J_1}(O,B)$ y $p_{J_2}(B,B) > p_{J_2}(B,O)$	El segundo equilibrio de Nash corresponde a (B,B).

Ahora examinemos el caso de dos duopolistas, -retomando el modelo de Bertrand (1883)- que elige precios y no cantidades[8]. Cabe anotar que las estrategias giran alrededor de elegir qué precio cobrar por un producto homogéneo.

Trabajemos primero en la solución matricial del equilibrio de Nash y luego nos concentraremos en estudiar la manera cómo se obtiene dicha matriz.

Supongamos dos empresarios, dueños de dos firmas, que deben decidir si cobrar un precio alto, medio o bajo por el producto que cada uno vende.[9] Si la firma 1 decide cobrar un precio alto a la vez que su rival (la firma 2) decide cobrar un precio alto, los beneficios que obtiene la firma 1 serán positivos al igual a los que obtiene la firma 2: $\pi_i(8,8)$ donde *i* = 1 y 2. Si la firma 2 adopta una conducta similar y cobra un precio alto mientras que su rival cobra un precio medio, los beneficios de la firma 2 serán nulos mientras que los de la firma uno serán positivos y mayores[10] de los que obtenía en el escenario anterior: $\pi_i(12,0)$ donde *i* = 1 y 2. Por último, si la firma 2 continua adoptando la misma conducta (cobrar un precio alto) mientras que la firma 1 cobra un precio bajo, los beneficios de la firma 1 serán positivos, pero menores que los del escenario anterior[11], mientras que los beneficios de la firma 2 serán nulos: $\pi_i(10,0)$ donde *i* = 1 y 2.

[8] Véase Cournot, "A. Researches into the mathematical principles of the theory of Wealth", New York – Macmillan (1897).

[9] Es importante recordar que el producto que vende cada una de las firmas es homogéneo.

[10] Para ello vamos a suponer que el proceso productivo goza de un solo factor de producción llamado trabajo y que en su primera fase de producción cada vez que incrementa el nivel de producto la productividad marginal del trabajo es creciente, acompañado de unos costos marginales decrecientes.

[11] Para ello vamos a suponer al igual que en la situación anterior que el proceso productivo goza de un solo factor de producción llamado trabajo, empero en su segunda fase de producción cada vez que el empresario decide incrementar el nivel de producto ya que se demanda más de el, la productividad marginal del trabajo es decreciente y los costos marginales son crecientes.

Los resultados se invertirán cuando la firma 1 es la que adopta la conducta de cobrar un precio alto siempre.[12] Por otro lado, si las dos deciden cobrar precios medios por la venta del bien, ambos reciben beneficios iguales pero menores de los que reciben si ambos cobrasen precios altos: $\pi_i(6,6)$ donde i = 1 y 2. En el caso de que la firma 1 cobre un precio medio mientras que la firma rival cobra un precio bajo, la segunda se apoderaría de todos los beneficios dejando a la primera sin nada: $\pi_i(0,10)$ donde i = 1 y 2. Finalmente, si ambas firmas decidieran cobrar un precio bajo, se repartirían los beneficios de manera igualitaria: $\pi_i(5,5)$ donde i = 1 y 2.

Veamos cómo la Figura 2 representa de forma matricial lo que hemos expresado anteriormente con palabras:

Figura 2. Matriz de Pagos Modelo de duopolio de Bertrand

J1\J2	Alto	Medio	Bajo
Alto	8 , 8	0 , 12	0 , 10
Medio	12 , 0	6 , 6	0 , 10
Bajo	10 , 0	10 , 0	5 , 5

En este juego sólo hay un equilibrio de Nash y corresponde a la combinación estratégica {Bajo, Bajo}. Para mayor entendimiento del estudiante vamos a ver a continuación, cómo la estrategia seleccionada por cada jugador corresponde a la mejor respuesta frente a la elección de su rival, es decir, por qué {Bajo, Bajo} corresponde a nuestro equilibrio de Nash.

$$\pi_1(Bajo, Bajo) > \pi_1(Medio, Bajo) \text{ y } \pi_1(Bajo, Bajo) > \pi_1(Alto, Bajo)$$

$$\pi_2(Bajo, Bajo) > \pi_2(Bajo, Medio) \text{ y } \pi_2(Bajo, Bajo) > \pi_2(Bajo, Alto)$$

Adicionalmente, es importante resaltar que la solución de Nash corresponde a la única solución por medio de la eliminación iterada de estrategias dominadas. En el modelo de duopolio de Bertrand vemos cómo la estrategia Medio es débilmente preferida a la estrategia Alto para ambos jugadores:

[12] Para ello debemos suponer que la estructura de costos la misma para ambas firmas al igual que la función de producción.

