Econometría 06216
Examen Parcial #1
Respuestas Sugeridas
Cali, Lunes 27 de Agosto de 2007

Profesor: Julio César Alonso

Estudiante: ________________________
Código: ______________________

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente todas las preguntas e instrucciones.
2. Este examen consta de **5** páginas; además, deben tener 1 página de fórmulas.
3. El examen consta de 4 preguntas que suman un total de 100 puntos. El valor de cada una de las preguntas esta expresado al lado de cada pregunta.
4. Escriba su respuesta en las hojas suministradas, marque cada una de las hojas con su nombre. NO responda en las hojas de preguntas.
5. El examen esta diseñado para una hora, pero ustedes tienen 3 horas para trabajar en él.
6. Recuerde que no se tolerará ningún tipo de deshonestidad académica. En especial usted no puede emplear ningún tipo de ayuda diferente a la que se le entrega con este examen.
7. El uso de calculadoras está prohibido
8. Al finalizar su examen entregue sus hojas de respuesta, así como las horas de preguntas.
9. Asigne su tiempo de forma eficiente!

Suerte.

1 Falso o Verdadero (25 puntos en total, 5 puntos cada subparte)

Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

a) Un estimador lineal eficiente es aquel cuyo valor esperado es igual al valor poblacional que se desea estimar.

Falso, la definición de estimador eficiente, corresponde a aquel cuya varianza es la mínima posible.

b) Sean X, Y y c dos variables aleatorias y una constante, respectivamente. Además suponga que $E[X]=0$ y $c \neq 0$, entonces X y cX^2 son estadísticamente independientes.

Falso, pues para que exista independencia de requiere que

$$E\left[XcX^2\right]=cE\left[X^3\right]=cE[X]E\left[X^2\right]$$
$$cE\left[X^3\right]=0$$
$$E\left[X^3\right]=0$$

y esto no necesariamente es cierto en este caso.

c) Si bien el siguiente modelo $w_i=\left(sen^2\left(\beta_4\right)+\cos^2\left(\beta_4\right)\right)^{\beta_3}\cdot X_i^{3\beta_1}\cdot Y_i^{\beta_3}\cdot Z_i^{\beta_4}\cdot\varepsilon_i$, no es lineal desde el punto de vista matemático, si se puede emplear los estimadores MCO para encontrar ***todos*** los coeficientes del modelo.

Verdadero, noten que en este caso el modelo es linealizable y se pueden estimar los tres parámetros del modelo:

$$w_i=\left(sen^2\left(\beta_4\right)+\cos^2\left(\beta_4\right)\right)^{\beta_3}\cdot X_i^{3\beta_1}\cdot Y_i^{\beta_3}\cdot Z_i^{\beta_4}\cdot\varepsilon_i$$
$$w_i=1^{\beta_3}\cdot X_i^{3\beta_1}\cdot Y_i^{\beta_3}\cdot Z_i^{\beta_4}\cdot\varepsilon_i$$

$$w_i=X_i^{3\beta_1}\cdot Y_i^{\beta_3}\cdot Z_i^{\beta_4}\cdot\varepsilon_i$$
$$\ln\left(w_i\right)=3\beta_1\ln\left(X_i\right)+\beta_3\ln\left(Y_i\right)+\beta_4\ln\left(Z_i\right)+\ln\left(\varepsilon_i\right)$$
$$\ln\left(w_i\right)=\beta_1\left(3\ln\left(X_i\right)\right)+\beta_3\ln\left(Y_i\right)+\beta_4\ln\left(Z_i\right)+\ln\left(\varepsilon_i\right)$$

d) Después de estimar el siguiente modelo $y_i=\beta_1 X_i+\alpha W_i+\varepsilon_i$, publiqué en mi página Web la siguiente Tabla Anova. Pero lastimosamente la Tabla no quedó bien cargada y se omitió un número que fue remplazado por XXX. Un estudiante me envió un correo con la siguiente afirmación: "Creo que uno de los números que falta es125.". ¿Es esta afirmación falsa o verdadera?

Fuente de variación	***SS***	***G de L***	***MS***
Regresión	XXX	XXX	25
Error	625	XXX	XXX
TOTAL	675	127	

Falsa, pues el modelo no tiene intercepto y por tanto no necesariamente SST= SSR + SSE. Así realizar esta afirmación es falsa.

e) Sea A una matriz de cualquier dimensión (n x n) tal que $A^{-1}A = I_n$ (donde I_n es la matriz identidad de orden n), entonces $Traza(A) = n$.

Falso, pues la traza no necesariamente debe ser igual al número de filas y o columnas de la matriz A. Con un contra ejemplo era suficiente para demostrar esto.

2 Selección Múltiple (15 puntos en total, 3 puntos cada subparte)

Determine cuál de las siguientes respuestas es la correcta. Escoja la mejor opción y explique en dos o tres líneas su respuesta. (No se dará ningún crédito a respuestas sin justificación.)

2.1. Considere el siguiente modelo: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$. Además suponga que para una muestra determinada, el gráfico de X versus Y (con X en el eje horizontal) es una "línea horizontal". Adicionalmente, suponga que $\overline{X} \neq 0, \overline{Y} \neq 0$ y $\overline{X} \neq \overline{Y}$ (donde $\overline{X}$ representa la media muestral de X y $\overline{Y}$ representa la media muestral de Y). Entonces, si los parámetros del modelo son estimado con el método MCO, entonces:

a) $\hat{\beta}_0 = \overline{X}$

b) $\hat{\beta}_0 = 0$

c) $\hat{\beta}_0 = \overline{Y}$

d) Ninguna de las anteriores.

