



SEGUNDO PARCIAL DE ÁLGEBRA LINEAL

1. (10 puntos)

(a) Calcule la distancia mínima del punto $(3,4,1)$ a la recta que pasa por los puntos $(1,1,1)$ y $(2,3,5)$.

(b) Escriba una ecuación del plano que contenga a los tres puntos $(2,3,5)$, $(0,0,0)$ y $(-2,5,7)$.

2. (9 puntos)

(a) Determine si el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z) con las operaciones

$$(a, b, c) \oplus (x, y, z) = (a, b + y, c) \quad \text{y} \quad c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz),$$

es un espacio vectorial.

(b) Determine si el subconjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$ del espacio vectorial M_m es un subespacio.

(c) Determine si el subconjunto de todos los polinomios de la forma

$$at^2 + bt + c \text{ donde } b = 2c, \text{ es un subespacio de } P_2.$$

3. (8 puntos)

Escriba una base para el subespacio W de M_{33} formado por todas las matrices simétricas.

4. (8 puntos)

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine el rango y la nulidad de A .

(b) Escriba una base del espacio nulo asociado a la matriz A y determine a que espacio vectorial corresponde.

5. (15 puntos)

Demuestre las proposiciones siguientes:

(a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \frac{1}{4} \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Sea $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial. Demuestre que si S es linealmente dependiente entonces uno de los vectores en S es una combinación lineal de los demás vectores en S .

(c) Sean v_1, v_2 y v_3 vectores en un espacio vectorial, tales que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente. Muestre que si v_3 no pertenece a $\text{gen}\{v_1, v_2\}$, entonces $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente.