UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

Álgebra lineal. Período Académico 062. G-13. Examen corto #2. Agosto 29 de 2006.

Nombre ______________________________ Código ______________

1. (14 puntos) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Verifique que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

son soluciones de los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$ respectivamente.

b) ¿Es A una matriz no singular? De ser así, ¿cuál es la inversa?.

c) Encuentre las soluciones de los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. (12 puntos) Considere la siguiente relación de influencia entre cuatro individuos.

P_1 influye en P_2 y P_4.

P_2 influye en P_3 y P_4.

P_3 influye en P_1 y P_4.

P_4 influye en P_2

a) Dibuje la correspondiente digráfica y escriba la matriz de adyacencia.

b) ¿De cuántas formas influye P_1 en P_4 en exactamente tres etapas?

c) ¿La digráfica es fuertemente conexa?

3. (12 puntos) Pruebe que T es una matriz de transición regular y encuentre el vector de estado estacionario.

$$T = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

4. (12 puntos) Demuestre los siguientes enunciados.

a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es solución del sistema homogéneo asociado.

b) Si A es antisimétrica y no singular, entonces A^{-1} es antisimétrica.

c) Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^4 = 0$, entonces $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.