ÁLGEBRA LINEAL. Grupo 03 Profesor: Hendel Yaker A.

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 14 de octubre de 2006

1. (12 puntos) Sea $W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, donde $\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 0, -1, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, -4, 1, 1)$ y $\vec{v}_4 = (5, 2, -3, 2)$.

   (a) Encuentre una base para el espacio vectorial $gen W$.

   (b) Sea A la matriz 4x4 cuyas columnas son, en su orden, los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, y\, \vec{v}_4$. Encuentre una base para el **Espacio Nulo** de A.

2. (6 puntos) Considere las rectas: l: $(x, y, z) = (4 + t,\ 1,\ -3 - t)$ y r: $(x, y, z) = (t,\ 1,\ 3 - 3t)$. Encuentre las coordenadas de tres puntos A, B y C tales que: $A \in l$, $B \in r$, $C \in (r \cap l)$ y el triángulo ABC tiene un ángulo recto en el vértice A.

3. (15 Puntos) Considere las rectas:

$$l: \text{ pasa por los puntos } P_1(0, 0, -3) \text{ y } P_2(-3, 0, 0)$$
$$r: \quad (x, y, z) = (1 - t, t, 0)$$

   (a) Demuestre que l y r NO son **coplanares**

   (b) Encuentre dos planos **paralelos** Π_1 y Π_2 (determine sus respectivas ecuaciones) tales que: Π_1 contiene a la recta r y Π_2 contiene a la recta l.

   (c) Encuentre la distancia entre los planos Π_1 y Π_2.

4. (12 puntos)

   (a) Muestre que cada vector $\vec{u}$ en un espacio vectorial tiene un **único** inverso $-\vec{u}$.

   (b) Pruebe que el conjunto de las matrices **simétricas**[1] $n \times n$ es un Subespacio del espacio vectorial M_{nn}.

   (c) Sea $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una **Base** de un espacio vectorial V y $c \neq 0$ un número real. Muestre que el conjunto $B^* = \{c\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es **linealmente independiente** y determine si B^* constituye una base para V.

5. (12 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso explique por qué o de un ejemplo que lo refute.

   (a) Para todo subconjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial V, se cumple que: $S \subset gen S$.

   (b) Si A es una matriz $m \times n$ y las columnas de A generan a R^m, entonces podemos concluir que rango $A = m$.

   (c) Si el vector $\vec{x} = (-1, 2, 0, 1)$ genera el espacio nulo de una matriz A, entonces podemos concluir que rango $A = 3$.

NOTA: Se califica sobre 50 puntos.

[1] A es simétrica si sólo si $A^T = A$