INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO

Julio César Alonso C.

No. 7

Julio 2005

APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

No. 7, Julio de 2005

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición

Stephanie Vergara Rojas

Gestión Editorial

Departamento de Economía - Universidad ICESI

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 398. Fax: 5551441

Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

UNIVERSIDAD ICESI
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO

Julio César Alonso[1]

Julio de 2005

Resumen

Este documento tiene como objetivo brindar al estudiante una breve introducción a la interpretación y el cálculo del Valor en Riesgo (VaR) de un portafolio. Se presenta el cálculo del VaR bajo el supuesto de una varianza constante así como bajo la posibilidad de una varianza no constante. Adicionalmente a la exposición teórica, se presentan ejemplos y una hoja de Excel que le permite al lector seguir la exposición. El documento está dirigido principalmente a estudiantes de últimos semestres de pregrado, pero por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en el cálculo del VaR.

Palabras claves: Valor en Riesgo, VaR, volatilidad no constante, valoración del Riesgo

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

[1] jcalonso@icesi.edu.co
Última modificación: 02/02/2007

Tabla de Contenido

1. Introducción[2]

El Valor en Riesgo (VaR por su nombre en inglés)[3] se ha convertido en una de las herramientas más empleadas para la medición de riesgo por reguladores, agentes y académicos. Esta popularidad, tiene su origen a principios de los 80 cuando las principales firmas financieras de los países desarrollados empleaban el VaR como medida del riesgo de sus portafolios. A mediados de los 90 esta popularidad se potencializó por el interés de los reguladores en el VaR como medida de riesgo. En abril de 1995, el Comité de Basilea para la Supervisión Bancaria, propuso permitir a los bancos calcular sus requerimientos de capital para cubrir su riesgo de mercado por medio de sus propios modelos VaR. En junio de ese año, la Reserva Federal de los Estados Unidos adoptó una medida similar. En diciembre de ese mismo año, la US Securities and Exchange Commission inició la discusión de una propuesta de emplear medidas de riesgo corporativo, entre las cuales se incluía el VaR. Después de la segunda mitad de los 90, el VaR adquirió mayor reconocimiento en el mundo como medida del riesgo de mercado de activos o portafolios.

Una de las razones para esta gran reputación es la sencillez del concepto y, en especial, lo intuitivo de su interpretación al ser ésta la medida (estimación) de la máxima pérdida posible para un horizonte de tiempo y un nivel de significancia determinados, bajo circunstancias consideradas como “normales” en el mercado.

Es decir, el VaR corresponde a algo así como *el peor escenario posible para un activo o portafolio dadas unas condiciones normales de mercado, un horizonte de tiempo determinado y un nivel de confianza determinado*. En palabras de Benninga (2000) “el VaR responde la pregunta: ¿Cuánto puedo perder con una probabilidad (1-α) en un horizonte preestablecido?” (Pág. 209). O, como lo expone Hull (2002), el VaR permitirá realizar afirmaciones como: “estamos seguros en (1-α)% que no perderemos más de

---

[2] Este documento puede ser replicado con los datos del archivo Apuntes1.xls, disponible en la Pág. del Departamento de Economía de la Universidad Icesi: http://www.icesi.edu.co/~econego/depto/publicaciones/apuntes.htm

[3] También es conocido como VeR, por sus siglas en español (Valor En Riesgo).

X dólares en los próximos *N* días" (Pág. 378).

Así, el VaR sintetiza en una única medida el riesgo total de un portafolio, facilitando la toma de decisiones. Por ejemplo, el VaR servirá a los reguladores como la Superintendencia Financiera para determinar el capital que deben mantener los intermediarios financieros de tal forma que sus reservas concuerden con el riesgo que están asumiendo. Similarmente, los mismos intermediarios financieros pueden emplear el VaR para determinar el riesgo que corre cada uno de sus portafolios o “traders”.

Antes de entrar en el detalle del cálculo del VaR, es necesario resaltar la importancia de escoger dos parámetros para nuestros cálculos:

- El horizonte de tiempo (N)
- El nivel de confianza (1- α)%

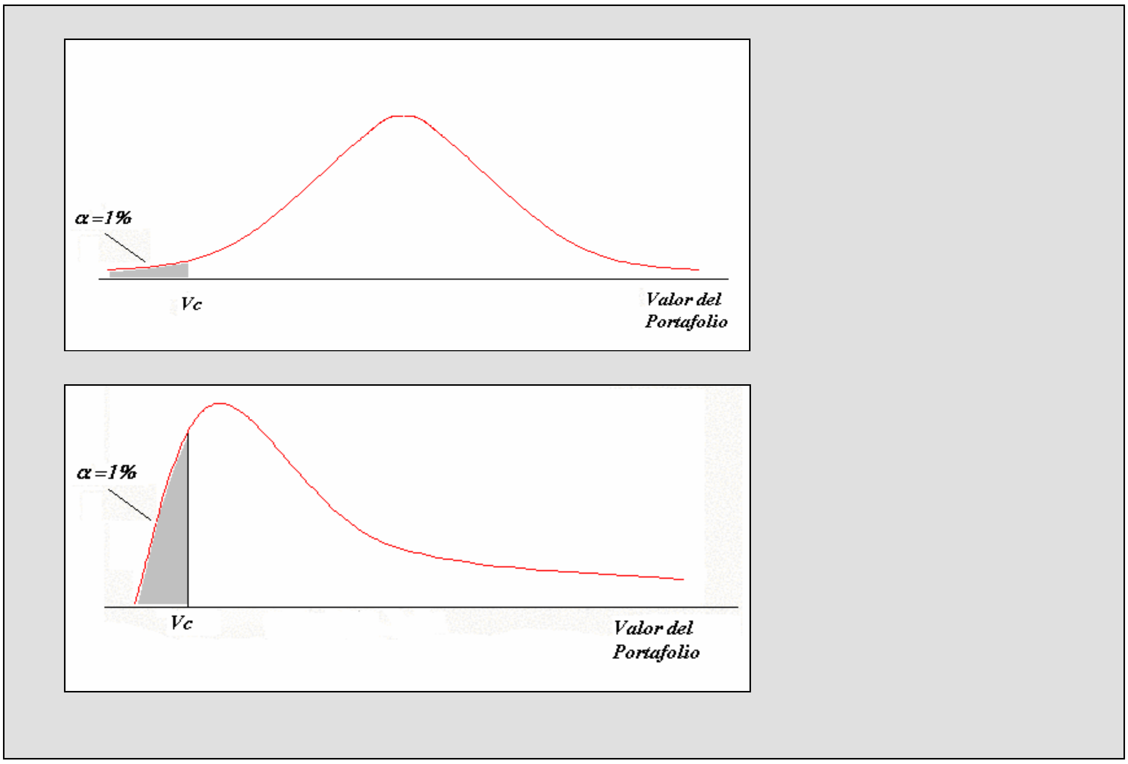
El horizonte de tiempo es escogido dependiendo del uso que se le vaya a dar a esta medida. Por ejemplo, si estamos calculando el VaR para una mesa de dinero bastante activa que tranza un gran volumen de activos en cuestión de horas, entonces el horizonte del VaR puede ser de un par de horas. Si por el contrario, estamos analizando el riesgo de un fondo de pensiones, el horizonte puede ser de hasta un año. Cómo se discutirá más adelante, la selección del horizonte de tiempo puede afectar el modelo y los supuestos que se empleen al momento del cálculo del VaR.

Así mismo, la selección del nivel de confianza también depende del uso que se le vaya a dar al VaR. Por ejemplo, si lo que se desea es satisfacer los requerimientos de un regulador, normalmente el nivel de confianza es alto: 99%. Por otro lado, si lo que se desea es emplear el VaR para control interno del manejo del riesgo y su exposición a éste, típicamente se emplea un nivel de confianza del 95% (Benninga (2000)). En la práctica, los niveles de confianza más empleados corresponden al 95%, 99% y 99.9%.