<u>Análisis para el Jugador 1</u>:

$$\pi_1(Medio, Alto) > \pi_1(Alto, Alto)$$

$$\pi_1(Medio, Medio) > \pi_1(Alto, Medio)$$

$$\pi_1(Medio, Bajo) > \pi_1(Alto, Bajo)$$

Este análisis nos permite ver que la estrategia Medio domina la estrategia Alto.

<u>Análisis para el Jugador 2</u>:

$$\pi_2(Alto, Medio) > \pi_2(Alto, Alto)$$

$$\pi_2(Medio, Medio) > \pi_2(Medio, Alto)$$

$$\pi_2(Bajo, Medio) > \pi_2(Bajo, Alto)$$

Por lo que la estrategia Alto es dominada por la estrategia Medio. La eliminación anterior nos deja con la siguiente matriz de pagos (
Figura 3).

Figura 3. Matriz de Pagos Restante del duopolio de Bertrand

J1\J2	Medio	Bajo
Medio	6 , 6	0 , 10
Bajo	10 , 0	5 , 5

<u>Análisis para el Jugador 1</u>:

$\pi_1(Bajo, Medio) > \pi_1(Medio, Medio)$; $\pi_1(Bajo, Bajo) > \pi_1(Medio, Bajo)$; por lo que la estrategia Bajo domina la estrategia Medio.

<u>Análisis para el Jugador 2</u>:

$\pi_2(Medio, Bajo) > \pi_2(Medio, Medio)$; $\pi_2(Bajo, Bajo) > \pi_2(Bajo, Medio)$; por lo que la estrategia Medio es dominada por la estrategia Bajo.

Con los dos juegos anteriores podemos concluir que toda solución por medio de eliminación iterada de estrategias dominadas es un equilibrio de Nash, pero no todo equilibrio de Nash es una solución por medio de eliminación iterada de estrategias dominadas. Cómo ejercicio para la casa, explique la anterior afirmación.

Como mencionamos anteriormente, a continuación estudiaremos la manera como se construye una matriz de pagos, como es el caso del modelo de duopolio de Bertrand con productos homogéneos[13]. También encontraremos la combinación de estrategias de equilibrio[14], o en forma más sencilla, el equilibrio de Bertrand-Nash cuando las empresas seleccionan los precios.

¿Cuál es la función de demanda de la empresa 1 si toma como dado el precio de su rival, en este caso, la empresa 2? La empresa 1 tiene diferentes alternativas. Primero, anticipar el hecho de que si cobra un precio más alto que el de su rival, todos le compraran a su rival. Segundo, si la empresa 1 cobra un precio más bajo que su rival, todos le comprarán. Y tercero, si cobra un precio igual a de su rival, las empresas se dividirán el mercado en partes iguales.[15] En esta ocasión vamos a suponer que se dividen el mercado a la mitad. De esta manera, la cantidad que demandan los consumidores a la empresa 1 es:

$$\left\{\begin{matrix} q_1 = x - p_1 & si\ p_1 < p_2 \\ q_1 = 0 & si\ p_1 > p_2 \\ q_1 = \left(x - p_1\right)/2 & si\ p_1 = p_2 \end{matrix}\right\} \tag{0.1}$$

Adicionalmente, vamos a suponer que no hay costo fijos y que los costos marginales son constantes[16] e iguales a *c* donde *c* < *x*.

A continuación vamos a tomar la forma más sencilla de la función de beneficios de la empresa 1: $\pi_1(s_1, s_2) = It_1 - Ct_1$[17], por lo tanto la función de beneficio para la empresa 1, si $p_1 < p_2$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\pi_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)\left[p_1 - c_1\right]$$

$$\pi_1(p_1, p_2) = (x - p_1)(p_1 - c_1)$$

[13] Para el caso de productos diferenciados véase ejercicio en la sección 1.2.B del libro de Robert Gibbons, "*Un primer curso de Teoría de Juegos*". Antoni Bosch editor, 1993.
[14] Se llama combinación de estrategias de equilibrio a la estrategia de cada jugador si es la mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores (en este caso de la empresa rival).
[15] Dado la simetría en la estructura de costos.
[16] Recuerde que en estos casos donde los costos marginales son constantes, también son iguales a los costos medios.
[17] Donde It_1 y Ct_1 corresponden a los ingresos totales y costos totales respectivamente.

