UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL
SUPLETORIO PRIMER EXAMEN PARCIAL

1. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x+y+z-2w &= 3 \\ 2x+y+3z+2w &= 5 \\ -y+z+6w &= 3 \end{aligned}$$

   a) (8 ptos) Encuentre la solución general del sistema y escríbalo en la forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_h$. Indique claramente quien es $\boldsymbol{x}_p$ la solución particular y $\boldsymbol{x}_h$ la solución del sistema homogéneo asociado.

   b) (4 ptos) Escriba la matriz A de coeficientes del sistema. Calcule el *rango*(A) y la *nulidad*(A).

2. (6 ptos) Suponga que la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones, luego de haber sido reducida mediante *eliminación gaussiana*, queda en la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & k^2+2 & k \end{array}\right]$$

   Determine para que valores de k, el sistema original tiene infinitas soluciones y para cuales valores de k el sistema no tiene solución.

3. (12 ptos) Considere los puntos siguientes $P(-2,3,4), Q(4,-2,5)$ y $R(0,-2,0)$.

   a) Halle las ecuaciones paramétricas de la recta ℓ que pasa por P y es perpendicular al plano que contiene los tres puntos P, Q y R.

   b) Encuentre la ecuación de un plano π paralelo a la recta ℓ, que no contenga a dicha recta.

   c) Calcule la distancia de la recta ℓ al plano π.

4. (20 ptos) Determine para cada una de las afirmaciones siguientes su veracidad. Argumente cada una de sus respuestas:

   i) La *suma* y el *producto por un escalar* son operaciones cerradas en $\mathbb{R}^n$.

   ii) Suponga que $\boldsymbol{u}$ es un vector ortogonal a los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. Entonces es ortogonal a cualquier vector generado por $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$.

   iii) Sea A una matriz $m \times m$, entonces $A + A^T$ y AA^T son matrices simétricas.

   iv) Considere dos compañías de comida rápida, M y N. Cada año, la compañía M conserva $\frac{1}{2}$ de sus clientes, mientras que el resto de sus consumidores se cambian a N. Por otro lado, N conserva cada año $\frac{1}{4}$ de sus clientes. Si la distribución inicial del mercado está dada por $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Entonces la distribución del mercado después de un año es $\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix}$.

   v) Si $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ es un sistema lineal consistente con más de una solución, entonces tiene un número infinito de soluciones.