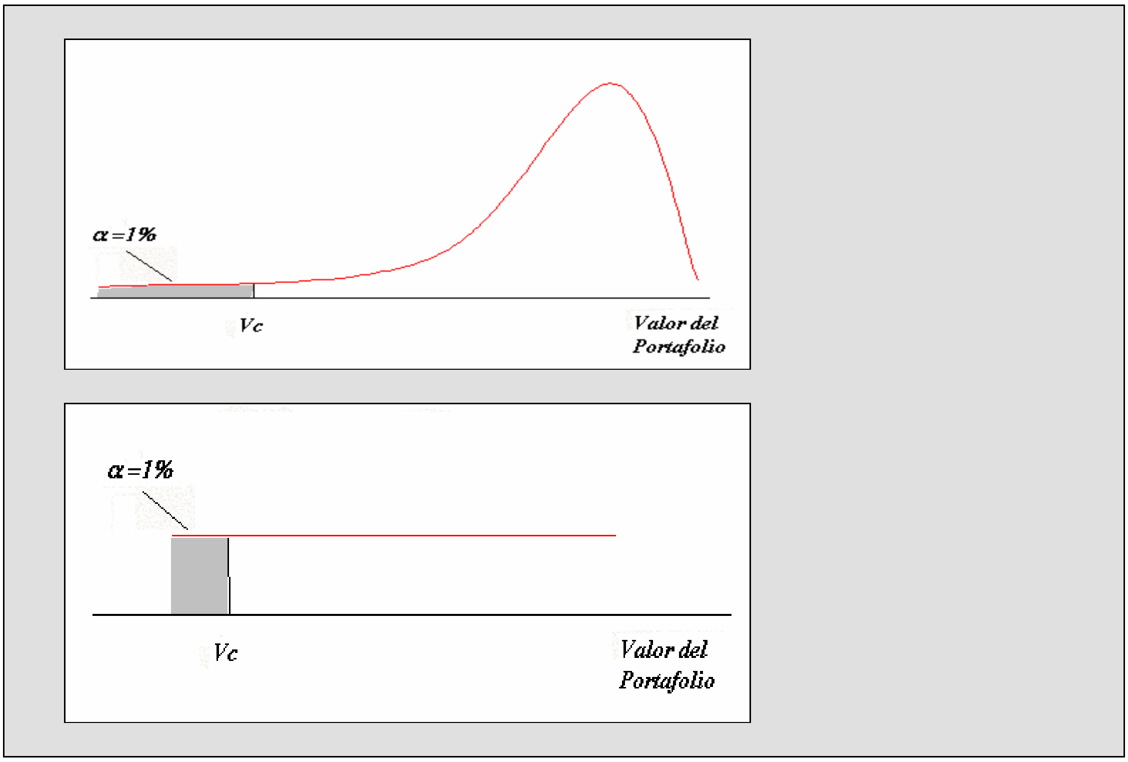
En la jerga del VaR, se escuchan afirmaciones como: “un administrador de un portafolio tiene un VaR diario de US$1 millón con 99% de confianza”. Esta afirmación es equivalente a decir que sólo existe un chance de 100 de obtener una perdida diaria mayor a US$1 millón cuando el mercado se encuentra en condiciones normales.

Antes de entrar en los detalles del cálculo, es importante reafirmar la intuición detrás del VaR. Recuerden que lo que deseamos es poder responder a la pregunta: ¿cuánto podremos perder con una probabilidad de (1-α)% en los próximos N días? Noten que esta pregunta es equivalente a determinar el percentil α más bajo de la distribución de las posibles pérdidas que pueden ocurrir durante un horizonte de tiempo específico. Por ejemplo, supongamos que consideraremos un horizonte de un día y un nivel de confianza del 99% (α =1%), entonces al final del periodo el valor más bajo que podría tomar el portafolio con un 99% de confianza está dado por el punto V_c (valor de corte) Ver Gráfica 1-1. Por lo tanto, si el portafolio tiene un valor de V_0 hoy, lo que se podría perder es $VaR = V_0 - V_c$.

Gráfica 1-1. Representación Gráfica del VaR para diferentes distribuciones



Gráfica 1-2. Representación Gráfica del VaR para diferentes distribuciones (Cont).



Del anterior ejemplo gráfico, queda claro que el VaR no sólo dependerá del horizonte de tiempo y el nivel de confianza, sino también de la distribución que siguen los posibles valores que tomaría el portafolio. En la práctica, se emplean diferentes métodos para calcular el VaR que básicamente pueden ser clasificados en dos grandes tipos: métodos en los que se supone una distribución de los datos (métodos paramétricos) y métodos basados en la historia que no suponen ninguna distribución (métodos no paramétricos). En este capitulo, se discutirá cómo calcular el VaR para un portafolio con los dos tipos de métodos, pero antes discutiremos un ejemplo sencillo para un portafolio de un solo activo.

2. Métodos para el cálculo del VaR para un activo: Un ejemplo sencillo.

Supongamos que usted es un administrador de un portafolio de un activo cuya rentabilidad media es del 15% anual con desviación estándar del 20%. El portafolio se encuentra hoy valorado en $100 millones de pesos ($V_0$=$100M.) y usted desea responder a la siguiente pregunta:

Con un 99% de confianza, ¿cuál es la máxima pérdida posible al final del año?

Para responder esta pregunta necesitamos conocer los posibles valores que puede tomar nuestro portafolio al final del año y la probabilidad asociada a cada uno de estos posibles valores; es decir, su distribución de probabilidad. Para conocer la función de probabilidad, podemos adoptar dos opciones:

- suponer un comportamiento, o
- emplear los datos históricos para inferir de ellos un comportamiento.

En el caso de suponer que una distribución, o más bien una familia de distribuciones, replican el comportamiento de los posibles valores del portafolio, tendremos que estimar o conocer unos parámetros (como por ejemplo la media y la varianza) que permitirán hacer los cálculos requeridos para responder nuestra pegunta anterior. Dado que con este tipo de métodos es necesario suponer una distribución y estimar o conocer unos parámetros de la distribución, a esta aproximación se le conoce como método paramétrico.

Por otro lado, si no suponemos una distribución y se emplea la información histórica para determinar de forma empírica la distribución, no será necesario conocer los parámetros y por tanto se conoce esta aproximación como no paramétrica. En este caso, dejamos que los datos "cuenten" por si mismos qué tipo de distribución siguen. A continuación se discuten ambas aproximaciones.

2.1. Método paramétrico: El modelo Normal

Como se acaba de mencionar, los métodos paramétricos implican suponer una distribución o modelo que sigue el comportamiento del valor del portafolio. Noten que esta distribución puede ser muy diferente dependiendo de cada caso; pero, en general, es la distribución más usada.

Supongamos que los rendimientos del próximo periodo (R_{t+1}) del único activo que compone nuestro portafolio sigue una distribución normal, es decir, dado nuestro problema inicial tendremos que: $R_{t+1} \sim N\left(15\%,(20\%)^2\right)$.

Dado que nuestro valor inicial es de \$100M. (V_0=\$100M), entonces tenemos que el valor esperado del rendimiento al final del próximo periodo será:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{E}\left[\mathrm{V_0}\left(1+R_f\right)\right]$$

Dado que V_0 es un valor conocido en t y por tanto:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{V_0}\mathrm{E}\left[\left(1+R_f\right)\right]$$

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{V_0}\left(1+\mathrm{E}\left[R_f\right]\right)=\mathrm{V_0}\left(1+\mu\right)$$

Para nuestro caso, dado que $E\left[R_{t+1}\right]=15\%$, tendremos:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=100\left(1+15\%\right)=115$$

En otras palabras, el valor medio del valor del portafolio para el siguiente año será de \$115 millones.

Similarmente, tenemos que la respectiva varianza del valor del portafolio será:

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_0}\left(1+R_f\right)\right]=\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_0}R_f\right]$$

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{V_0^2}\mathrm{Var}\left[R_f\right]$$

Y por tanto, la desviación estándar será:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_f}\right]}=\mathrm{V_0}\sqrt{\mathrm{Var}\left[R_f\right]}$$

Lo cual implica, para nuestro ejemplo, que la desviación estándar del valor del portafolio para el siguiente año será:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_f}\right]}=100\sqrt{\mathrm{Var}\left[R_f\right]}=100\cdot 20\%=20$$

Es decir, la desviación estándar del valor del portafolio será de \$20 Millones. Por lo tanto, el valor final del portafolio (V_f) seguirá una distribución normal con media \$115

M. y desviación estándar de \$20M., es decir:

$$V_f \sim N\left(115, (20)^2\right)$$

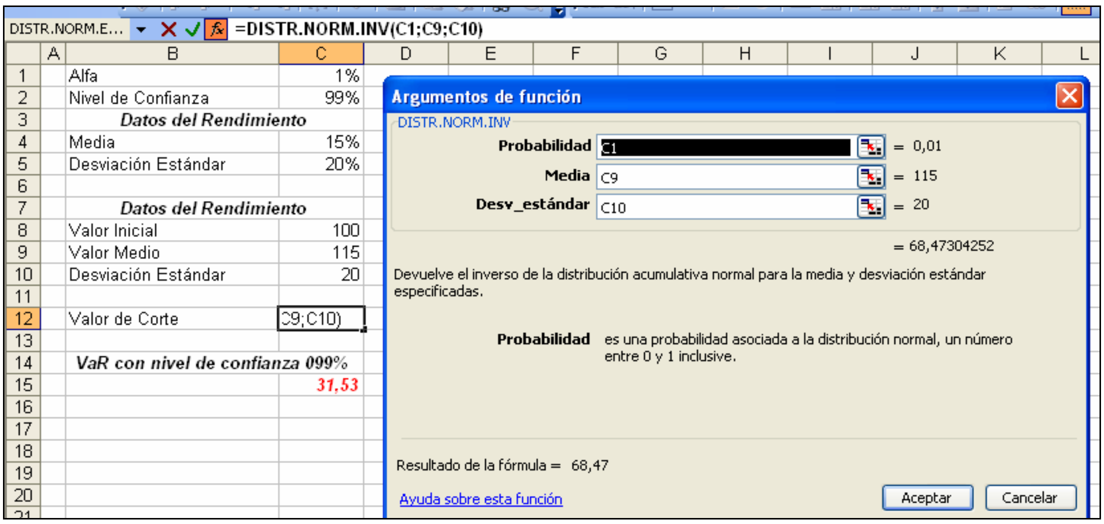
Ahora, responder nuestra pregunta es muy sencillo. Noten que la respuesta implica encontrar un valor de corte (V_c) tal que exista una probabilidad del 1% de que los valores del portafolio caigan por debajo de ella (Ver el primer panel de la Gráfica 1-1); es decir, el V_c corresponde a encontrar el mínimo valor del portafolio que garantice que de 100 veces sólo una el portafolio puede tomar un valor menor a este. Una vez conocido este número, se lo podemos restar al valor actual de nuestro portafolio (V_0=\$100M) para encontrar la máxima pérdida posible al final del año con un 99% de confianza, es decir, el VaR.

