MATEMATICAS DISCRETAS.
EXAMEN FINAL.

1. (24 ptos) En cada una de las siguientes afirmaciones llene los espacios y argumente, según se le solicite, para validar su elección.

   (a) Considere el conjunto $B = \{i, -i, 1, -1\}$. Entonces $(B, \cdot)$ es un __________ ____________ isomorfo a ___. El isomorfismo viene dado por ___ = ___, ___ = ___, ___ = ___ y ___ = ___.

   (b) Suponga que $E : B^m \to B^n$ es una función codificadora con matriz generadora G. Entonces $C = E(B^m)$ determina _____ clases laterales distintas puesto que _______________ __________. Más aún, dichas clases conforman _______________________. Sustente su respuesta.

   (c) Sea G un grupo con subgrupos H y K, con $K \subset H$. Si $o(K) = 6$ y $o(G) = 288$ entonces los posibles valores del $o(H)$ son _______________. Argumente su respuesta.

   (d) Sea $G =< a >$, con $o(a) = n$. Entonces $a^k, k \in Z^n$, genera G si k y n son _______ _______, por lo tanto un grupo de orden primo p tiene ____ generadores distintos.

   (e) Sea $p = 0.999$ la probabilidad de transmisión incorrecta de un bit utilizando un código de verificación de paridad. Entonces la probabilidad de cometer un número impar de errores al enviar la palabra codificada 110101101 es

$$\sum_{k=\_}^{\_} \binom{\quad}{\quad} (\qquad)^{\ } (\qquad)^{\ }$$

   (f) Sea $E : B^9 \to B^{15}$ una función codificadora de un código C. Si le dicen que se necesitan 130816 distancias para determinar la distancia mínima entre las palabras codificadas entonces usted lo confirma porque dicho número resulta de calcular ____________. Si alguien más le dice que es posible encontrar dicha distancia mínima con menos cálculos usted diría que SI, y en ese caso argumenta como podría ser esto posible, o diría que NO y punto.

2. (5 ptos) Sea $h : G \to H$ un homomorfismo sobreyectivo de grupos. Si G es un grupo abeliano, muestre que H también es abeliano.

3. (6 ptos) Sea $\phi : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Si $a \in G$, $o(a) = n$ y $o(\phi(a)) = k$, demuestre que $k|n$.

4. (15 ptos) Defina la función de codificación $E : B^3 \to B^6$ por medio de la matriz de verificación de paridad $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine el código de grupo C.

   (b) Determine si éste código corrige todos los errores simples de transmisión y determine además cuántos errores detecta como máximo. En ambos casos justifique su respuesta.

   (c) Suponga que tiene las siguientes palabras recibidas $r_1 = 010011$, $r_2 = 101010$ y $r_3 = 110011$. De ser posible decodifique cada una de las anteriores palabras e indique las razones por las cuales puede asegurar que la palabra fue bien decodificada o no.