ALGEBRA LINEAL.
PRIMER EXAMEN PARCIAL.
Grupo 25

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ____ CODIGO _________________

NOTA: El exámen se califica sobre 50 puntos.

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ y el vector $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -11 \\ -5 \end{bmatrix}$.

   (a) (12 ptos) Encuentre la solución general del sistema $\boldsymbol{x}$ y escríbala en la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$, donde $\boldsymbol{x}_p$ es una solución particular y $\boldsymbol{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado.

   (b) (10 ptos) Calcule $\det(A)$. ¿Es A una matriz singular o no singular?

2. (20 ptos) Considere los puntos $P(1, 5, -3)$, $Q(-5, -4, 11)$ y el vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

   (a) Calcule $||\vec{PQ}||$, $||\boldsymbol{v}||$ y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores $||\vec{PQ}||$ y $\boldsymbol{v}$.

   (b) Halle la ecuación de la recta ℓ paralela al vector $\vec{PQ}$, que pase por un punto del plano xy.

   (c) Halle la ecuación de un plano π perpendicular al plano $x + y + z = 1$ y que contenga a la recta $\ell_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{-3} = z + 1$.

   (d) Calcule la distancia del punto P al plano π.

3. (12 ptos) Para cada uno de los siguientes enunciados determine su valor de verdad, y argumente en cada caso su respuesta:

   (a) Sea $X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, entonces $X^2 - 2X - 5I_2 = 0_2$.

   (b) Suponga que un sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ se ha llevado a la siguiente forma escalonada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda+1 & \lambda^2+\lambda \end{array}\right]$, entonces los valores de λ para los cuales el sistema tiene, respectivamente, única solución e infinitas soluciones son $\lambda \neq 0$ y $\lambda = -1$.

   (c) Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Si el vector $\boldsymbol{u}$ es ortogonal al vector $\boldsymbol{v}$ entonces $||\boldsymbol{v}||^2 + ||\boldsymbol{u}||^2 = ||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||^2$.

   (d) Si A es una matriz antisimétrica de orden 4×4, entonces $\det(A) = 0$.

4. (Opcional 8 ptos) Demuestre que si un sistema lineal $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tiene mas de una solución, entonces tiene un número infinito de soluciones.