UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

MATEMATICAS DISCRETAS.
EXAMEN FINAL.

Profesor ANIBAL SOSA

1. (7 ptos) Sea S un subconjunto de un conjunto universal U. La **función característica** $f_S : U \to \{0,1\}$ de S es una función tal que $f_S(x) = 1$ si $x \in S$ y $f_S(x) = 0$ si $x \notin S$. Sean A y B subconjuntos de U. Muestre que $f_{A\cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x)$ y que $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$. De ser posible, encuentre un ejemplo donde la función característica sea inyectiva y sobreyectiva, o dé un argumento que explique la imposibilidad de lograr lo anterior.

2. (8 ptos) Hemos definido que dos máquinas de estados finitos M_1 y M_2 son *equivalentes* si y sólo si:

   (a) Sus alfabetos de entrada y de salida son los mismos. Esto es, $S_1 = S_2$ y $R_1 = R_2$.

   (b) Para cada estímulo, M_1 y M_2 producen idénticas respuestas. Esto es, si $s_1 = s_2$ entonces $r_1 = r_2$, donde $s_i \in S_i$ y $r_i \in R_i$ para $i = 1, 2$.

   Muestre que la definición anterior establece una relación de equivalencia sobre el conjunto de máquinas de estados finitos. Dada una máquina M, diga qué son las clases de equivalencia de M. Describa la partición que ésta relación induce sobre el conjunto de máquinas de estados finitos.

3. (21 ptos)

   (a) Cada usuario de un computador tiene una contraseña con una longitud de entre seis y ocho caracteres, cada uno de los cuales es un dígito o un letra mayúscula. Cada contraseña debe contener al menos un dígito. ¿Cuántas contraseñas distintas admite el sistema?

   (b) Determine el menor número de cables necesarios para conectar 100 computadores a 20 impresoras si se requiere garantizar que 20 computadores cualesquiera puedan acceder en todo momento a 20 impresoras distintas. Justifique su respuesta.

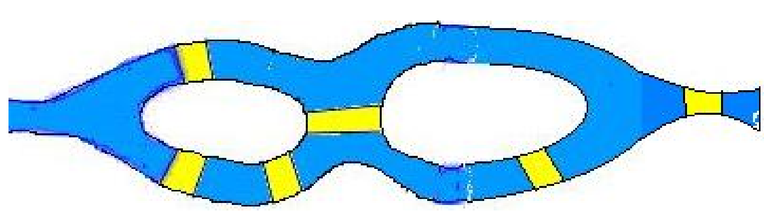
   (c) Suponga que $S = \{1, 2, 3, ..., 25\}$. Encuentre el número de subconjuntos $T \subseteq S$ de cinco elementos tales que T:

      i. Consiste de dos números impares y tres números pares.

      ii. Consiste de exactamente tres números primos.

      iii. Tiene al menos un número par en el.

4. (9 ptos) Considere el siguiente mapa, en el que aparecen 6 puentes sobre un río(área oscura):



   (a) Dibuje el grafo G que modela el mapa anterior y verifique el teorema del apretón de manos.

   (b) Elija un punto de partida arbitrario en el mapa, sobre alguna de las regiones firmes(área blanca). ¿Pueden cruzarse todos los puentes que se muestran en este mapa exactamente una vez y volver al punto de partida? Explique. ¿Si elimina alguno de los puentes, cual es su respuesta a la pregunta anterior? Nuevamente explique.

   (c) ¿Satisface G las hipótesis del teorema de Dirac? Explique.

5. (20 ptos)

   (a) Un montón de n cerillas es repartido en n montones de una cerilla, dividiendo sucesivamente cada montón en dos más pequeños. Cada vez que partimos un montón, multiplicamos el número de cerillas en cada uno de los nuevos montones. Demuestre que no importa cómo se dividan los montones, la suma de los productos calculados es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$.

   (b) Defina recursivamente la función $m(\cdot)$ cuya imagen es el dígito más pequeño de una cadena no vacía de cifras decimales ω. Muestre mediante inducción estructural que $m(st) = \min(m(s), m(t))$, para todo par de cadenas s, t.

6. (12 ptos) En los primeros días del año se depositan 100.000 euros en un fondo de inversiones. El último día de cada año se reparten dos tipos de dividendos. El primer dividendo es el 20% del importe depositado en el fondo durante ese año. El segundo dividendo es el 45% del importe depositado en el fondo durante el año anterior.

   (a) Determina una relación de recurrencia para $\{P_n\}$, donde P_n es el importe depositado en el fondo al cabo de n años, si no se retira ningún dinero.

   (b) ¿Cuánto dinero hay en el fondo al cabo de n años, si no se retira ningún dinero?

7. (14 ptos) Sea $S = R = \{0, 1\}$ y ω una cadena de bits. Diremos que ω tiene la *propiedad* P si cada aparición de un 0 va seguida inmediatamente por otro 0 ó por una cadena de al menos dos $1'$s consecutivos. Similarmente diremos que ω tiene la *propiedad* Q si el número de apariciones del 1 en ω es par. Decida, para cada una de las cadenas siguientes, si se satisface la propiedad P, la propiedad Q, ambas o ninguna: $\omega = 11100$, $\beta = 00111$, $\gamma = 10111$, $\phi = 01011$ y $\delta = 00000$. Diseñe un reconocedor finito que acepte las cadenas que satisfacen simultáneamente las propiedades P y Q, y sólo estas cadenas.

8. (9 ptos) Construya un autómata determinista M' que reconozca el mismo lenguaje que el siguiente autómata M.