Segundo, la función de beneficio para la empresa 1, si $p_1 > p_2$ es igual a cero y puede expresarse de la siguiente forma:

$$\pi_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)[p_1 - c_1]$$

$$\pi_1(p_1, p_2) = (0)$$

Y finalmente, si $p_1 = p_2$, la función de beneficio para la empresa 1 es:

$$\pi_1(p_1, p_2) = q_1(p_1, p_2)[p_1 - c_1]$$

$$\pi_1(p_1, p_2) = \left(\frac{x - p_1}{2}\right)(p_1 - c_1)$$

Con el objeto de encontrar la mejor función de respuesta de la empresa 1, es necesario responder la siguiente pregunta: dada la conjetura que tiene la empresa 1 acerca de cuánto va a cobrar la empresa 2, ¿qué precio debe cobrar la empresa 1 con el objeto de maximizar su utilidad? Examinemos las estrategias presentadas anteriormente. Una primera alternativa es que dado el precio de su rival, la empresa 1 cobre un precio más bajo con el fin de captar todo el mercado. Por ejemplo, si la empresa 2 cobra un precio mayor que el precio de monopolio, la primera empresa cobrará un precio menor que el de su rival, es decir, cobrará un precio igual al de monopolio. A continuación veamos cuál será el valor del precio de la empresa 1,

$$p_1 = x - q_2 - q_1$$

$$\pi_1(q_1, q_2) = q_1(x - q_2 - q_1 - c_1)$$

$$\frac{\partial It_1}{\partial q_1} = x - q_2 - 2q_1$$

$$\frac{\partial Ct_1}{\partial q_1} = c_1$$

Con el objeto de maximizar el beneficio $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = x - q_2 - 2q_1 - c_1 = 0$, la primera empresa seleccionará el nivel de producción q_1 en el cual el ingreso marginal es igual al costo marginal, es decir:

$$x - q_2 - 2q_1 = c$$

$$q_1 = \left(\frac{x - q_2 - c}{2}\right)$$

Por lo tanto, el valor del precio que la empresa 1 debe cobrar en el caso de que la empresa 2 cobre un precio mayor que el de monopolio ($p_1 < p_2$) debe ser:

$$q_1 = x - p_1$$
$$p_1 = x - q_1$$
$$p_1 = x - \left(\frac{x - q_2 - c}{2}\right)$$
$$p_1 = \frac{x - c}{2}$$

Un segundo escenario se presenta si la empresa 1 elige un precio mayor que la de su rival: $p_1 > p_2$. En este caso su beneficio será igual a cero. Por último, tenemos un tercer escenario en el cual la empresa 2 cobra un precio igual a su costo marginal. Si la empresa 1 decide cobrar un precio mayor al costo marginal, su beneficio será igual a cero ya que no será atractivo para ningún consumidor. Si selecciona un precio igual al costo marginal: $p_1 = p_2$, su beneficio será cero porque llegará al punto de equilibrio sobre cada unidad que venda. En este caso es mejor obtener una utilidad igual a cero que obtener una utilidad negativa al querer vender el producto a un precio menor que el costo marginal.

Para ilustrar el caso del duopolio de Bertrand, empecemos por establecer las condiciones de costos y demanda. Suponga que la función de mercado lineal es la siguiente:

$$p = 100 - Q$$

Donde *p* es el precio y *Q* es la producción agregada, es decir, de toda la industria. Adicionalmente, suponga que cada empresa en la industria puede fabricar el bien a un costo constante e igual a $20 por unidad. Por lo cual, el costo marginal de cada unidad producida es igual a $20 independientemente de la empresa que lo fabrique.

Continuando con nuestro objetivo: "*encontrar la combinación de estrategias de equilibrio*[18]*, o en forma más sencilla, el equilibrio de Bertrand-Nash cuando las empresas seleccionan los precios*" es necesario obtener la función de mejor respuesta de cada empresa, para lo cual debemos responder la siguiente pregunta: dado p_i, ¿qué valor de p_j maximiza la utilidad de la empresa *j*.

[18] Se llama combinación de estrategias de equilibrio a la estrategia de cada jugador si es la mejor respuesta ante las estrategias de los demás jugadores (en este caso del la empresa rival).

De acuerdo a sus conocimientos del curso de Teoría Microeconómica II, la cantidad que producirá y el precio que cobrará el monopolista será:

$$p = 100 - (q_1 + q_2)$$
$$It_1 = 100q_1 - q_1^2 - q_1q_2$$
$$\frac{\partial It_1}{\partial q_1} = 100 - 2q_1 - q_2$$
$$\frac{\partial It_1}{\partial q_1} = \frac{\partial Ct_1}{\partial q_1}$$
$$100 - 2q_1 - q_2 = 20$$
$$q_1 = 40 - \frac{q_2}{2}$$
$$q_1 = 40$$
$$p = 100 - Q$$
$$p_1 = 60$$

Por lo tanto, si la empresa 2 cobra un precio mayor que el precio de monopolio, la primera empresa cobrará un precio menor que el de su rival, es decir, cobrará un precio igual al de monopolio, es decir, $p_1 = 60$ y su beneficio será $1600.