Estos cálculos se pueden realizar de forma sencilla en Excel por medio de la función "*DISTR.NORM.INV*" (Ver Recuadro 1). En este caso, tenemos que V_c corresponde a \$68.47 millones. Por tanto, el VaR con un nivel de confianza del 99% esta dado por:

$$VaR = V_0 - V_c = 100 - 68.47 = 31.53$$

Es decir, sólo existe un chance de 100 de obtener una perdida anual mayor a \$31.53 millones cuando el mercado se encuentra en condiciones normales.

Recuadro 1.



2.2. Métodos no paramétricos - Simulaciones Históricas

Ahora consideremos el caso en que no se desee hacer ningún supuesto sobre la distribución de los rendimientos, en este caso dejaremos que los datos nos cuenten qué distribución siguen. Para emplear estos métodos normalmente será necesaria una buena cantidad de información.

Supongamos que contamos con los precios de rendimientos de un portafolio conformado por un único activo. Es decir, contamos con una serie de rendimientos como la siguiente:

$$R_1, R_2, ..., R_n \tag{1}$$

Además, supongamos que el valor actual del portafolio es de V_0. Observen que cada uno de estos rendimientos corresponden a "un escenario" diferente, en otras palabras, corresponden a un posible "estado del mundo".

Ahora, podemos a partir de estos *T* escenarios, determinar cuál sería el valor de nuestro portafolio para el próximo período bajo los diferentes escenarios, es decir, tendremos:

$$V_0(1+R_1), V_0(1+R_2), ..., V_0(1+R_n) \tag{2}$$

Esto nos provee de una distribución empírica de posibles valores que puede tomar el portafolio en el próximo período. A partir de esta distribución, podemos detectar el valor de corte (V_c) tal que este sea superior al α % de los escenarios.

Empleemos un ejemplo para ilustrar el anterior cálculo. Suponga que cuenta con 250 datos del rendimiento diario de un activo (Ver nota de página numero 2) y que cuenta, además, con un portafolio de un único activo por valor actual de \$100M (V_0=\$100M) (Ver

Recuadro **2**. Se han escondido varias filas). Además, deseamos responder la pregunta: Con un 99% de confianza, ¿cuál es la máxima pérdida posible al final del próximo día?

Recuadro 2.

A11

	A	B	C	D	E	F	G	H
1						*Datos del Portafolio*		
2		Día	Rendimiento			Valor Inicial	100	
3		1	-0.7476%					
4		2	-0.8838%					
5		3	0.1149%					
6		4	-0.4236%					
7		5	-0.1982%					
8		6	0.7785%					
9		7	1.0992%					
10		8	0.6636%					
243		241	0.1598%					
244		242	-0.2709%					
245		243	-0.3722%					
246		244	-0.1898%					
247		245	0.1591%					
248		246	0.1888%					
249		247	0.0553%					
250		248	0.0416%					
251		249	-0.0176%					
252		250	-0.0934%					
253								
254								

A partir de estos rendimientos podemos calcular el valor que tomará nuestro portafolio bajo estos 250 diferentes "Escenarios" (Ver Columna D del Recuadro 3).

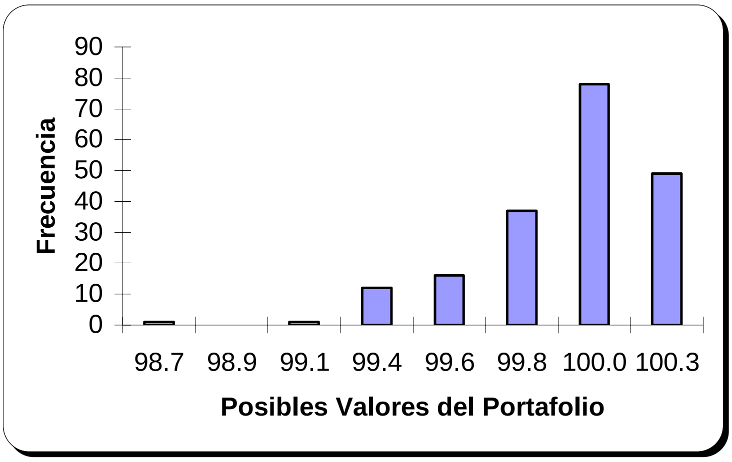
Recuadro 3.

NORMINV =$G$2*(1+C3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Día	Rendimiento	Portafolio bajo diferntes		*Datos del Portafolio*		
2						Valor Inicial	100	
3		1	-0.7476%	=$G$2*(1+C3)				
4		2	-0.8838%	99.116				
5		3	0.1149%	100.115				
6		4	-0.4236%	99.576				
7		5	-0.1982%	99.802				
8		6	0.7785%	100.779				
9		7	1.0992%	101.099				
10		8	0.6636%	100.664				
11		9	0.7152%	100.715				
12		10	0.1310%	100.131				
13		11	0.9357%	100.936				
14		12	1.0266%	101.027				
15		13	0.4667%	100.467				
16		14	-0.6913%	99.309				
236		234	-0.2124%	99.788				
237		235	-0.2989%	99.701				
238		236	-0.4583%	99.542				
239		237	-0.0760%	99.924				
240		238	-0.3633%	99.637				
241		239	-0.1200%	99.880				
242		240	0.1857%	100.186				
243		241	0.1598%	100.160				

Como lo discutimos anteriormente, esto permite tener una distribución empírica de los posibles valores futuros del portafolio. Intuitivamente, noten que el histograma de estos 250 valores futuros del portafolio puede dar una idea del comportamiento esperado del portafolio a partir de la historia de los rendimientos (Ver Gráfica 2-1).

Gráfica 2-1. Histograma del Valor del Portafolio bajo 250 diferentes escenarios



Así, el valor de corte será aquel que asegure que el 1% de los escenarios (valor del portafolio bajo cada escenario) están por debajo de él. En este caso, dado que tenemos 250 datos, el 1% de los datos corresponden a 2.5; podemos redondear este número por lo bajo a 2. Es decir, el valor de corte (V_c) corresponde, en este caso, al portafolio que garantice que únicamente existen dos portafolios con menor valor que él.

Para encontrar este portafolio, podemos emplear Excel para ordenar los datos de menor a mayor empleando el criterio "Portafolio bajo diferentes Escenarios". De esta manera, el V_c corresponderá al tercer escenario ordenado, pues este garantiza que dos observaciones están por debajo de él. En este caso, tenemos que $V_c = 99.309$. Otra opción más rápida es calcular el primer percentil de la distribución de los posibles escenarios.

Por tanto, el VaR con un nivel de confianza del 99% esta dado por:

$$VaR = V_0 - V_c = 100 - 99.309 = 0.691$$

Es decir, sólo existe un chance de 100 de obtener una perdida diaria mayor a $691 mil si el mercado se encuentra en condiciones normales.

3. VaR para un portafolio con más de un activo.

3.1. Método paramétrico

En principio, la idea detrás del cálculo de un VaR es muy sencilla, tal como lo estudiamos en las secciones anteriores y en especial en la sección 2.1. Cuando consideramos un portafolio conformado por más de un activo, tendremos que tener en cuenta no sólo los rendimientos esperados y sus correspondientes desviaciones estándar, sino también las relaciones que existen entre ellas. Así mismo, no solamente se necesitará asumir un comportamiento (distribución conjunta) de las series sino también necesitaremos calcular más parámetros, pues no solamente requeriremos las medias y desviaciones estándar sino también de las covarianzas. Así, en este caso existe un problema práctico al momento de implementar el cálculo del VaR para un portafolio: La estimación de los parámetros de la distribución conjunta de cada uno de los activos que componen el portafolio.

En este caso, supongamos que contamos con tres activos: A_1, A_2 y A_3; cada uno con media y varianzas dadas por μ_1, μ_2, μ_3, σ_1^2, σ_2^2 y σ_3^2, respectivamente. Así mismo, tendremos que la matriz de varianzas y covarianzas para cada uno de los tres portafolios corresponde a:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde $\sigma_{ij} = Cov\left[A_i, A_j\right]$. Además, supongamos que la participación en cada uno de los tres activos en el portafolio de valor inicial V_0 corresponde respectivamente a: q_1, q_2 y q_3.

