ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN PARCIAL
Grupo 3

Profesor ANIBAL SOSA

NOTA: El examen se califica sobre 50 puntos.

1. (20 ptos) Encuentre la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $(e^y+1)^2e^{-y}dx+(e^x+1)^3e^{-x}dy=0$ b) $(1+x)\dfrac{dy}{dx}+y=\ln x$

   c) $(2y\,\mathrm{sen}\,x\cos-y+2y^2e^{xy^2})dx=(x-\mathrm{sen}^2\,x-4xye^{xy^2})dy$ d) $ydx+x(\ln x-\ln y-1)dy=0$

2. Considere el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt}=(1-x)^{\frac{2}{3}},\ x(-1)=1$$

   a) (5 ptos) Halle dos soluciones distintas de éste problema. Diga por qué ésta ecuación diferencial no es un contraejemplo del teorema de existencia y unicidad de soluciones.

   b) (2 ptos) Escoja una condición inicial con la cual se pueda garantizar la unicidad de la solución y dé el intervalo de definición I_0 mas grande que garantice dicha unicidad.

3. (8 ptos)

   a) La familia de curvas $y=c_1x^3+c_2x^2$, es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $x^2y''-4xy'+6y=0$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$. Muestre que existen infinitas soluciones del problema de valor inicial formado por la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=k$, $k\in\mathbb{R}$. Argumente por qué en este caso no se contradice el teorema de existencia y unicidad de soluciones.

   b) Suponga que conocemos una solución no trivial y_1 de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)=0$$

   Es bien conocido que $y_1=e^{mx}$, $m\in\mathbb{R}$ es una solución de dicha ecuación diferencial. Explique por qué para construir un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1,y_2\}$, tiene sentido suponer que la segunda solución y_2 es de la forma $y_2=e^{kx},\in\mathbb{R}$ o de la forma $y_2=xe^{mx}$

4. Un depósito grande se llena parcialmente con 100 galones de líquido en el que se disolvieron 10 libras de sal. Se bombea al depósito salmuera que contiene media libra de sal por galón a razón de 12 gal/min. La solución bien mezclada se bombea con una rapidez de 10 gal/min.

   a) (2 ptos) Escriba el problema de valor inicial correspondiente al modelo que mejor se ajuste al problema.

   b) (8 ptos) Resuelva el problema de valor inicial y determine cúal es la cantidad de libras de sal en el depósito a los 20 minutos.

5. (15 ptos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones. Justifique su respuesta.

   a) La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y(a - by)$ tiene exactamente dos soluciones constantes y toda solución no constante $y = \phi(x)$, tiene un único punto de inflexión donde $y = \frac{a}{2b}$.

   b) La ecuación diferencial $(x^2-1)y''-xy'+y = 0$ tiene infinitas soluciones para cualquier conjunto de condiciones iniciales de la forma $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

   c) Suponga que $Y = \{y_1, ..., y_n\}$ es un conjunto de soluciones no triviales de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, tales que el *wronskiano* $W(y_1, ..., y_n) = 0$. Entonces existe al menos un $y_i \in \{y_1, ..., y_n\}$ tal que y_i es combinación lineal de los demás vectores de Y.

   d) Los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$: $S = \{2x^3 + x^2 + x, 4x^3 + 3x + 100, x^5 + x^4\}$ y $T = \{xe^{x+1}, (4x - 5)e^x, e^x\}$.