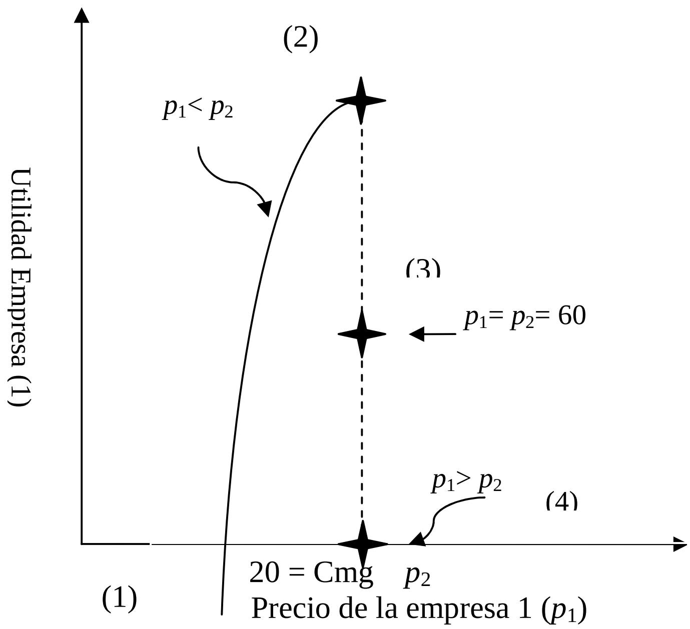
Un segundo escenario se presenta cuando el precio de la segunda empresa es mayor que el costo marginal de 20, pero menor que o igual al precio de monopolio 60. Si la empresa 1 cobra un precio mayor al del monopolio su beneficio será igual que cero.

Finalmente, examinemos el caso en el que la segunda empresa establece un precio exactamente igual al de su rival. Para este último escenario vamos a ver qué pasará si:

$$p_1 = p_2 = 20; \qquad p_1 = p_2 < 20; \qquad 20 < p_1 = p_2 > 60$$

El Gráfico 1 muestra los diferentes niveles de beneficio que obtiene la empresa 1 en el caso de que (i) $p_1 < p_2$, (ii) $p_1 > p_2$ y (iii) $p_1 = p_2$. El precio de la empresa 1 se encuentra en el eje de la abscisa y su utilidad sobre la ordenada. La función estará compuesta por cuatro fases.

Gráfico 1 Función de utilidad de la empresa 1.



La primera fase (1) consiste en una situación donde la empresa 1 decide cobrar un precio menor que el costo por unidad producida $20, su utilidad será negativa. Por otra parte, la segunda fase (2) tiene que ver con una situación donde la empresa 1 cobra un precio menor que el precio de su rival, $p_1 < p_2$, conforme aumenta el precio de la primera empresa, se incrementa su utilidad. En esta fase, el precio que maximiza la utilidad de dicha empresa se encuentra cercano, pero menor[19] que p_2. En la tercera fase (3), cuando la primera empresa selecciona un precio igual al de su competidor, $p_1 = p_2$, su utilidad disminuye a la mitad ya que se dividen igualitariamente la utilidad con su rival. Finalmente, la cuarta fase (4) muestra cómo la utilidad de la empresa 1 será igual a cero cuando elige un precio mayor que el de su rival, $p_1 > p_2$.

Luego de haber presentado el juego en forma normal, es decir, (i) identificar los jugadores, (ii) determinar cuáles serán las estrategias con que cuenta cada jugador y (iii) estimar los pagos asociados a cada una de las estrategias presentadas anteriormente: $p_1 < p_2$; $p_1 > p_2$; $p_1 = p_2$., a continuación determinaremos el equilibrio de Bertrand-Nash.

[19] A pesar de que el precio que maximiza la utilidad de la empresa 1, no se define perfectamente en el Gráfico 1, ya que no se define como un precio arbitrariamente menor a p_2. Empero, vamos a ignorar este punto.

Es decir, la combinación de estrategias de equilibrio cuando las empresas seleccionan precios.

Para ello vamos a resumir los resultados con respecto a la mejor respuesta por parte de la empresa 1, dado el precio de su rival.[20]

- ✓ La mejor respuesta por parte de la empresa 1, si $p_2 > 60$, es $p_2 = 60$.
- ✓ La mejor respuesta de parte de la primera empresa, cuando $p_2 < 20$, es $p_1 > p_2$.
- ✓ La mejor respuesta por parte de la empresa 1, si $20 \leq p_2 \leq 60$, es $p_2 \geq p_1$.
- ✓ La mejor repuesta de parte de la primera empresa, cuando $p_2 = 40$, es cobrar un precio $p_1 \geq p_2$.

