

**Examen Final de Álgebra y funciones**
**Cali, Noviembre 22 de 2006**
**Grupo: \_\_\_\_\_ Profesor: \_\_\_\_\_ Período: 2006 – 02**
**TENGA EN CUENTA:** En este examen **no se permite el uso de calculadora**. Sus respuestas numéricas deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

**1. (20 puntos) Resuelva las siguientes ecuaciones:**

a)  $\text{sen}(2x) + \cos(x) = 0; \quad x \in [0, 2\pi)$

b)  $8^x = 4 \cdot 2^{x-4}$

c)  $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$

d)  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} - \frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2 - 4}$

**2. (21 puntos)**

 a) Muestre que la ecuación  $\frac{1 + \cos \theta}{\cos \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{\sec \theta - 1}$  es una **identidad**.

 b) Transforme la expresión  $\text{sen}(\tan^{-1} x)$  en una expresión algebraica de la variable  $x$ 

 c) Si  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  y  $\tan \alpha > 0$  determine el valor de  $\tan \alpha \cot \alpha + \csc \alpha$ 
**3. (15 puntos) Resuelva las siguientes desigualdades y exprese la solución con intervalos:**

a)  $\frac{x+1}{x+3} \leq 2$

b)  $\log(x-2) + \log(9-x) < 1$

**4.**

 a) (10 puntos) El Uranio 234 tiene una vida media de  $2.7 \times 10^5$  años. Determine la cantidad que queda de 10 miligramos después de 1000 años.

 b) (6 puntos) Identifique completamente la función de la forma  $f(x) = Ca^x$  cuya gráfica pasa por los puntos (0,5) y (-1, 15) (determine las constantes  $C$  y  $a$ ).

**5.**

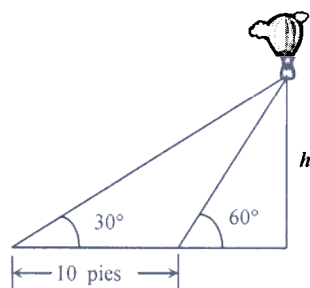
 a) (6 puntos) Determine el polinomio de grado más pequeño posible, que tenga coeficientes reales, su coeficiente principal sea 3 y tenga a  $i$  y a  $1-i$  como raíces.

 b) (4 puntos) Utilice propiedades de las funciones inversas para demostrar que las funciones  $f(x) = x^3 + 1$  y  $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$  son inversas entre sí.

**6.**

 a) (10 puntos) Un alambre de 24 cms de largo se dobla en forma de rectángulo con ancho  $x$  y largo  $y$ . Exprese el área del rectángulo como una función de  $x$  y muestre que el área es **máxima** si el rectángulo es un cuadrado.

 b) (8 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el centro de la circunferencia  $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -1$  y es perpendicular a la recta de ecuación  $2x - 3y + 1 = 0$ .

**7. (10 puntos) Dos cables sujetan un globo al piso como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura del globo sobre el suelo?**

**NOTA: SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.**