

ALGEBRA LINEAL.
EXAMEN FINAL. (SUPERIOR)

Diciembre 3 de 2005.

NOMBRE _____ CODIGO _____

1. (18 pts) Diagonalice ortogonalmente la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ mostrando la matriz ortogonal P y la matriz diagonal D , tales que $AP = PD$.

2. (22 pts) Considere la transformación $L : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $L(x) = Ax$, donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Muestre que L es una transformación lineal.
 (b) Determine una base del $\text{Kernel}(L)$ y otra base para $\text{Im}(L)$.
 (c) Calcule $\dim(\ker L)$ y $\dim(\text{Im } L)$. ¿Qué resultado verifican estos números?
 (d) ¿Es la transformación L sobre? ¿Es la transformación L uno a uno? Explique.
3. (8 puntos) Resuelva uno y sólo uno de los siguientes puntos:
4. Escriba la forma cuadrática $g(x) = x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4yz$ en la forma matricial $x^T Ax$ donde $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, y encuentre la forma cuadrática equivalente $h(y)$ (forma canónica). ¿Es la matriz A una matriz definida positiva?
5. (36 pts) Califique cada una de las afirmaciones siguientes como verdadera o falsa, argumentando el por qué de su respuesta:
- (a) El conjunto de todas las matrices antisimétricas de $n \times n$ es un subespacio del espacio de matrices $M_{n \times n}$.
 (b) Todo conjunto de 4 polinomios distintos no nulos en P_4 es linealmente independiente.
 (c) Si $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es un subconjunto de vectores ortogonales al vector v , entonces todo vector que pertenezca al $\text{gen}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es ortogonal a v .
 (d) Si el producto de los valores propios de una matriz A es cero, entonces A es singular.
 (e) Si las columnas de una matriz A de 6×4 son linealmente independientes, entonces $\text{rango}(A) = 6$.
 (f) Si λ es un valor propio de una matriz de $n \times n$, entonces $A - \lambda I_n$ es una matriz singular.

- (g) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y
- $$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{Entonces } L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$