A partir del último resultado, podemos ver cómo, si la segunda empresa elige un precio igual a $20, la mejor respuesta por parte de la primera compañía es establecer, al igual que la empresa 2, un precio equivalente a $20. De modo similar, si la empresa 1 cobra un precio equivalente a $20, la mejor respuesta por parte de la segunda empresa es establecer un precio igual a $20 también. En este orden de ideas, la combinación de estrategias de equilibrio es $p_1 = p_2 = 20$. En este equilibrio, la utilidad de cada empresa es igual a cero.

Otra manera de ver por qué la combinación de estrategias de equilibrio $p_1 = p_2 = 20$, es considerar el juego dinámico en el cual las empresas seleccionan los precios alternativamente. Supongamos que la primera empresa elige el precio de monopolio $60. En este caso, su rival ofrecerá un precio menor. La empresa 1 responderá con un precio aún más bajo. Esta dinámica de reducción sucesiva en los precios ofrecidos tendrá un final sólo cuando ambos precios se encuentren en un nivel equivalente al costo por producir la última unidad, es decir, cuando el precio sea igual a $20.

A fin de construir la matriz de pagos que se presenta en la Figura 4, utilizamos estas funciones de utilidad con el objeto de calcular los pagos que recibe cada empresa por cada una de las siguientes combinaciones estratégicas. A partir de la siguiente versión

[20] Recuerden que la mejor función de respuesta de la empresa 2 es simétrica a la de la empresa 1.

simplificada del juego del duopolio, ilustraremos el dilema que enfrentan los oligopolistas al tratar de participar en el juego. Supongamos que las estrategias de la empresa 1 corresponden a las estrategias del jugador fila y las estrategias de la empresa 2 corresponden a las estrategias del jugador columna. Cada una de las cuatro celdas en la Figura 4 representa una de las cuatro combinaciones de estrategias posibles. Las estrategias que enfrentan tanto la empresa 1 como la 2 son: (i) cooperar y producir colectivamente la cantidad que produce el monopolista y (ii) engañar al rival y producir más de lo acordado. A continuación vamos a hallar los beneficios de cada empresa en función de las estrategias elegidas por cada dicha empresa, así como de las estrategias elegidas por la otra empresa.

Figura 4. Matriz de pagos del duopolio.

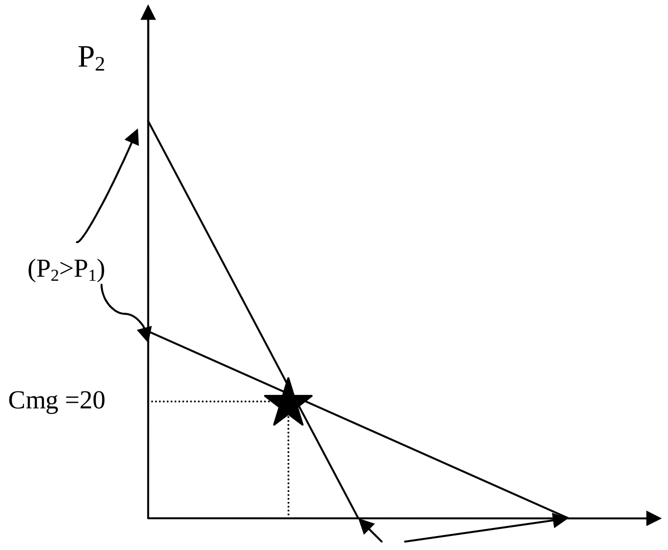
$J_1 \backslash J_2$	60	55
60	800 , 800	(-400) , 1575
55	1575 , (-400)	787.5 , 787.5

Al observar la primera columna de la figura anterior vemos que si la empresa 2 elige producir poco (20) y que el precio sea igual al del monopolio, es decir, 60 (dado que creen que su rival va a producir poco (20)), la mejor respuesta de la empresa 1 es engañar a su rival y producir mucho (25) y que el precio del mercado sea igual a 55. ¿Por qué? Porque gana $1575, mientras que si decide cumplir su promesa y producir poco, gana $800. Si examinamos la segunda columna vemos que si la segunda empresa elige producir mucho (25), la mejor respuesta por parte de la empresa 1 también es producir mucho (25) ya que gana $787.5 en lugar de una perdida de -$400. En consecuencia, se dice que cobrar un precio bajo (es decir, producir mucho (25)) es una estrategia dominante para la primera empresa. Por otra parte, ya que las alternativas de la empresa 2 son exactamente iguales a las de la empresa 1, su mejor respuesta también es cobrar un precio bajo (es decir, producir mucho (25)) sin importar lo que elija la primera empresa. En este sentido, la combinación de estrategias de equilibrio es {55, 55}.