Así, tenemos que el rendimiento esperado del portafolio ($E\left[R_{portafolio}\right]$) será:

$$E\left[R_{portafolio}\right]=q_1\mu_1+q_2\mu_2+q_3\mu_3 \tag{4}$$

Es decir, el rendimiento esperado del portafolio corresponderá al promedio ponderado de las rentabilidades esperadas de cada uno de los activos. En este caso, será mucho más fácil emplear una notación matricial para expresar (4), es decir,

$$E\left[R_{portafolio}\right]=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}=q_1\mu_1+q_2\mu_2+q_3\mu_3 \tag{5}$$

También es fácil demostrar que la varianza del rendimiento del portafolio ($Var\left[R_{portafolio}\right]$) será:

$$Var\left[R_{portafolio}\right]=\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23}\\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}^T \tag{6}$$

Ahora, suponiendo que los rendimientos de los tres activos siguen una distribución normal multivariada, podemos concluir que el rendimiento del portafolio seguirá una distribución normal con media $E\left[R_{portafolio}\right]$ y varianza $Var\left[R_{portafolio}\right]$, es decir,

$$R_{portafolio}\sim N\left(E\left[R_{portafolio}\right]_i,Var\left[R_{portafolio}\right]\right) \tag{7}$$

A partir de este resultado podemos calcular el VaR de la misma manera que lo habíamos hecho anteriormente.

Para ilustrar este método, supongamos que se cuenta con un portafolio cuyo valor inicial es de \$100M (V_0=\$100M). Además, supongamos que (corresponden a mediciones diarias).

$$\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.25 & 0.35\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.12\\ 0.15\end{bmatrix} \text{ y } S=\begin{bmatrix}0.1 & 0.04 & 0.03\\ 0.04 & 0.2 & -0.04\\ 0.03 & -0.04 & 0.6\end{bmatrix}$$

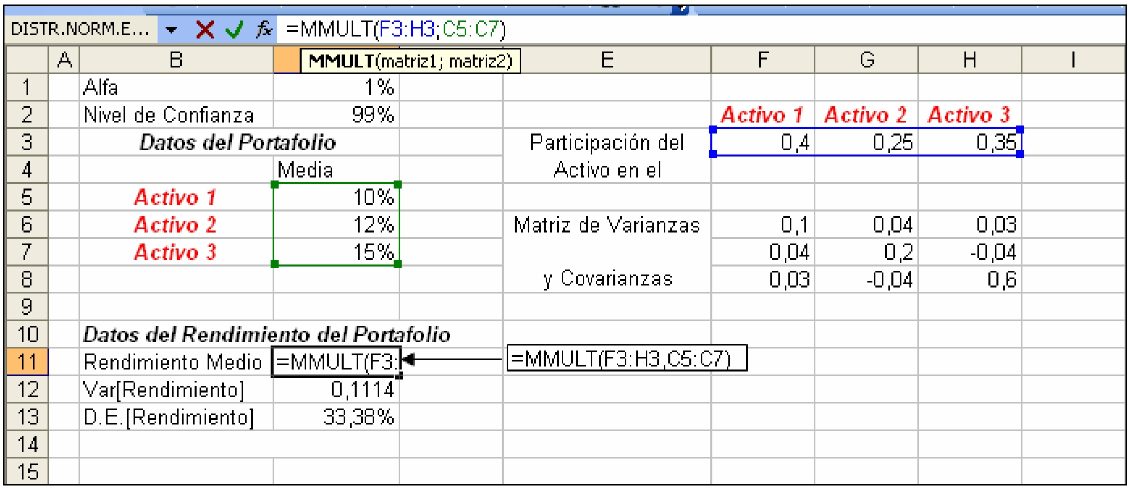
Recuerden que queremos responder a la pregunta: Con un 99% de confianza, ¿cuál es la máxima pérdida posible al final del año? Para responder esta pregunta, será necesario encontrar el rendimiento medio y la desviación estándar del rendimiento del portafolio, en otras palabras necesitamos emplear las fórmulas (5) y (6). Estas operaciones las podemos realizar fácilmente por medio de Excel.

Empecemos por el cálculo de la rentabilidad media, es decir:

$$E\left[R_{portafolio}\right] = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Esta operación se puede realizar situándonos en la celda donde queremos reportar este resultado (por ejemplo C11) y empleando la opción para multiplicar matrices (MMULT). En este caso tendremos "*MMULT(F3:H3,C5:C7)*", lo cual multiplicará la matriz (fila) que se encuentra en las celdas F3 a H3 con la matriz (columna) que se encuentra en las celdas C5 a C7 (Ver Recuadro 4).

Recuadro 4.



DISTR.NORM.E... =MMULT(F3:H3;C5:C7)

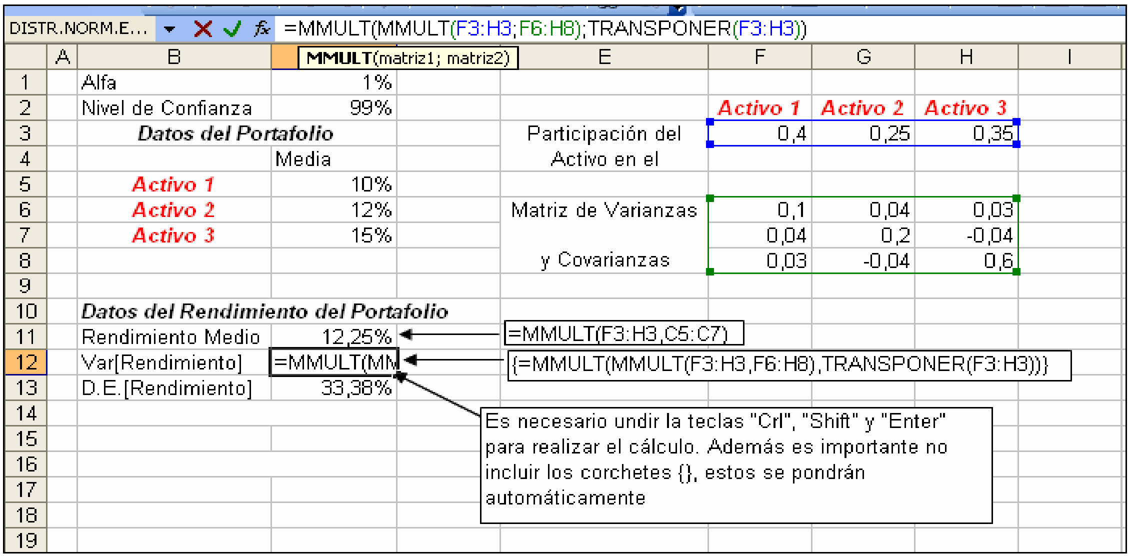
	A	B	MMULT(matriz1; matriz2)		E	F	G	H	I
1		Alfa	1%						
2		Nivel de Confianza	99%			*Activo 1*	*Activo 2*	*Activo 3*	
3		*Datos del Portafolio*			Participación del	0,4	0,25	0,35	
4			Media		Activo en el				
5		*Activo 1*	10%						
6		*Activo 2*	12%		Matriz de Varianzas	0,1	0,04	0,03	
7		*Activo 3*	15%			0,04	0,2	-0,04	
8					y Covarianzas	0,03	-0,04	0,6	
9									
10		*Datos del Rendimiento del Portafolio*							
11		Rendimiento Medio	=MMULT(F3:		=MMULT(F3:H3,C5:C7)				
12		Var[Rendimiento]	0,1114						
13		D.E.[Rendimiento]	33,38%						
14									
15									

En este caso, tendremos que la media del rendimiento del portafolio será 12.25%. Ahora, para calcular la Varianza del rendimiento del portafolio, tendremos que realizar el siguiente cálculo:

$$Var\left[R_{portafolio}\right]=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^T$$

Esto se puede realizar por medio de la siguiente fórmula: “*=MMULT(MMULT(F3:H3,F6:H8),TRANSPONER(F3:H3))*”. Dado que este corresponde a una multiplicación de matrices, será necesario que después de introducir esta fórmula usted haga clic simultáneamente a las teclas “Ctrl”, “Shift” y “Enter”. Asegúrese que entiende la operación que está realizando (Ver Recuadro 5). En este caso, tenemos que la $Var\left[R_{portafolio}\right]=0.1114$. Por tanto, la desviación estándar del rendimiento del portafolio será la raíz cuadra de este resultado, es decir, $\sqrt{0.1114}=33.38\%$.

Recuadro 5.



