EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DE UNA VARIABLE. 19 de noviembre de 2009

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ______________

PROFESOR: ______________________________ GRUPO: ______________

NOTA. NO ES NECESARIO QUE RESPONDA TODOS LOS PUNTOS DEL PRESENTE CUESTIONARIO: SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS DE UN TOTAL DE **118**.

1. (15 puntos)

   a) Calcule $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{3}{\ln x}-\frac{2}{x-1}\right)$

   b) Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

   c) Determine si la integral siguiente converge: $\int_4^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

2. (15 puntos) En cada uno de los siguientes casos calcule la derivada que se pide:

   a) $f(x)=\operatorname{sen}^2(\cos x),\quad f'(x)=?$

   b) $f(x)=\arctan(2^x),\quad f'(1)=?$

   c) Si $h(x)=f(x\operatorname{sen} x)$ y $f'(0)=3$ entonces $h'(\pi)=?$

3. (18 puntos) Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a)}\ \int \frac{x^2-1}{x^3+x}\,dx \qquad \text{b)}\ \int_1^e x\ln x\,dx \qquad \text{c)}\ \int \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

4. (20 puntos)

   a) Un triángulo rectángulo con catetos sobre los semi-ejes positivos x y y se forma en el primer cuadrante mediante una recta que pasa por el punto $(1,2)$. i) Escriba una fórmula $A(x)$ para el área del triángulo en función de la base x. ii) Determine los vértices del triángulo de manera tal que su área sea mínima.

   b) Un avión que vuela horizontalmente a una altura de 3 millas y una velocidad de 480 millas por hora, pasa directamente sobre un observador en el piso. ¿Qué tan rápido aumenta la distancia del observador al avión 30 segundos después? (30 segundos equivalen a 1/120 de hora)

5. (10 puntos) Considere la función $f(x)=x^4-6x^2$. Determine los intervalos donde la función es creciente o decreciente y los intervalos donde es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. Halle los máximos y mínimos locales y los puntos de inflexión. Dibuje la gráfica de la función.

6. (20 puntos)

   a) Considere la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y=x^2$ y $y=4x-x^2$. Escriba integrales con respecto a x y con respecto a y que representen el área de la región. NO evalúe las integrales.

   b) Considere la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y=\ln x$ $y=1-x$ $x=1$ y $x=e$. Escriba una expresión integral que permita calcular el volumen del sólido generado al hacer girar la región alrededor del eje y. NO evalúe la integral.

7. (20 puntos)

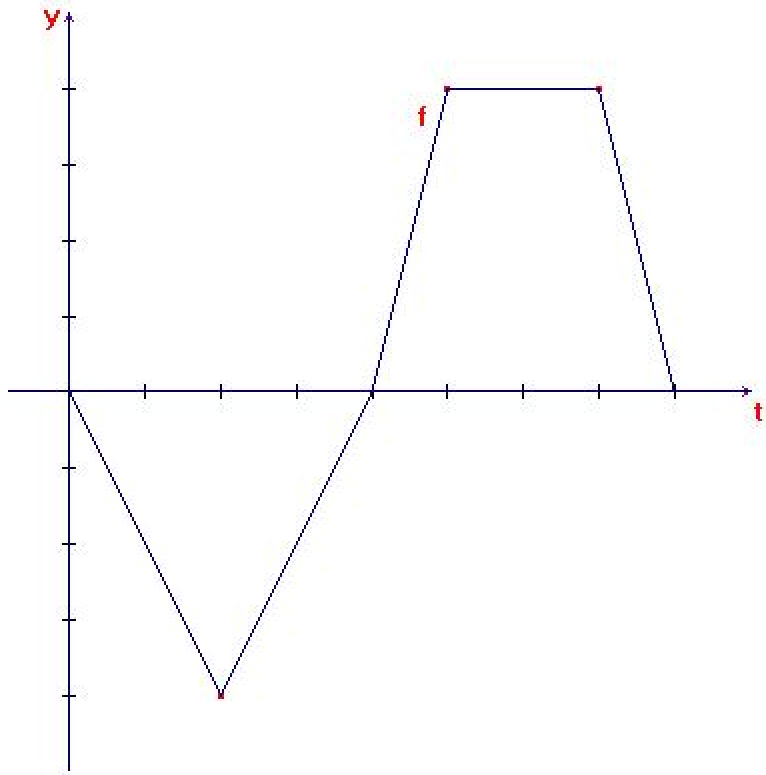
a) Determine si la recta $3x - y + 1 = 0$ es tangente a la curva $y = x^3 + 2$

b) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 + xy + \ln(\frac{y}{x}) = x + 1$ en el punto $(1, 1)$

c) Pruebe que la función $p(x) = 2x^4 + 10x - 2$ tiene al menos una raíz real

d) Determine si el teorema del valor medio puede aplicarse a la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

e) Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:



i) Encuentre los valores de $g(0)$ y $g(4)$. ii) Encuentre los valores de $g'(4)$ y $g'(6)$. iii) Determine los extremos absolutos y relativos (si existen) de la función g en el intervalo $[0,\ 8]$