

Octubre 11 de 2006.

Cálculo de una variable. Período Académico 062. G-19. Segundo parcial.

Nombre \_\_\_\_\_ Código \_\_\_\_\_

1. (10 puntos) a) Encuentre la aproximación lineal de la función  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , en  $a = 0$ , y úsela para obtener una aproximación de los números  $\sqrt{0.9}$  y  $\sqrt{0.99}$ .  
b) Grafique la función  $f$  y su linealización en  $a = 0$ . Explique si las aproximaciones obtenidas para  $\sqrt{0.9}$  y  $\sqrt{0.99}$  son demasiado grandes o demasiado pequeñas.
2. (8 puntos) Una lámpara proyectora situada sobre el piso ilumina la pared de un edificio que está a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de alto camina desde la lámpara hacia el edificio a una velocidad de 1.6 m/s, ¿con qué rapidez decrece su sombra proyectada sobre el edificio cuando se encuentra a 4 m de éste?.
3. (12 puntos) a) Explique la diferencia entre máximo absoluto y máximo local.  
b) Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de la función  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$  en el intervalo  $[\frac{1}{2}, 2]$ .  
c) Analice la curva  $y = xe^x$  con respecto al crecimiento, máximos y mínimos locales, concavidad y puntos de inflexión. Use esta información para graficar la curva.
4. (10 puntos) Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo rematado por un semicírculo. Por consiguiente, el diámetro del semicírculo es igual al ancho del rectángulo. Si el perímetro de la ventana es de 30 ft, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que se admita la cantidad más grande posible de luz.
5. (10 puntos) a) Suponga que una función  $f$  es continua en  $[0, 4]$  excepto en  $x = 2$ . Trace dos gráficas posibles de  $f$ , una en que se muestre que  $f$  podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor extremo y la otra que muestre que  $f$  podría satisfacer ese teorema (aun cuando no se satisfaga la hipótesis).  
b) ¿Existe una función  $f$  tal que  $f(1) = -2$ ,  $f(3) = 0$  y  $f'(x) > 1$  para todo  $x$ ?  
c) Obtenga la expresión de una función continua  $f$  que tenga un número crítico en  $x = 1$ , pero que no tenga máximo local ni mínimo local en  $x = 1$ .  
d) Trace la gráfica de una función que satisfaga  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$ ,  $f''(x) < 0$  si  $x < 0$  o  $x > 3$ ,  $f'(x) < 0$  si  $0 < x < 3$ .  
e) Si  $f$  es positiva y cóncava hacia arriba sobre  $I$ , pruebe que la función  $g(x) = [f(x)]^2$  es cóncava hacia arriba sobre  $I$ .