MATEMATICAS DISCRETAS.
EXAMEN FINAL.

Profesor ANIBAL SOSA

1. (15 ptos) Sea R la relación definida sobre el conjunto B de cadenas b_i de longitud 16 como, $b_1 \ R \ b_2$ siempre que b_1 y b_2 coincidan en los ocho últimos bits.
   (a) Muestre que R es una relación de equivalencia.
   (b) Encuentre las clases de equivalencia definidas por R.
   (c) Determine una partición del conjunto S, verificando explícitamente las condiciones que definen una partición de un conjunto dado y muestre que es un refinamiento de las clases de equivalencia que coinciden en sus cuatro últimos bits.

2. (21 ptos)
   (a) Cada usuario de un computador tiene una contraseña con una longitud de entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es un dígito o un letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?
   (b) Cada parte de una máquina hecha en una fabrica es marcada con un código de la forma letra-dígito-dígito, donde cada dígito puede repetirse. Pruebe que si 8500 partes son fabricadas, entonces al menos cuatro deben haberse marcado con el mismo código sobre ellas.
   (c) Suponga que $S = \{1, 2, 3, ..., 25\}$. Encuentre el número de subconjuntos $T \subseteq S$ de cinco elementos tales que T:
      i. Consiste de dos números pares y tres números impares.
      ii. Consiste de exactamente cuatro números primos.
      iii. Tiene al menos un número par en el.

3. (24 ptos)
   (a) Sea M una máquina de estados finitos con un conjunto de n estados Q, incluído el estado inicial q_i. Muestre que si $q \in Q$ es alcanzable entonces existe una cadena ω de longitud menor que n tal que q es el $\omega-$sucesor de q_i.
   (b) Los **números armónicos** H_j, $j = 1, 2, 3, ...$, se definen como $H_j = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{j}$. Muestre que $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
   (c) Defina recursivamente la función $m(\cdot)$ cuya imagen es el dígito más pequeño de una cadena no vacía de cifras decimales ω. Muestre mediante inducción estructural que $m(st) = \min(m(s), m(t))$, para todo par de cadenas s, t.

4. (15 ptos) Determine una relación de recurrencia y las condiciones iniciales, para el número de cadenas a_n de n bits que contienen tres ceros consecutivos y resuelva la relación de recurrencia homogénea asociada a a_n. ¿Cuántas cadenas de siete bits no contienen tres ceros consecutivos?

5. (14 ptos) Sea $S = R = \{0, 1\}$ y ω una cadena de bits. Diremos que ω tiene la *propiedad P* si cada aparición de un 0 va seguida inmediatamente por otro 0 ó por una cadena de al menos dos $1'$s consecutivos. Similarmente diremos que ω tiene la *propiedad Q* si el número de apariciones del 1 en ω es impar. Decida, para cada una de las cadenas siguientes, si se satisface la propiedad P, la propiedad Q, ambas o ninguna: $\omega = 11100$, $\beta = 00111$, $\gamma = 10111$, $\phi = 01011$ y $\delta = 00000$. Diseñe un reconocedor finito que acepte las cadenas que satisfacen simultáneamente las propiedades P y Q, y sólo estas cadenas.

6. (11 ptos) Construya un autómata determinista M' que reconozca el mismo lenguaje que el siguiente autómata M.