Departamento de Matemáticas y Estadística

MATEMATICAS DISCRETAS.
SUPLETORIO EXAMEN FINAL.

Mayo 27 de 2006

1. (a) (10 ptos) Pruebe que en una máquina conexa M de n estados, incluido el estado inicial q_I, cada estado q es una $\omega-$sucesor de q_I donde $|\omega| < n$.

   (b) (12 ptos) Un montón de n piedras es repartido en n montones de una piedra, dividiendo sucesivamente cada montón de piedras en dos más pequeños. Cada vez que partimos un montón, multiplicamos el número de piedras en cada uno de los nuevos montones. Demuestre que no importa cómo se dividan los montones, la suma de los productos calculados es igual a $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. (18 puntos) Una manera útil de representar una relación R sobre un conjunto X es usar un digrafo $G = (X, E)$, donde cada vértice de G representa un elemento de X. Si $(a, b) \in R$ entonces se traza una arista dirigida desde a hasta b. Considere la relación R sobre el conjunto $X = \{1, 2, 3, ...10\}$ definida como $(a, b) \in R$ si a divide a b, $a, b \in X$.

   (a) Trace el digrafo G definido a partir de R.

   (b) Construya el grafo no dirigido $\tilde{G}$ subyacente a G y argumentando en cada caso determine si:

      i) $\tilde{G}$ contiene o no un circuito euleriano y construya uno en el caso de que exista.

      ii) $\tilde{G}$ contiene o no un circuito hamiltoniano y construya uno en el caso de que exista.

   (c) Entre las siguientes propiedades de relaciones : simetría, antisimetría y transitividad. ¿cuál o cuáles no satisface R? Explique.

3. (28 ptos)

   (a) Suponga que S es un conjunto de diez enteros menores o iguales que 50. Demuestre que hay al menos dos subconjuntos distintos de cinco elementos de S que tienen la misma suma.

   (b) ¿Cuántas cadenas de n bits, donde $n \geq 4$, contienen exactamente dos veces la subcadena 01?

   (c) ¿Cuántas placas de matrículas formadas por tres letras seguidas de tres dígitos hay que no tengan letras ni dígitos repetidos?

   (d) Sea A_n la matriz $n \times n$ con doses en su diagonal principal, unos en todas las posiciones adyacentes a la diagonal principal y ceros en el resto de posiciones. Encuentre una relación de recurrencia para d_n, el determinante de A_n, resuelva dicha relación de recurrencia y obtenga una fórmula explícita para d_n.

4. (10 ptos) Construya una máquina de estado finito que retarde en dos bits una cadena de entrada, dando 01 como los dos primeros bits de la cadena de salida. Por ejemplo, si la cadena de entrada es $\omega = 00011010$ entonces la cadena de salida debe ser $\varphi = 11000110$.

5. (12 ptos) Considere la siguiente tabla de estados de la máquina M y resuelva los puntos siguientes:

	0	1
A	C 0	B 0
B	E 0	C 0
C	A 0	G 0
D	G 0	F 0
E	F 1	A 0
F	E 0	D 0
G	D 0	G 0

   (a) Reduzca M y determine una cadena de longitud mínima que distinga los estados C y G. ¿Es única ésta cadena? Explique.

   (b) Dibuje el diagrama de estados de la máquina conexa reducida equivalente a M. ¿Existen estados inalcanzables en dicha máquina? Explique.

   (c) Determine cuántos estados tendría una máquina Moore M_s semejante a la máquina conexa reducida equivalente a M_t, y escriba los nombres de cada uno de los estados según la notación utilizada en el texto de Denning, a saber, $((q, r), r)$, siendo q el nombre de uno de los estados de M_t y r uno de los símbolos de salida. NO construya la máquina M_s.

6. (10 ptos) Diseñe un autómata no determinista que reconozca el lenguaje $L(M) = \{10^*\} \cup \{10^*10^*\}$ y construya un autómata determinista con el menor número de estados que reconozca el mismo lenguaje $L(M)$.