Siguiendo la misma lógica empleada en la sección 2.1, tenemos que el valor medio del portafolio para el siguiente período será:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=\mathrm{V_0}\left(1+\mathrm{E}\left[R_{portafolio}\right]\right)$$

En este caso tenemos que:

$$\mathrm{E}\left[\mathrm{V_f}\right]=100\left(1+12.25\%\right)=112.25$$

Similarmente, la desviación estándar del portafolio será:

$$\sqrt{\mathrm{Var}\left[\mathrm{V_f}\right]}=\mathrm{V_0}\sqrt{\mathrm{Var}\left[R_f\right]}=100\sqrt{33.38\%}=57.77$$

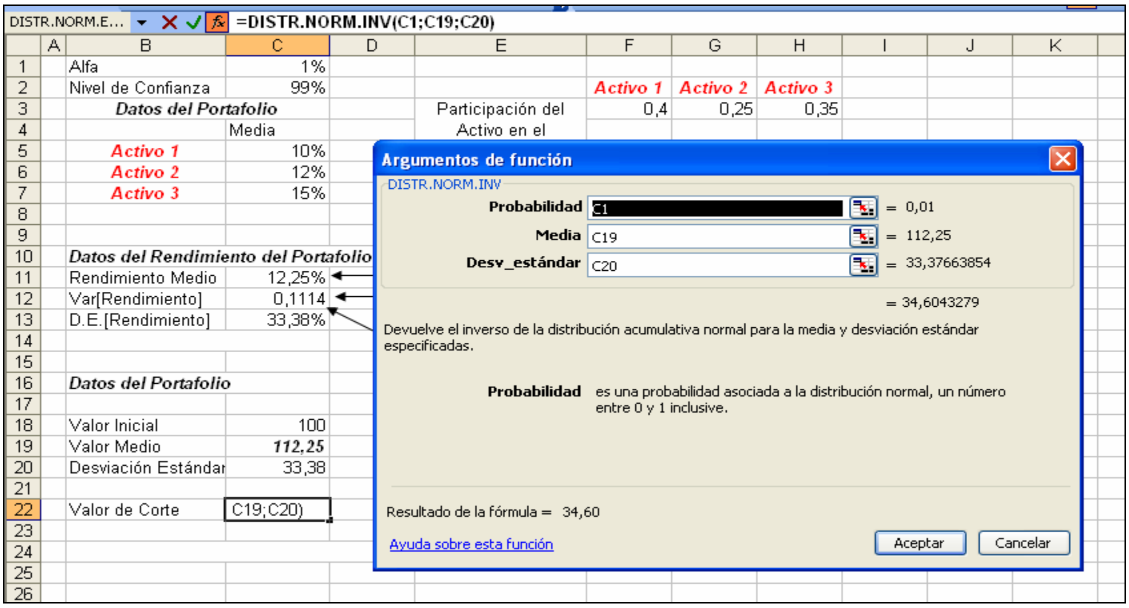
De esta manera, la desviación estándar del valor del portafolio será de $57.77 Millones y su media será 112.25 Millones. Por lo tanto, tendremos que el valor final del portafolio (V_f) seguirá una distribución normal con media $112.25M. y desviación estándar de $57.77M., es decir:

$$V_f \sim N\left(112.25,(57.77)^2\right)$$

Ahora, responder a nuestra pregunta implicará encontrar el valor de corte (V_c) tal que exista una probabilidad del 1% para que los valores del portafolio caigan por debajo de ella (Ver el primer panel de la Gráfica 1-1). Es decir, V_c corresponde al valor del portafolio que garantiza que de 100 veces sólo una el portafolio puede tomar un valor menor a este.

Como lo discutimos anteriormente, estos cálculos se pueden realizar de forma sencilla en Excel por medio de la función "*DISTR.NORM.INV*" (Ver Recuadro 6).

Recuadro 6



3.2. Método no paramétrico

Un método no paramétrico, muy sencillo para calcular el VaR de un portafolio de más de un activo, implica una generalización del método estudiado en la sección 2.1.

Supongamos que contamos con un portafolio de valor V_0 compuesto por tres activos: A_1, A_2 y A_3. Además, la participación de cada uno de los tres activos corresponde a q_1, q_2 y q_3, respectivamente. Ahora, suponga que cuenta con una serie lo suficientemente grande de los rendimientos para cada uno de los tres activos, es decir:

$$\begin{matrix} R_{1,1}, R_{1,2}, R_{1,3} \\ R_{2,1}, R_{2,2}, R_{2,3} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ R_{n,1}, R_{n,2}, R_{n,3} \end{matrix} \tag{9}$$

En otras palabras, contaremos con n diferentes "escenarios" de rendimientos, por lo que sólo necesitamos valorar el portafolio actual con las participaciones actuales en los diferentes escenarios y seguir el mismo procedimiento indicado en la sección 2.2.

Empleemos nuevamente un ejemplo para ilustrar este procedimiento. Supongamos que contamos con 250 observaciones de la rentabilidad diaria de tres activos (Ver nota de página número 2) y, además, tenemos que el valor actual del portafolio es de \$100M (V_0=\$100M) con una participación de cada activo dada por:

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.25 & 0.35 \end{bmatrix}$$

(Ver Recuadro 7. Se han escondido varias filas)

A partir de esta información podemos encontrar el valor que tomaría el portafolio para los 250 diferentes escenarios. (Ver Recuadro 8)

Recuadro 7.

A17 | fx

	B	C	D	E	F	G	H	I
4								
5	Día	Rendimiento Diario			Portafolio bajo		Datos del Portafolio	
6		Activo 1	Activo 2	Activo 3	diferentes Escenarios		Valor Inicial	100
7	1	-0.7476%	-0.166%	1.147%				
8	2	-0.8838%	0.222%	0.878%				
9	3	0.1149%	-0.011%	-0.071%				
10	4	-0.4236%	-0.162%	-0.587%				
11	5	-0.1982%	0.156%	0.111%				
12	6	0.7785%	-0.015%	-0.254%				
13	7	1.0992%	0.021%	0.160%				
14	8	0.6636%	-0.534%	0.000%				
15	9	0.7152%	-0.112%	0.000%				
16	10	0.1310%	0.060%	-0.198%				
247	241	0.1598%	-0.314%	0.044%				
248	242	-0.2709%	0.146%	-0.296%				
249	243	-0.3722%	0.415%	0.136%				
250	244	-0.1898%	0.443%	0.008%				
251	245	0.1591%	0.379%	-0.257%				
252	246	0.1888%	0.642%	0.000%				
253	247	0.0553%	0.884%	0.000%				
254	248	0.0416%	0.085%	-0.200%				
255	249	-0.0176%	0.115%	0.049%				
256	250	-0.0934%	0.929%	0.305%				
257								
258								

Recuadro 8.

COVAR | fx =$I$6*(($G$2*(1+C7))+($H$2*(1+D7))+($I$2*(1+E7)))

	B	C	D	E	F	G	H	I
1						Activo 1	Activo 2	Activo 3
2					Participación del	0.4	0.25	0.35
3					Activo en el Portafolio			
4								
5	Día	Rendimiento Diario			Portafolio bajo		Datos del Portafolio	
6		Activo 1	Activo 2	Activo 3	diferentes Escenarios		Valor Inicial	100
7	1	-0.7476%	-0.166%	1.147%	=$I$6*(($G$2*(1+C7))+			
8	2	-0.8838%	0.222%	0.878%	100.0092409			
9	3	0.1149%	-0.011%	-0.071%	100.0182741			
10	4	-0.4236%	-0.162%	-0.587%	99.58458138			
11	5	-0.1982%	0.156%	0.111%	99.99855712			
12	6	0.7785%	-0.015%	-0.254%	100.2186986			
13	7	1.0992%	0.021%	0.160%	100.5010386			
14	8	0.6636%	-0.534%	0.000%	100.1318799			
15	9	0.7152%	-0.112%	0.000%	100.2580401			
16	10	0.1310%	0.060%	-0.198%	99.99816952			
17	11	0.9357%	0.011%	-0.507%	100.1997007			
18	12	1.0266%	0.148%	0.077%	100.474475			
19	13	0.4667%	0.268%	0.231%	100.3345082			
20	14	-0.6913%	-0.180%	0.186%	99.74357366			
21	15	-0.6402%	0.083%	0.000%	99.76469836			
22	16	-0.2269%	0.004%	0.000%	99.91031632			
23	17	1.1648%	-0.225%	0.078%	100.4371154			
24	18	0.0504%	0.000%	-0.098%	99.98566002			

Ahora contamos con una distribución empírica para los posibles valores del portafolio para el siguiente período (Gráfica 3-1). A partir de esta distribución, podemos encontrar el valor de corte del portafolio que asegure que el 1% de los escenarios (valor del portafolio bajo cada escenario) están por debajo de él. Recuerden que dado que tenemos 250 datos, el 1% de los datos corresponden a 2.5; podemos redondear este número por lo bajo a 2. En este caso, el valor de corte (V_c) corresponde al portafolio que garantice que únicamente existen dos portafolios con menor valor que él.

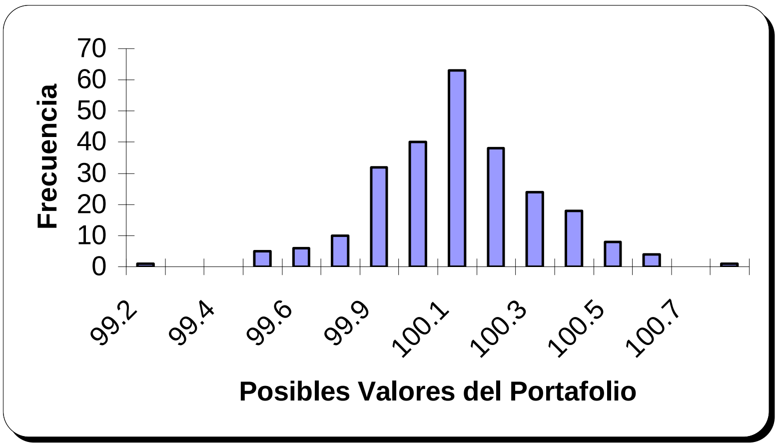
Análogamente a lo realizado anteriormente en la sección 2.2, podemos emplear Excel para ordenar los datos de menor a mayor empleando el criterio "Portafolio bajo diferentes Escenarios". Entonces el V_c corresponderá al tercer escenario ordenado, pues este garantiza que dos observaciones estén por debajo de él. De tal caso que $V_c = 99.46522246$.