Observe que cada uno de los oligopolistas tiene un incentivo para coludir, es decir, cooperar. Empero, es precisamente la búsqueda ciega del interés egoísta la que conlleva a un equilibrio en el cual ambos jugadores estén peor de lo que estarían si cooperaran. En otras palabras, la mejor respuesta por parte de una empresa rival a la respuesta de cooperar de la otra compañía es engañarla y romper el acuerdo de cooperación. Por lo cual cabe anotar que el equilibrio de Bertrand-Nash no es del todo satisfactorio, ya que primero una empresa reduce su precio para ser más atractivo que su rival esperando captar todo el mercado. Su rival responde bajando su precio, esperando a su vez captar todo el mercado. Cada empresa, en respuesta a lo hace su rival, ofrece un precio menor esperando captar todo el mercado hasta el punto en que el precio es tan bajo que le es indiferente vender a un precio igual a costo marginal o abandonar el mercado, en cuyo caso su utilidad es igual a cero.

Existen otras formas de hallar el equilibrio de Nash, aparte de la algebraica, entre ellas, aplicar el proceso de eliminación iterativa de las estrategias dominadas, o quizás de manera gráfica. Comencemos por explorar la solución gráfica del equilibrio de Nash (Ver Gráfico 2)

Gráfico 2. Solución gráfica del Equilibrio de Nash



A continuación examinemos un tercer modo de hallar este equilibrio de Nash, el cual tiene que ver con la eliminación iterativa de estrategias dominadas. Se dice que la estrategia "*cobrar un precio alto*" esta estrictamente dominada por la estrategia *"cobrar un precio bajo*" (esperando captar todo el mercado), $\pi_1(s^{\circ}, s_2) \succ \pi_1(s^{\bullet}, s_2)$, donde s° corresponde a la estrategia de que la empresa 1 cobre un precio bajo \$55, $s^{\bullet}$ representa la estrategia de cobrar un precio alto \$60 y s_2 especifica un vector de estrategias de la empresa 2, \$55 y

\$60. Encontrarán que la empresa 2, atraviesa lo mismo que su rival, por lo que $\pi_2(s_1, s^{\circ}) \succ \pi_2(s_1, s^{\bullet})$, donde s° corresponde a la estrategia de que la empresa 2 cobre un precio bajo \$55, $s^{\bullet}$ representa la estrategia de cobrar un precio alto \$60 y s_1 especifica un vector de estrategias de la empresa 1, \$55 y \$60. Es decir, existe un s° en s_1 tal que es la mejor respuesta de la empresa 1 a las estrategias predichas por la empresa 2, y viceversa. Por lo tanto el equilibrio de Nash es {55,55}.

Tal predicción puede denominarse de auto-imposición en el sentido que, después de llegar a un acuerdo, las empresas tienen un incentivo claro para decidir cobrar un precio bajo. La combinación estratégica {60,60} es atractiva porque maximiza la utilidad colectiva, pero no es de auto-imposición ya que cuando llega el momento de elegir el precio que va a cobrar cada empresa, cada empresa se ve rentado a cobrar un precio más bajo, es decir elegir 55 y no 60. Al elegir la empresa cobrar un precio equivalente a 55, la empresa maximiza su utilidad individual. Finalmente, si un acuerdo no es de auto-imposición no es un equilibrio de Nash, es decir no es de auto-imposición.

Ejercicios Propuestos:

El problema de los ejidos[21]

Uno de los principios de la economía consiste en que los individuos responden a incentivos. En la mayoría de los casos estos incentivos son privados, por lo que cuando se trata de bienes públicos no puede esperarse que los individuos respondan igual. Una de las razones por las que esto es así, es que sobre los bienes públicos no existen derechos de propiedad lo que hace que todos los individuos se sientan con igual derecho de acceder a ellos. El resultado de este comportamiento es la ineficiencia en la provisión de estos bienes y de hecho la subutilización de los mismos. Ejemplos de este tipo se dan de manera repetida con el medio ambiente, de ahí que se haya bautizado la “tragedia de los comunes” a la sobreutilización de los recursos naturales.

El siguiente ejercicio busca representar una situación en la que el resultado del equilibrio de Nash no es el óptimo social.

