UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

PRIMER EXAMEN PARCIAL. MATEMÁTICA DISCRETA

1. El teorema de Bezout enuncia que dados $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $mcd(a, b) = d$, existen $s, t \in \mathbb{Z}$ que cumplen $d = as + bt$, es decir $mcd(a, b) = as + bt$. Usar este resultado para mostrar que si $a|c, b|c$ y $mcd(a, b) = 1$ entonces $ab|c$.[20 PUNTOS]

2. Suponga que se define un conjunto de fórmulas bien formadas fbf determinadas por las siguientes reglas:

   - Toda letra es una una fbf
   - Si α es una fbf entonces $\neg\alpha$ también es fbf
   - Si α y β son fbf entonces $(\alpha \star \beta)$ también es fbf con $\star \in \{\Rightarrow, \Leftrightarrow \vee, \wedge\}$.

   a) Con base en la definición anterior de fbf construya una definición inductiva de las funciones $NC[\alpha]$ y $NP[\alpha]$ donde $NC[\alpha]$ denota el número de conectivos de α y $NP[\alpha]$ representa el número de paréntesis de α .

   b) Enuncie el principio de inducción en fórmulas para $fbf's$ y utilícelo para demostrar que

   $$2NC[\alpha] \geq NP[\alpha]$$

   [20 PUNTOS]

3. Construya (EN JAVA) un algoritmo recursivo que permita sumar los elementos de una matriz. Pruebe por inducción que su algoritmo es correcto. [20 PUNTOS]

4. Pablo Patrañas presenta el siguiente argumento para probar que todos los números Fibonacci son pares (Aquí denotamos los número Fibonacci por $F_0, F_1, F_2, ...$ donde $F_0 = 1, F_1 = 1$ y $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ para $i \geq 2$)

   La prueba es por inducción fuerte. Sea $P(n)$ el predicado F_n es par. **Caso base:** (n=0). Evidentemente es cierto pues $F_0 = 0$ es par.

   Paso inductivo: En el paso inductivo para $n \geq 0$ supongamos que $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n$ son todos pares y veamos que F_{n+1} es también par. Ahora bien por definición $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Dado que tanto F_n como F_{n-1} son pares entonces se tiene que F_{n+1} es par. Es usted Primo de Patrañas? De no ser así, encontrar el error cometido por el.[20 PUNTOS]

5. Un muchacho dispone de n monedas para comprar chucherías. Le gustan los yupis que cuestan una moneda cada bolsa, y dos tipos de pasteles que cuestan dos monedas cada uno. ¿De cuantas formas puede gastarse las n monedas? [10 PUNTOS]

TODA RESPUESTA DEBE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA
NO SE ADMITEN PREGUNTAS DURANTE EL EXAMEN