UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DE UNA VARIABLE. 15 de mayo de 2008

NOMBRE: ______________________ CÓDIGO: ____________

PROFESOR: ______________________ GRUPO: ____________

NOTA: el valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. *a*) (15 puntos) En cada uno de los siguientes casos calcule la derivada que se pide:

   i) $f(x) = x^{1/x}$, $f'(x) =?$ ii) $1 - e^{1-x-y} = \arctan(2xy)$, $\frac{dy}{dx}(1,0) =?$ iii) $h(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2^x} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$, $h'(x) =?$

   b) (18 puntos) Calcule las siguientes integrales:

   i) $\int_3^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}\, dx$ ii) $\int \ln(1-x^2)\, dx$ iii) $\int \frac{3x}{x^2+x-2}\, dx$

2. Considere la región acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x^2 - 4$ y $y = 2 - x$

   a) (7 puntos) Escriba integrales con respecto a x y con respecto a y que representen el área de la región. NO evalúe las integrales.

   b) (8 puntos) Formule integrales que representen el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región i) alrededor de la recta $y = 5$ y ii) alrededor de la recta $x = 3$ (NO evalúe las integrales).

3. (20 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es cierto o falso. Justifique claramente su respuesta

   a) La ecuación $x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ tiene exactamente una solución real

   b) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{8}$

   c) Si a es una constante distinta de cero, entonces $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$

   d) Si $f'(x) = x^3$ y $x + y = 0$ es tangente a la gráfica de f, entonces $f(-1) = 1$

4. (24 puntos)

   a) Un hombre de 6 pies de altura camina a 5 pies por segundo, alejándose de una luz que está a 15 pies de altura sobre el suelo. Cuando este hombre está a 10 pies de la base de la luz, ¿a qué ritmo está cambiando la longitud de su sombra?

   b) Demuestre que el rectángulo que tiene un perímetro dado P y un área máxima, es un cuadrado.

   c) Sean f y g dos funciones cóncavas hacia arriba en un intervalo I. Establezca condiciones sobre los signos y los crecimientos de las funciones f y g de tal manera que la función fg sea cóncava hacia arriba en I

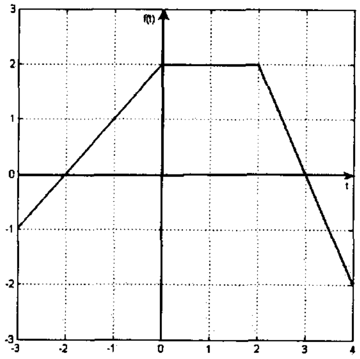
5. .

a) (8 puntos) Utilice el teorema del valor medio para demostrar que $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$ para cualquier par de números reales a y b. Justifique claramente por qué es aplicable el teorema.

b) (8 puntos) Encuentre el valor de las constantes a y b tales que h sea derivable en todos los puntos de su dominio:

$$h(x) = \begin{cases} ax^2 + 4x & \text{si } x \leq 3 \\ bx + 9 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) (12 puntos) Sea $g(t) = \int_{-3}^{t} f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra:



i) Encuentre los valores de $g(2)$ y $g'(2)$ ii) Determine los extremos absolutos y relativos (si existen) de la función g en el intervalo $[-3, 4]$ iii) Dibuje una gráfica sencilla de g.