[21] Desarrollado a partir de un ejemplo propuesto en Gibbons (1992)

Imagínese el lector una aldea con una pradera para el pastoreo de cabras, los *n* habitantes de este lugar, durante el verano, llevan sus cabras al ejido a pastar. El número de cabras que posee el $n\text{-}ésimo$ campesino es g_n y el número total de cabras en la aldea es $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Mantener y cuidar una cabra tiene un costo igual a c independientemente de cuantas cabras decida tener cada aldeano. Pero una vez las cabras se encuentran en la pradera tiene un costo igual a $v(G)$ por mantenerlas ahí. Mientras las cabras se encuentran en la pradera es necesario que tengan una cantidad mínima de pasto para alimentarse y un espacio para dormir, por lo que la cantidad máxima de cabras que pueden mantenerse en el ejido es $G_{max} : v(G) > 0$ para $G < G_{max}$, pero una vez hay tantas cabras en el ejido que se iguala o se supera la cantidad máxima ocurre que $v(G) = 0$ para $G \geq G_{max}$ por lo que incluir una cabra más en la pradera disminuirá la cantidad de pasto de las demás.

Una vez llega la primavera, el aldeano *i* decide al igual que el resto de sus vecinos cuantas cabras llevará a pastar al ejido. Por lo tanto esta es la estrategia del aldeano *i*. Dado que no se pueden tener en el ejido infinitas cabras, el espacio de estrategias puede definirse como: $[0, G_{max})$. Así, los beneficios obtenidos por el campesino *i* una vez elegido g_i cuando el número de cabras criadas por los demás campesinos es $g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1} ..., g_n$ serán:

$$\pi_i = IT - CT$$
$$\pi_i = pQ - CT$$
$$\pi_i = g_i v(g_1, ..., g_{i-1}, g_i + g_{i+1} ..., g_n) - cg_i$$

Por lo tanto, para el individuo *i*, g_i^* será su mejor estrategia si se cumple que: $(g_i^*, g_{-i}^*) \geq (g_i, g_{-i}^*)$, Donde g_i es el vector de estrategias del jugador *i* a excepción del elemento g_i^*, lo mismo debe ocurrir con el resto de los jugadores. En este caso, denominaremos g_{-i}^* el conjunto de estrategias del resto de los aldeanos, la condición para que g_{-i}^* sea su mejor estrategia es: $(g_i^*, g_{-i}^*) \geq (g_i^*, g_{-i})$ Donde g_{-i} es el vector de las posibles estrategias del individuo –*i*, exceptuando la estrategia g_{-i}^{*}. Así, si $(g_1^*,...,g_n^*)$ constituye un equilibrio de Nash, para cada *i*, debe ser cierto que si cada individuo elige su mejor estrategia con base en las condiciones expuestas arriba, se maximizará su función de utilidad. La condición de primer orden de este problema de optimización es:

$$v(g_i + g_{-i}^*) + g_i v'(g_i + g_{-i}^*) - c = 0$$

donde g_{-i}^* denota $g_1^*,...,g_{i-1}^* + g_{i+1}^* ... + g_n^*$. Sustituyendo g_i^* en la condición de primer orden, sumando todas las condiciones de primer orden de los *n* aldeanos y dividiéndolas por *n* se obtiene:

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0$$

donde G^* representa la sumatoria de las mejores estrategias de cada uno de los aldeanos, $g_1^* + ... + g_n^*$. Por el contrario, el óptimo social, denotado con G^{**}, es una solución de:

$$\max_{0 \le G < 0} Gv(G) - Gc$$

para la cual la condición de primer orden es:

$$v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0$$

La comparación de las dos condiciones de primer orden, la de los aldeanos y la del óptimo social muestran que $G^* > G^{**}$. Por lo anterior, se muestra como se afirmó al inicio de este ejercicio, que en este caso la solución que arroja el equilibrio de Nash implica que cada aldeano puede poner a pastar más cabras de las óptimas socialmente. Por lo tanto, según esta conclusión terminarán en el ejido más cabras de las que se deberían criar. La condición de primer orden para cada individuo muestra los incentivos que tiene un aldeano que ya esta criando g_i cabras, para añadir una más. El valor de cada cabra adicional es $v(g_i + g_{-i}^*)$ y su coste es c. El daño a las cabras ya existentes del aldeano es $v'(g_i + g_{-i}^*)$ por cabra, o $g_i v'(g_i + g_{-i}^*)$ en total. Por lo anterior, se presenta la sobreutilización de los recursos, en este caso del ejido, pues cada aldeano solo es capaz de considerar su situación individual y no prevé las consecuencias de sus acciones en de los demás aldeanos.