Por tanto, el VaR con un nivel de confianza del 99% esta dado por:

$$VaR = V_0 - V_c = 100 - 99.465 = 0.5348$$

Es decir, sólo existe un chance de 100 de obtener una perdida diaria mayor a $534.8 mil si el mercado se encuentra en condiciones normales.

Gráfica 3-1. Histograma del Valor del Portafolio bajo 250 diferentes Escenarios



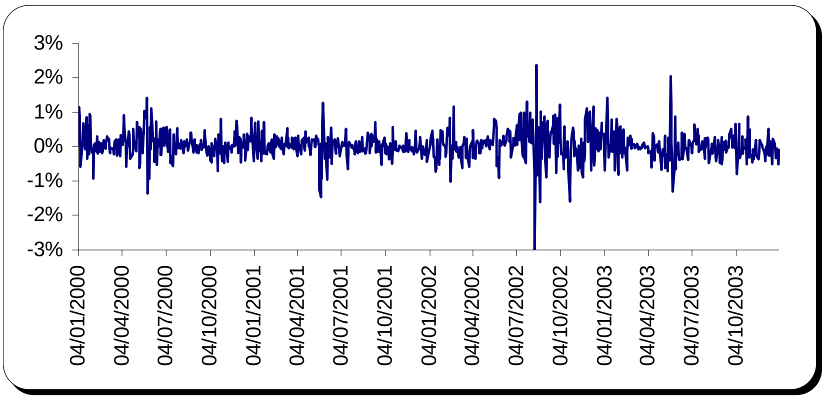
4. Extensiones del VaR: Volatilidad no constante

El gran supuesto que hemos realizado hasta el momento es que el comportamiento de los rendimientos será el mismo en el futuro que lo que ha sido en el pasado. Pero,

adicionalmente hemos supuesto que la volatilidad (desviación estándar) de la distribución de los rendimientos es constante en el tiempo. Ahora bien, si observamos el comportamiento de los rendimientos diarios de, por ejemplo, la Tasa Representativa de Mercado (TRM) en el tiempo (Ver
Gráfica **4-1**) podemos rápidamente concluir que este supuesto no parece ser muy realista (Ver Alonso y Arcos (2006) para una discusión de este hecho).

Así, si bien parece ser conveniente seguir asumiendo que en el comportamiento de los rendimientos provee suficiente información para determinar el futuro de la trayectoria, en esta sección consideraremos la posibilidad de que la volatilidad de los rendimientos varíe en el tiempo. Es más nuestro principio inspirador en esta sección será que la volatilidad de las trayectorias de serie de tiempo financieras puede ser predecible y proviene de un comportamiento especifico que no necesariamente es lineal. Así, los modelos que estudiaremos permitirán la estimación de una volatilidad no constante que servirá para actualizar nuestro cálculo del VaR, tal como lo habíamos estudiado anteriormente.

Gráfica 4-1 Rendimiento diario de la TRM (diaria) Ene-1-2000 / Dic-31-2003.



Fuente: Banco de la República

4.1. Volatilidad histórica (Promedio Móvil)

Una de las maneras más sencillas de capturar esta idea es calcular una varianza "móvil", es decir, una varianza que va cambiando de acuerdo a la nueva información que se va acopiando en los últimos *m* días, como se muestra en la formula:

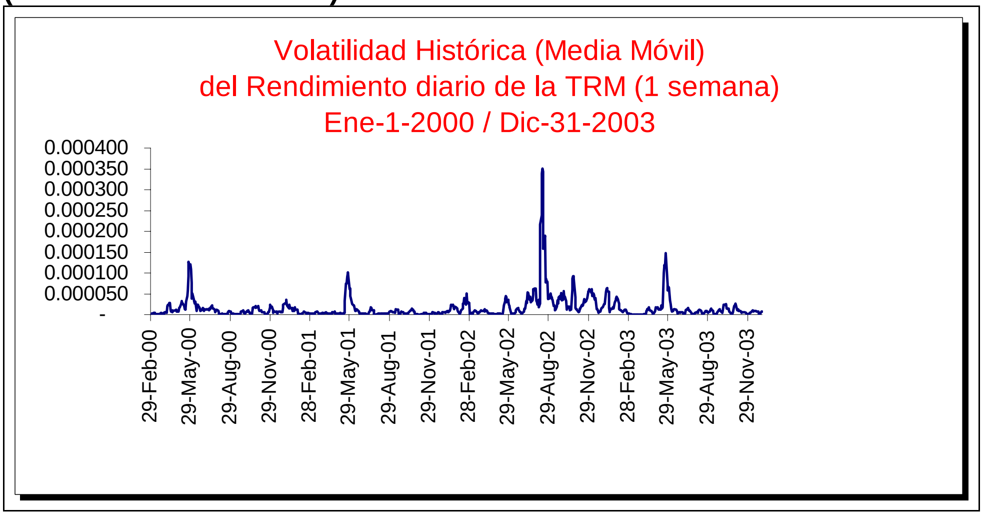
$$\hat{\sigma}^2_{t,m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(R_{t-i} - \bar{R}_m\right)^2}{m}$$

donde $\hat{\sigma}^2_{t,m}$ y $\bar{R}_m$ corresponden a la varianza estimada para el período *t* y la media de los rendimientos ambos calculados a partir de los últimos *m* datos, respectivamente. Sin embargo, como normalmente, los rendimientos diarios exhiben una media muy cercana a cero, supondremos que esta es cero y por tanto, tenemos que:

$$\hat{\sigma}^2_{t,m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(R_{t-i}\right)^2}{m} \qquad (10)$$

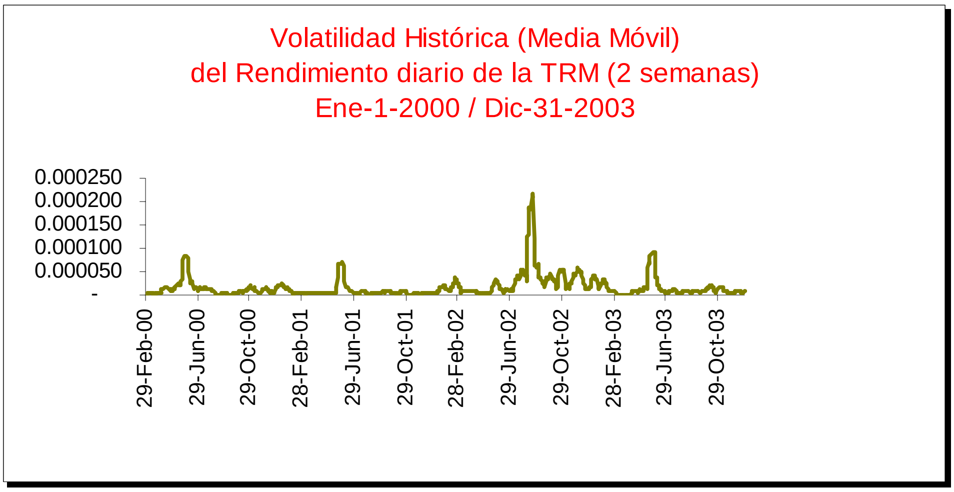
Por ejemplo[4], en la Gráfica 4-2 se presenta el cálculo de la varianza diaria para periodos de una semana $(m=5)$, dos semanas $(m=10)$, un mes $(m=20)$ y dos meses $(m=40)$. Noten que, en este caso, será difícil determinar cuál de las cuatro opciones describe de mejor forma la variabilidad de los rendimientos diarios de la TRM.

