UNIVERSIDAD ICESI
Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL.
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL.
Grupo 9

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ______________________________ CODIGO ______________

1. (18 ptos)

   (a) Encuentre las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta ℓ que contiene los puntos $P(1,1,-1)$ y $Q(0,1,2)$.

   (b) Encuentre la ecuación de un plano π paralelo a la recta ℓ y que no la contenga.

   (c) Calcule la distancia del punto Q al plano π.

2. (32 ptos) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Encuentre una base para el espacio fila de A y halle el $rango(A)$. Verifique que los vectores elegidos forman una base.

   (b) Encuentre una base del espacio nulo de la matriz A y halle $nulidad(A)$. Verifique que los vectores elegidos forman una base.

3. (20 ptos) Verifique que el conjunto $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d : b = 3a - d, c = d - a\}$ sea un subespacio de P_3, halle una base para W y $dim(W)$.

4. (30 ptos) Determine para cada una de las siguientes afirmaciones su veracidad, argumentando en cada caso su respuesta:

   (a) Sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$. Si $\boldsymbol{w}$ es un vector no nulo ortogonal a $\boldsymbol{u}$ y a $\boldsymbol{v}$ entonces $\boldsymbol{w}$ es ortogonal a cualquier combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

   (b) El conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $ax + by + cz = 0$ forman un espacio vectorial.

   (c) Sea $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ un subconjunto linealmente independiente en un espacio vectorial V. Considere $T = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\} \subset V$, donde $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$, entonces T es un conjunto linealmente independiente en V.

   (d) El conjunto $\{(2,0,0,5), (0,7,7,0), (0,11,0,10)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

   (e) Sea A una matriz $n \times n$ tal que las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$, entonces las filas de A son una base de $\mathbb{R}^n$.

   (f) Si A es una matriz 5×7 y $nulidad(A) = 2$ entonces las columnas de A son una base de $\mathbb{R}^5$.