El Duopolio de Cournot

En el modelo propuesto por Cournot, existen dos firmas que compiten por tener la mayor participación en el mercado, las dos ofrecen un bien homogéneo, por lo que es imposible para los consumidores diferenciarlos. Las firmas se enfrentan a una curva de demanda lineal y determinan el precio del mercado vía cantidades. La inversa de la curva de demanda se puede expresar como sigue:

$$P = a - Q$$

Además de esto, se supone que ambas firmas se enfrenta a la misma función de costo total $CT = cQ$, donde Q es la producción agregada, es decir, $q_1 + q_2$. En primera instancia es necesario plantear el juego, recuerde que es importante determinar: 1) Cuáles son los jugadores 2) Cuáles son sus estrategias y 3) Cuáles son los pagos que reciben por llevar a cabo sus estrategias. En nuestro caso, sabemos que hay dos jugadores, cuyas estrategias son las diferentes cantidades que pueden producir. Los pagos que obtienen por seguir una determinada estrategia, es lo que necesitamos encontrar. El espacio de estrategias para cada una de las firmas puede definirse como: $S_i = [0, \infty)$ además de esto se supone que una estrategia s_i que pertenezca a este espacio implicará que $q_i \geq 0$. El objetivo de cada una de las firmas es elegir una cantidad determinada de producción que maximice sus beneficios. Es importante recordar que los beneficios de una firma se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\pi_i(q_i, q_j) = IT - CT$$
$$\pi_i(q_i, q_j) = PQ - cQ$$
$$\pi_i(q_i, q_j) = [(a - (q_i + q^*_j)q_i) - cq_i]$$
$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[a - (q_i + q^*_j) - c]$$

Cabe anotar que el beneficio que espera obtener la firma 1 con un determinado nivel de producto, esta basado en la idea que tiene esta firma sobre lo que hará la firma 2, q^*_j representa este supuesto. Por lo tanto, la elección que cada firma hace sobre su nivel de producción será un equilibrio de Nash sí se cumple que para cada una de ellas:

$$p_i(s^*_i, s^*_j) \geq p_i(s_i, s^*_j)$$

Donde s_i es una de las estrategias pertenecientes al vector S_i exceptuando en este caso s^*_i. Intuitivamente, esto quiere decir que la elección de una estrategia de producción determinada, dado que se tiene una idea de lo que hará la otra firma, deberá ser la mejor del conjunto de posibles estrategias de la firma. Si esto es así, será cierto que la elección de q_i maximizará los beneficios de la firma:

$$\max_{s_i \in S_i} p_i(s_i, s_j)$$

O para cada una de las firmas:

$$\max_{0 \le q_i < \infty} \pi i(q_i, q_j) = \max_{0 \le q_i < \infty} q_i \left[a - (q_i, q_j^*) - c\right]$$

De aquí se obtiene la condición de primer orden que soluciona el problema de maximización:

$$q_1^* = \frac{1}{2}\left(a - q_2^* - c\right) \text{ y } q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c)$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones se llega a:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{(a-c)}{3}$$

Este resultado implica que cada firma tiene incentivos para querer ser la única en el mercado por lo que si su rival no produjese nada, la firma en cuestión producirá bajo condiciones de monopolio, es decir:

$$\pi_1(q_1, 0) = \left[(a - (q_1 + 0))q_1 - cq_1\right]$$
$$\max_{0 \le q_i < 0} \pi_1(q_1, 0) = a - 2q_1 - c$$
$$q_1 = q_m \frac{(a-c)}{2}$$

Los beneficios que obtendría la firma por seguir esta estrategia serían: $\pi_1(q_m, 0) = \frac{(a-c)^2}{4}$, pero como existen dos firmas en el mercado, lo mejor para cada una de ellas seria producir una cantidad igual a $q_m / 2$ de tal forma que, la producción agregada, correspondiera a la producción de monopolio. Pero a estas cantidades de producción el precio del mercado es tan alto, que las firmas se ven incentivadas a producir más a pesar de que con esta conducta el precio del mercado disminuye. Puede demostrarse por medio de la ecuación de q_2^*, que cuando la firma 1 decide producir una cantidad igual a $q_m / 2$ la mejor respuesta de la firma 2, es no producir esta misma cantidad. Por esta razón, en el equilibrio termina produciéndose una cantidad mayor.

Bibliografía

- Shubik., Martín. 1984. Economía Política: Un enfoque desde el punto de vista de la teoría del juego*.* Textos de Economía Fondo de Cultura Económica.

- Dutta K., Prajit. 1999. Strategies and Games Theory and Practice.

- Neumann Von John, Morgenstern Oskar. 1964. Theory of Games and Economic Behavior. Science Editions.

- Gardner Roy. 2003. Games for Business and Economics Segunda Edición. WILEY.

- Gibbons Robert. 1992. Un Primer Curso de Teoría de Juegos.