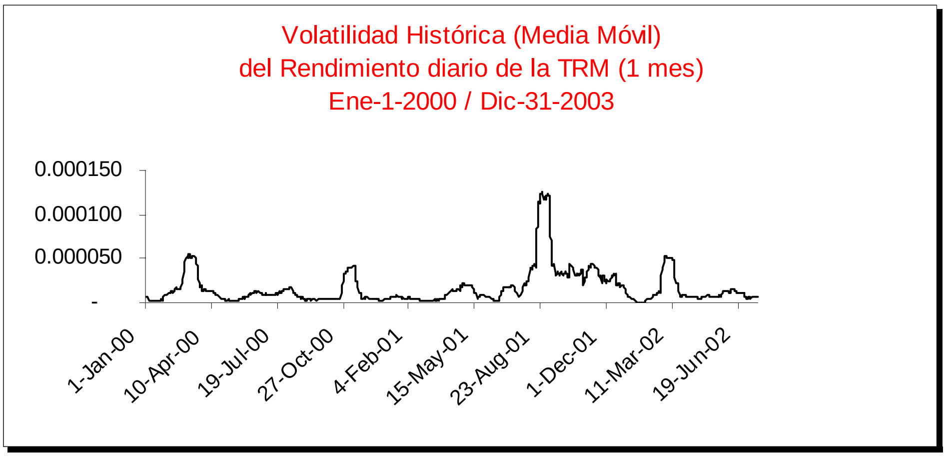
Gráfica 4-2. Volatilidad Histórica (Media Móvil) del Rendimiento diario de la TRM (Ene-1-2000 / Dic-31-200)

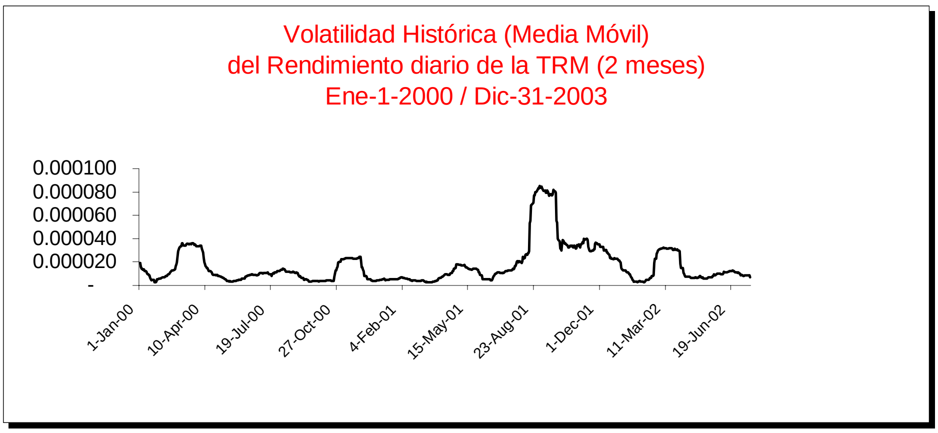


[4] Noten que (10) implica $\hat{\sigma}^2_{t,m} = \frac{1}{m}R^2_{t-1} + \frac{1}{m}R^2_{t-2} + \ldots + \frac{1}{m}R^2_{t-m}$. Por tanto está varianza también es conocida como volatilidad histórica con ponderaciones iguales.

Gráfica 4-2. Volatilidad Histórica (Media Móvil) del Rendimiento diario de la TRM (Ene-1-2000 / Dic-31-200) (Cont.)







Para determinar cuál es la mejor opción, se puede emplear una medida de bondad de ajuste conocida como la Raíz del Error Medio Cuadrado (RMSE por su nombre en inglés Root Mean Squared Error):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left(R_t^2 - \hat{\sigma}_t^2\right)^2} \tag{11}$$

Donde T corresponde al número total de observaciones consideradas. Esta medida recoge la diferencia que existe entre cada valor estimado y el observado, de tal manera que un RMSE menor será considerado mejor que uno grande. En la Tabla 4-1 se reporta el cálculo del RMSE para nuestro ejemplo. En este caso, tenemos que el menor RMSE corresponde a la media móvil que considera un período de una semana.

Tabla 4-1. RMSE para los Cuatro Modelos de Volatilidad Histórica (Media Móvil) del Rendimiento diario de la TRM (Ene-1-2000 / Dic-31-200)

Período	*RMSE*
1 semana	***0.000038317***
2 semanas	0.000042559
1 mes	0.000044767
2 meses	0.000046062

4.2. Promedio Móvil con ponderaciones Exponenciales (RiskMetrics)

La opción considerada anteriormente ponderaba de igual manera a todas las observaciones, esta opción conocida como el EWMA (por su nombre en ingles Exponential Weighted Moving Average) pondera de manera diferente cada observación de tal forma que asigna mayor peso a las observaciones más recientes.

Esta forma de estimar la volatilidad, fue empleada inicialmente por JP Morgan denominándolo RiskMetrics®, el cual fue hecho público en 1994. En general, de acuerdo a la EWMA la varianza en el momento t será:

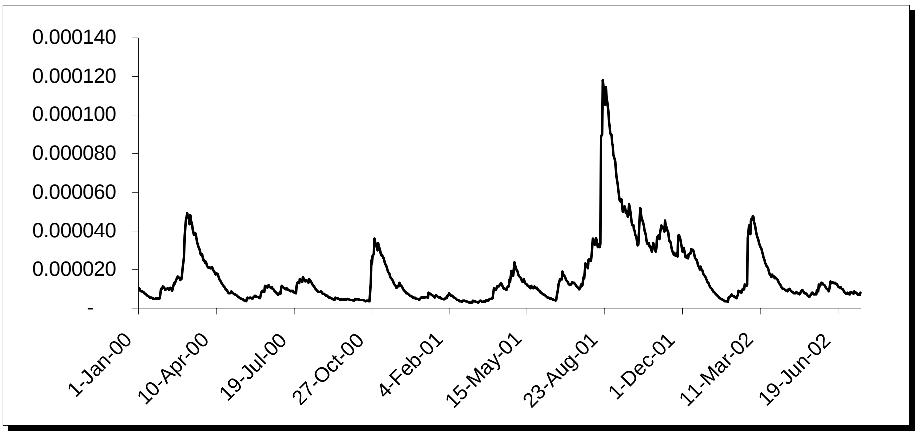
$$\hat{\sigma}_t^2 = (1-\lambda)\sum_{i=-1}^{\infty}\lambda^{i-1}\left(R_{t-i}\right)^2 \tag{12}$$

donde λ es un parámetro que se debe escoger por medio de un proceso de optimización[5]. En especial, JP Morgan emplea en su RiskMetrics® un λ de 0.94 para datos diarios y 0.97 para datos mensuales. Noten que (12) implica:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_t^2 &= (1-\lambda)\sum_{i=-1}^{\infty}\lambda^{i-1}(R_{t-i})^2 = (1-\lambda)\left[\lambda^0(R_{t-1})^2+\lambda^1(R_{t-2})^2+\ldots\right]\\ &=(1-\lambda)R_{t-1}^2+\lambda(1-\lambda)\left[\lambda^0(R_{t-2})^2+\lambda^1(R_{t-3})^2+\ldots\right]\\ &=(1-\lambda)R_{t-1}^2+\lambda\hat{\sigma}_{t-1}^2\end{aligned} \tag{13}$$

Es decir, la varianza de hoy será igual λ veces la volatilidad del día anterior más el cuadrado de la rentabilidad del día anterior. En la Gráfica 4-3 se presenta el cálculo de la volatilidad diaria a partir del modelo de RiskMetrics para el Rendimiento diario de la TRM. En este caso el RMSE corresponde a 0.000046026 superior al encontrado con nuestra aproximación de media móvil y para un horizonte de una semana. Así, para este caso en particular sigue siendo un mejor modelo para estimar la volatilidad el modelo de media móvil. Es importante anotar que este no es el caso general, por el contrario nuestro resultado depende de los datos que estamos empleando.

Gráfica 4-3. Volatilidad Histórica (EWMA - RiskMetrics) del Rendimiento diario de la TRM (Ene-1-2000 / Dic-31-200)



[5] Por ejemplo, se puede escoger λ tal que el RMSE sea minimizado.

Esquema 4-1 ¿Cómo predecir la volatilidad a partir del EWMA?

Suponga que cuenta con información de los rendimientos hasta el período $t-1$. Es decir se cuenta con la siguiente información $R_{t-1}, R_{t-2}, R_{t-3}, ...R_1$, y se desea encontrar la volatilidad para el período t $(\hat{\sigma}_t)$. En este caso, se puede emplear fácilmente la fórmula (13). Pero, ¿qué tal si se desea encontrar la volatilidad del período $t+1$? En este caso, la fórmula $\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (1-\lambda) R_t^2 + \lambda \hat{\sigma}_t^2$ no servirá pues nos hará falta R_t. La solución será emplear nuestra "mejor adivinanza" para R_t^2, es decir $\hat{\sigma}_t^2$. Así, la formula será $\hat{\sigma}_{t+1}^2 = (1-\lambda)\hat{\sigma}_t^2 + \lambda \hat{\sigma}_t^2 = \hat{\sigma}_t^2$. Así, tendremos que $\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \hat{\sigma}_{t+1}^2$ y así sucesivamente. Noten que está solución implicará una misma predicción para la volatilidad, lo cuál no implicará una dinámica!!

4.3. Modelos Univariados de series de tiempo con Varianza no constante.

En los modelos anteriores, la volatilidad se asume constante para un periodo. No obstante, como lo indicamos anteriormente, el comportamiento de los rendimientos de activos normalmente presentan una volatilidad variable. De hecho, grandes retornos tienden a estar seguido de grandes retornos y pequeños retornos tienden a estar seguidos por pequeños retornos. Así, el análisis empírico de las series permite intuir la necesidad de considerar modelos en los que la variabilidad no sea constante, es decir, que presenta heteroscedasticidad (varianza diferente).

4.3.1. Modelo ARCH(p).

Los modelos ARCH[6] (Heteroscedasticidad Condicional Auto-Regresiva) relajan el supuesto de la volatilidad constante y permiten detectar cambios en la volatilidad de acuerdo a patrones preestablecidos en la historia de la serie.

