



CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES. Grupo 01

Profesor: Hendel Yaker A.

PRIMER EXAMEN PARCIAL 01 de marzo de 2006

1. (10 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso explique por qué o de un ejemplo que lo refute.

(a) si  $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ , entonces  $\frac{d}{dt}|\vec{r}(t)| = \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$

(b) la recta tangente en cualquier punto de una circunferencia arbitraria es siempre perpendicular al **vector posición** del punto.

(c) La recta tangente a la curva de intersección de las superficies  $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$  y  $x = 1$ , en el punto  $(1,2,-4)$ , está dirigida por el vector  $\vec{d} = (0, -1, 2)$ .

(d) En el punto  $(1,0)$  la función  $f(x,y) = x^2 + \text{sen}xy$  crece **más rápido** en dirección hacia el punto  $(7,3)$ .

2. (15 puntos) Considere la función  $f(x,y) = \sqrt{4y - x^2}$

(a) Defina e ilustre gráficamente el dominio de  $f$ .

(b) Identifique la superficie determinada por la gráfica de  $f$  y utilice algunas trazas para dibujarla.

(c) Identifique la curva de nivel que pasa por el punto  $(0,1)$  y utilice el vector  $\nabla f$  para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en  $(0,1)$ . Haga una ilustración gráfica.

(d) Obtenga la ecuación del plano tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(0,1,2)$  de dos formas:  
i) utilizando la definición de plano tangente a la gráfica de una función de dos variables; ii) utilizando las propiedades de los **gradientes en el espacio**.

3. (15 puntos) En cada uno de los siguientes casos utilice la información que se suministra para calcular la derivada que se pide:

(a)  $f(x, t) = 2^{\sin(t/x)}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = ?$

(b)  $xe^z + yz + ze^x = 0$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$

(c)  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ ;  $f_x(0, 0) = ?$

(d)  $z = f(x, y)$ ,  $x = r^2 + s^2$  y  $y = 2rs$ ;  $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} = ?$

4. (10 puntos) Considere la función definida por:  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$ .

(a) Determine si  $f$  es continua en  $(0, 0)$ . ¿Es  $f$  **derivable** en  $(0, 0)$ ? Explique.

(b) Muestre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  **no existen**. ¿Puede concluir que  $D_{\vec{u}}f(0, 0)$  no existe para todo vector unitario  $\vec{u}$  en el plano? Explique.

5. (Opcional. 7 puntos) A partir de la ecuación  $\vec{V} = v\vec{T}$  que describe la velocidad de una partícula en movimiento, y utilizando derivación vectorial, deduzca que la componente normal (en dirección del vector  $\vec{N}$ ) del vector aceleración viene dada por la expresión:  $a_N = \frac{v^2}{\rho}$  (donde  $\rho$  es el radio de curvatura).

Algunas fórmulas:

$$v = |\vec{V}|; \quad k = \frac{|\vec{T}'|}{v}; \quad \rho = \frac{1}{k}.$$