Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

Primer Parcial de Álgebra Lineal

Septiembre 9 de 2009 Profesor: Johann Suárez Motato

1. (20 pts) Demuestre los siguientes enunciados:

   a) Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$, entonces $\vec{w}$ es ortogonal a $r\vec{u} + s\vec{v}$, donde $r, s \in \mathbb{R}$.

   b) Sea θ el ángulo entre los vectores no nulos $\vec{u} = (x_1, y_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2)$ en el plano. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos, entonces $\cos\theta = \pm 1$.

   c) Sea A es una matriz $n \times n$. Si $A^T = -A$ y n es impar, entonces $|A| = 0$.

   d) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores. Pruebe que $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}||\vec{u} + \vec{v}||^2 - \frac{1}{4}||\vec{u} - \vec{v}||^2$

2. (8 pts) Considere la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$. Determine un sistema lineal que le permita encontrar las constantes a, b y c, sabiendo que pasa por los puntos $A(1, -5)$, $B(-1, 1)$ y $C(2, 7)$.

3. (8 pts) Calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

4. (6 pts) Para la matriz A dada abajo, enuncie condiciones sobre las variables a, b, c, d de tal forma que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ a & b & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}$$

   a) A sea una matriz escalar.

   b) A sea una matriz simétrica.

   c) La ecuación $Ax = 0$ tenga soluciones no triviales.

5. (9 pts) Determine todos los valores de t para los cuales el sistema lineal resultante:

$$\begin{aligned} x + z &= 4 \\ 2x + y + 3z &= 5 \\ -3x - 3y + (t^2 - 5t)z &= t - 8 \end{aligned}$$

   a) No tenga solución

   b) Tenga solución única

c) Tenga infinitas soluciones

6. (6 pts) Calcule $[AB + 3A]^T(\frac{1}{2}B^TA^T)^{-1}C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$