Supongamos que la rentabilidad corresponde a un proceso como el siguiente:

$$R_{t+1} = \mu + \upsilon_{t+1} \tag{14}$$

[6] Esta sigla proviene del nombre en ingles Autoregressive Contidional Heteroskedasticity.

donde μ es constante y υ_t corresponde a innovaciones normales. Es importante anotar que este tipo de modelo tiene más como objetivo pronosticar la variabilidad de los rendimientos y no tanto el rendimiento *per se*. Así, en muchos casos y, en especial, cuando se consideran periodos de tiempo muy cortos (10 días o menos), se emplea como hipótesis que $\mu = 0$. Como se puntualizó anteriormente, la importancia de este modelo se centra en la variabilidad y por tanto en la distribución de υ_t. La varianza condicional (σ^2_{t+1}) se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\sigma^2_{t+1} = \alpha_0 + \alpha_1 \upsilon_t^2 + \alpha_2 \upsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \upsilon_{t-(p-1)}^2 \tag{15}$$

En otras palabras, se supone que la varianza condicional es la suma del promedio ponderado de los cuadrados de las *p* innovaciones anteriores y una constante. Noten que de este supuesto surge el nombre del modelo, pues la varianza condicional es diferente para cada periodo y esta depende de sus valores anteriores (ARCH).

Es importante resaltar que hemos empleado el término condicional, pues la varianza depende del conjunto de información que en este caso corresponde a las innovaciones aleatorias en los *p* periodos anteriores. En otras palabras, tenemos que

$$\upsilon_{t+1} | \Psi_t \sim N\left(0, \sigma^2_{t+1}\right) \tag{16}$$

donde Ψ_t representa el conjunto de información con que se cuenta hasta el momento t, que incluye todos los sucesos relevantes que se han producido hasta la fecha.

Retornando al modelo definido por (14) y (15), a partir de una muestra de tamaño T se necesitará estimar los parámetros poblacionales $\mu, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Los valores estimados los denotaremos por $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_p$, respectivamente.

A partir de los valores estimados, podemos encontrar los "residuos"[7] basados en la siguiente expresión:

$$\hat{\upsilon}_t = R_t - \hat{\mu} \tag{17}$$

[7] Nuestra mejor estimación de las innovaciones.

Así, la varianza condicional estimada para el período $T+1$ (fuera de la muestra) viene dada por:

$$\hat{\sigma}^2_{T+1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \hat{\upsilon}^2_T + \hat{\alpha}_2 \hat{\upsilon}^2_{T-1} + \ldots + \hat{\alpha}_p \hat{\upsilon}^2_{T-(p-1)}$$

$$\hat{\sigma}^2_{T+1} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 \left(R_T - \hat{\mu}\right)^2 + \hat{\alpha}_2 \left(R_{T-1} - \hat{\mu}\right)^2 + \ldots + \hat{\alpha}_p \left(R_{T-(p-1)} - \hat{\mu}\right)^2 \tag{18}$$

y por tanto la rentabilidad en $T+1$ seguirá una distribución con media estimada dada por $\hat{\mu}$ y varianza condicional $\hat{\sigma}^2_{T+1}$. Es decir[8],

$$R_{t+1} \sim \left(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2_{T+1}\right). \tag{19}$$

4.3.2. Ejemplo de un ARCH(1)

Consideremos la tasa de cambio nominal diaria (pesos por dólar americano) en Colombia para los años 2000 a 2003. Para este activo el Modelo ARCH(1) es:

$$R_{t+1} = \text{-}0.000167 + \upsilon_{T+1} \tag{20}$$

donde la varianza condicional de la innovación viene dada por

$$\sigma^2_{t+1} = 0.00008 + 0.16\upsilon^2_t \tag{21}$$

Ahora supongamos que la rentabilidad en el día T es excepcionalmente alta, por ejemplo 5%. En este caso tendremos que la varianza condicional para el período T+1 será:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}^2_{T+1} &= 0.00008 + 0.16\left(R_T - \hat{\mu}\right)^2 = 0.00008 + 0.16\left(0.05 - 0.00041\right)^2 \\ &= .0004735\end{aligned}$$

Por tanto, la correspondiente desviación estándar es $S^2_{T+1} = \sqrt{.0004735} = 0.022 = 2.2\%$.

Es decir, para el periodo T+1 se tendrá que $R_{t+1} : \left(\text{-}0.000167, 0.0004735\right)$ y esto nos permitirá calcular el VaR paramétrico a partir de la aproximación paramétrica vista en la sección 2.1.

[8] Noten que a partir de esta expresión usted puede emplear las técnicas aprendidas en el capitulo anterior pero con varianza heteroscedástica.

4.3.3. Modelo GARCH(p,q)

Otro modelo muy empleado es el de heteroscedasticidad condicional auto-regresiva generalizado, GARCH(p,q) por su nombre en inglés. En este caso tenemos que:

$$R_{t+1} = \mu + \upsilon_{t+1} \qquad (22)$$

Donde la varianza condicional (σ_{t+1}^2) se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i \upsilon_{t-i}^2 \qquad (23)$$

con $p, q, \alpha_i, \beta_i \geq 0$ y $\alpha_0 > 0$. Noten que este modelo es una generalización del modelo ARCH donde la varianza condicional depende no solo de los *p* cuadrados anteriores de las innovaciones, sino también de los *q* valores pasados de la misma varianza.

4.3.4. Modelo TARCH

Un modelo un poco menos usado pero mucho más potente corresponde al TARCH (Treshold ARCH). Este tipo de modelo intenta capturar la presencia de comportamientos asimétricos en la varianza, es decir, a rentabilidades negativas se asignan mayores varianzas condicionales con respecto a rentabilidades positivas. En este caso el modelo corresponde a:

$$R_{t+1} = \mu + \upsilon_{t+1} \qquad (24)$$

Donde la varianza condicional (σ_{t+1}^2) se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \upsilon_t^2 + \gamma d_t \upsilon_t^2 \qquad (25)$$

Y,

$$d_t = \begin{cases} 1 & \upsilon_t < 0 \\ 0 & \upsilon_t \geq 0 \end{cases} \qquad (26)$$

Cuando $\upsilon_t < 0$, la varianza condicional será: $\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + (\alpha_1 + \gamma) \upsilon_t^2$. En caso contrario, ésta será $\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \alpha_1 \upsilon_t^2$. Así, podemos capturar el mayor riesgo asociado a rendimientos negativos que positivos.

4.3.5. Modelo GARCH multivariado

El modelo GARCH se puede generalizar al caso donde contamos con más de un activo. Un modelo GARCH multivariado proporciona una estructura más rica que en el caso univariado. Sin embargo, el número de parámetros que hay que estimar crece rápidamente y obliga a introducir ciertas hipótesis *ad hoc*, tanto para facilitar la estimación como para garantizar ciertas características deseadas en la matriz de varianzas y covarianzas.

Por simplicidad, consideremos dos activos, en este caso un modelo multivariado GARCH(1,1) corresponde a:

$$R_{1,t+1} = \mu_1 + \upsilon_{1,t+1} \qquad (27)$$

$$R_{2,t+1} = \mu_2 + \upsilon_{2,t+1} \qquad (28)$$

Donde la varianza condicional (σ^2_{t+1}) se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\sigma^2_{1,t+1} = \alpha_{10} + \beta_{11}\sigma^2_t + \alpha_{11}\upsilon^2_{1,t} \qquad (29)$$

$$\sigma^2_{2,t+1} = \alpha_{20} + \beta_{21}\sigma^2_t + \alpha_{21}\upsilon^2_{2,t} \qquad (30)$$

$$\sigma^2_{1,2,t+1} = \alpha_{30} + \beta_{31}\sigma^2_{1,2,t} + \alpha_{31}\upsilon_{1,t}\upsilon_{2,t} \qquad (31)$$

Así, la correspondiente matriz de varianzas y covarianzas condicional corresponde a:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma^2_{1,t+1} & \sigma^2_{1,2,t+1} \\ \sigma^2_{1,2,t+1} & \sigma^2_{2,t+1} \end{bmatrix} \qquad (32)$$

5. Comentarios Finales

En este documento hemos presentado una breve introducción al concepto del VaR y al cálculo de él. En la sección 2 se presenta un método paramétrico que implica suponer una varianza constante de los rendimientos. No obstante, un hecho muy común en el comportamiento de los rendimientos financieros es que la varianza o volatilidad de ellos no es constante (Ver Alonso y Arcos (2005) para una discusión más completa al respecto). Así, para considerar esta realidad será necesario estimar la volatilidad del siguiente periodo por uno de los métodos (el más adecuado) que se presentan en la sección 5. De igual manera se puede proceder para un portafolio. Esta conexión entre las secciones de estas notas se dejan premeditamente al lector.

6. Referencias

- Alonso, Julio César y Mauricio Arcos. 2005. "4 Hechos Estilizados de las series de rendimientos: Una ilustración para Colombia." Mimeo.
- Benninga, Simon. 2000. Financial Modeling: MIT Press.
- Hull, John C. 2002. Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones: Prentice Hall.

7. Anexo. Estimación de una Matriz de Varianzas y covarianzas con Excel

Existe una forma sencilla de calcular la matriz de varianzas y covarianzas de un grupo de activos por medio de Excel. Para esto podemos emplear un truco de Excel, la función "DESREF". Ver recuadro para un ejemplo.