PRIMER EXAMEN PARCIAL. MATEMÁTICA DISCRETA

1. a) Recuerde que el **máximo común divisor** entre dos números $a, b \in \mathbb{Z}^+$ es el número $d = mcd(a, b)$ que satisface dos condiciones a saber:

   - $d \mid a$ y $d \mid b$
   - Si d' es cualquier otro entero positivo tal que $d' \mid a$ y $d' \mid b$ entonces $d > d'$

   Es decir que podemos pensar en el mcd como una operación binaria.

   Con base en esta definición muestre que para cualesquier $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ la operación mcd es asociativa, es decir:

   $$mcd(mcd(a, b), c) = mcd(a, mcd(b, c))$$

   (**Sugerencia:** Define por $d = mcd(mcd(a, b), c)$ y usa la definición presentada.)[15 Pts]

   b) Un número real se llama **número algebraico** si hay un polinomio $p(x) \neq 0$ cuyos coeficientes $a_i \in \mathbb{Q}$ tales que $p(a) = 0$. Un ejemplo sería el número $\sqrt{2}$. Si definimos $p(x) = x^2 - 2$, entonces $p(\sqrt{2}) = 0$, esto implica que $\sqrt{2}$ es un número algebraico. Cualquier raíz de un número racional es claramente un número algebraico.

   Con base en esta definición muestre que si a es un número algebraico y r es un número racional, entonces $a + r$ es un número algebraico. [15 Pts]

2. Diseñe un algoritmo recursivo que indique si una secuencia de caracteres es o no un palíndromo (es decir secuencias que suenan igual al leerse en sentido contrario, como por ejemplo anilina o Átale, demoníaco Caín, o me delata. Use inducción para mostrar que el algoritmo es correcto. [20 Pts]

3. a) Dado $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se define $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \quad \text{veces}}$. Usar inducción matemática para probar que $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ [10 Pts]

   b) Como siempre Pablito Patrañas intenta conseguir un resultado que lo lleve a la cima de las matemáticas. Ahora el amigo Patrañas quiere probar que dado $a \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $a^{n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Para ello presenta la siguiente justificación:

   > Usaremos inducción fuerte:
   > Caso base) Si $n = 1$, entonces $a^{1-1} = 1$.
   >
   > Hipótesis inductiva: Supongamos que el resultado es cierto para todo k con $1 \leq k < n$. entonces $a^{n-1} = \frac{a^{n-2}a^{n-2}}{a^{n-3}} = \frac{1}{1} = 1$. Así, por el principio de inducción fuerte $a^{n-1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

   Merecerá finalmente el pobre patrañas la medalla Fields por este interesantísimo resultado? [10 Pts]

4. Consideremos la sucesión S donde S_n denota el número de cadenas de longitud n formada solamente por $0's$ y $1's$ que no contienen la cadena 000. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{S_n\}$ y resuélvala [20 Pts]

5. Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas $\underline{justificando}$ su respuesta:

   a) Al hacer una prueba por reducción al absurdo debe negarse la hipótesis para encontrarse tarde o temprano con la negación de la tesis.[2 Pts]

   b) Dada la ecuación de recurrencia $a_{n-2} = 3a_{n-1} + 4_n$ su correspondiente polinomio característico esta dado por $r^3 - 3r - 4 = 0$.[2 Pts]

   c) Si 5 es el único cero de multiplicidad 3 de la ecuación característica para una ELHC entonces la solución general esta determinada por $a_n = (\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2)(5)^n$. [3 Pts]

   d) Si se quiere probar un teorema de la forma $(H_1 \vee H_2) \Rightarrow T$ bastaría con mostrar que H_1 implica a la tesis T.[3 Pts]

TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA
NO SE ADMITEN PREGUNTAS DURANTE EL EXAMEN