Universidad ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.
Grupo 19

Profesor ANIBAL SOSA

NOTA: El exámen se califica sobre 50 puntos.

1. (12 ptos) Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -6 \\ 10 \end{bmatrix}$. Encuentre la solución general $\boldsymbol{x}$ del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ y escríbala en la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$, donde $\boldsymbol{x}_p$ es una solución particular y $\boldsymbol{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado.

2. (a) (6 ptos) Considere el sistema

$$\begin{aligned} x + y - \qquad z &= 3 \\ y + \qquad 3z &= -\lambda \\ y + (\lambda^2 + 2)z &= \lambda - 4 \end{aligned}$$

para que valores de λ el sistema tiene única solución y para cuales tiene infinitas soluciones.

(b) (7 ptos) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule el $\det A$. ¿Tiene el sistema $A\boldsymbol{x} = 0$ única o infinitas soluciones?

3. (20 ptos) Considere los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(3, 1, 5)$ y $C(0, 1, 1)$. Forme los vectores $\boldsymbol{u} = \vec{AB}$ y $\boldsymbol{v} = \vec{AC}$.

   (a) Calcule $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}||$ y $\operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

   (b) Halle la ecuación de la recta ℓ perpendicular a la recta $\frac{1-x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$ y que la intersecte en un punto.

   (c) Halle la ecuación de un plano π_1 que contenga a los vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

   (d) Calcule la distancia entre el plano π_1 y un plano π_2, diferente de π_1, que sea paralelo a dicho plano.

4. (9 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine su valor de verdad, y argumente en cada caso su respuesta:

   (a) Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ y considere la siguiente ecuación $2X - (C^2 + C) = 3X$. Entonces $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Sean A y B matrices simétricas, entonces AA^T es simétrica y $AB + BA$ también es simétrica.

   (c) Sea T una matriz triangular superior de $n \times n$ tal que ninguna fila de la matriz es cero, entonces la matriz es no singular.

5. (Opcional 6 ptos) Suponga que $A^2 = A$ entonces $(AB - ABA)^2 = 0$, para todo B.