



## Primer Parcial de Álgebra Lineal

Profesor: Johann Suárez Motato

Marzo 1 de 2010

Grupo 19

- (16 pts) Determine la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados **justificando** su respuesta:
  - Si  $u$  y  $v$  son vectores de  $\mathbb{R}^4$  tales que  $u \cdot v = 0$ , entonces  $u = 0$  ó  $v = 0$ .
  - Si  $A$  y  $B$  son matrices de  $2 \times 2$  tales que la matriz  $A + B$  es invertible, entonces tanto  $A$  como  $B$  son invertibles.
  - Si  $A$  es una matriz de  $4 \times 4$  tal que  $|A| = 2$  entonces  $|-A| = -2$ .
  - Si  $A$  y  $B$  son matrices de  $3 \times 3$  entonces  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .
- (8 pts) Calcule el determinante de la matriz  $A$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- (10 pts) Un fabricante produce tres tipos diferentes de productos químicos:  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Cada producto debe pasar por dos máquinas de procesamiento:  $X$  y  $Y$ . La manufactura del producto requiere los tiempos siguientes en las máquinas  $X$  y  $Y$ :
  - Una tonelada de  $A$  requiere 2 horas en la máquina  $X$  y 2 horas en la máquina  $Y$ .
  - Una tonelada de  $B$  requiere 3 horas en la máquina  $X$  y 2 horas en la máquina  $Y$ .
  - Una tonelada de  $C$  requiere 4 horas en la máquina  $X$  y 3 horas en la máquina  $Y$ .Si la máquina  $X$  está disponible 80 horas a la semana y la máquina  $Y$  está disponible 60 horas a la semana, cuántas toneladas deben manufacturarse de cada producto de modo que las máquinas se utilicen en su capacidad total?.
- (5 pts) Determine una ecuación que relacione las constantes  $a, b, c$  de modo que el sistema lineal dado sea consistente.

$$x + y - 2z = a$$

$$2x - y - z = b$$

$$4x + y - 5z = c$$

- (6 pts) Considere los vectores  $u = (2, 3, -1, 4)$  y  $v = (4, 2, 2, -3)$ 
  - Halle un vector  $w_1$  que sea ortogonal a  $u$  y  $v$  simultáneamente.
  - Halle un vector  $w_2$  que sea paralelo al vector  $2u - v$ .

6. (8 pts) Demuestre los siguientes enunciados:

a) Si  $u$  y  $v$  son vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u \cdot v = \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2$ .

b) Si  $u$  y  $v$  son soluciones del sistema lineal  $Ax = b$ , entonces  $u - v$  es una solución para el sistema homogéneo asociado,  $Ax = 0$ .

**Bono** (5 pts) Sea  $A$  una matriz de  $n \times n$ . Demuestre que si  $Ax = x$  para todas las matrices  $x$  de  $n \times 1$ , entonces  $A = I_n$ .