

1 (15 puntos) Calcule los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^3-1}$, (b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^{-2} - 1}{h}$, (c) $\lim_{x \rightarrow 8^-} \frac{|x-8|}{x-8}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2x-x^2}{1-x+2x^2}$, (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$.

2. (6 puntos) ¿Para qué valor de la constante c la función

$$f(x) = \begin{cases} cx+1 & \text{si } x \leq 3 \\ cx^2-1 & \text{si } x > 3 \end{cases} \text{ es continua sobre } (-\infty, \infty) ?$$

Justifique su respuesta usando la definición de continuidad.

3. (4 puntos) Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación $x^5 - x^2 + 2x + 3 = 0$.

4. (10 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(a) Determine si la función es continua en $x=0$.

(b) Determine si la función es derivable en $x=0$

5. (6 puntos) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2) \text{ en el punto } (3,1).$$

6. (9 puntos) Calcule las derivadas de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \tan(x^2) + \tan^2(x)$, (b) $g(x) = x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, (c) $h(x) = \sqrt{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$