Answer c.

2.2. Continuando con la pregunta anterior, se puede esperar que para el modelo estimado se obtendrá:

a) $\hat{\beta}_1 = \overline{X}$

b) $\hat{\beta}_1 = 0$

c) $\hat{\beta}_1 = 1$

d) $\hat{\beta}_1 = \overline{Y}$

e) Ninguna de las anteriores

Answer b.

2.3.Para el modelo $Y_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_i + \varepsilon_i$ es posible afirmar:

a) ε_i es medible directamente.

b) ε_i representa la distancia entre el punto observado (data point) y la línea de regresión estimada.

c) ε_i representa el error estimado.

d) Ninguna de las anteriores.

Respuesta: d)

2.4. Para el modelo $Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ donde $X_i = 1$ para todo i, se puede decir que:

a) $\overline{R}^2 < R^2$.

b) $\overline{R}^2 = R^2$

c) $\overline{R}^2 > R^2$

d) No tenemos suficiente información para comparar los valores de $\overline{R}^2$ y R^2

Answer b.

2.5. Sean SST, SSE y SSR suma de los cuadrados de la variabilidad total, la suma de los cuadrados de los errores y la suma cuadrada de la regresión. Ahora suponga que para una regresión múltiple con intercepto se tiene que SSE>0. Entonces tiene que ser cierto que:

a) SST<SSR.

b) SSE<SSR.

c) SSE>SSR.

d) Ninguna de las anteriores.

Respuesta d

3 (30 puntos)

El Banco Central de una pequeña República del Pacífico Sur desea determinar el comportamiento de la inversión (I_t, medido en millones de moneda local). Para lograr su fin emplean la tasa de interés de los depósitos a 90 días (r_t, medida en puntos porcentuales). En el departamento de investigaciones de dicho Banco se plantean los siguientes modelos:

$$(1) \quad I_t = \alpha_0 + \alpha_1 r_t + \varepsilon_t$$

$$(2) \quad Log(I_t) = \beta_0 + \beta_1 Log(1/r_t) + \eta_t$$

$$(3) \quad I_t = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{(r_t)^2} + v_t$$

$$(4) \quad Log(I_t) = \varphi_0 + \varphi_1 r_t + \omega_t$$

A partir de esta información, responda las siguientes preguntas.

a) Interprete los coeficientes del modelo (3) y discuta los signos esperados.**(10 Puntos)**

(Para la interpretación de cada coeficiente se asignarán 3 puntos y para el signo esperado 2 puntos)

En este caso tenemos que:

$$I_t = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{1}{(r_t)^2} + \nu_t$$

$$\frac{dI_t}{dr_t} = -2\gamma_1 \frac{1}{(r_t)^3}$$

$$\frac{dI_t}{dr_t/r_t} = -2\gamma_1 \frac{1}{(r_t)^2}$$

$$\frac{dI_t}{dr_t/r_t} \cdot \frac{1}{100} = -\frac{2\gamma_1}{100} \frac{1}{(r_t)^2}$$

$$\frac{dI_t}{\Delta\% r_t} = -\frac{2\gamma_1}{100} \frac{1}{(r_t)^2}$$

Por otro lado, se espera que al aumentar la tasa de interés la inversión disminuya, pues la tasa de interés es el costo de oportunidad de las inversiones productivas. Así, se espera que $\gamma_1 > 0$

Por tanto un aumento del uno por ciento en la tasa de interés implicará un cambio en la inversión de $-\frac{2\gamma_1}{100} \frac{1}{(r_t)^2}$ millones de moneda local.

Para el intercepto, en este caso, se puede decir que cuando la tasa de interés crece mucho, la inversión tenderá a estar cercana a γ_0 (es una asintota). En este orden de ideas el signo de este coeficiente puede ser positivo o negativo.

b) Interprete los coeficientes del modelo (4) y discuta los signos esperados.**(10 Puntos)**

(Para la interpretación de cada coeficiente se asignarán 3 puntos y para el signo esperado 2 puntos)

En este caso tenemos que:

$$Log\left(I_t\right) = \varphi_0 + \varphi_1 r_t + \omega_t$$
$$I_t = e^{\varphi_0 + \varphi_1 r_t + \omega_t}$$
$$\frac{dI_t}{dr_t} = \varphi_1 e^{\varphi_0 + \varphi_1 r_t + \omega_t} = \varphi_1 I_t$$
$$\frac{dI_t / I_t}{dr_t} = \varphi_1$$
$$\frac{dI_t / I_t}{dr_t} \cdot 100 = \varphi_1 \cdot 100$$
$$\frac{\Delta\% I_t}{dr_t} = \varphi_1 \cdot 100$$

Como se mencionó anteriormente, se espera que al aumentar la tasa de interés la inversión disminuya, pues la tasa de interés es el costo de oportunidad de las inversiones productivas. Así, se espera que $\varphi_1 < 0$

Así, un aumento de un punto porcentual en la tasa de interés implicará un cambio en la inversión de $\varphi_1 \cdot 100$ por ciento.

Para el intercepto, en este caso, si bien carece de interpretación económica, si se puede esperar que este tenga un signo positivo (¿por qué?)

c) Para el modelo (2), ¿Cómo comprobaría si la elasticidad de la inversión con respecto a la tasa de interés es unitaria o no? Explique de la manera más detallada posible como tomaría la decisión y que fórmulas emplearía. **(10 Puntos).**

Para este modelo tenemos que:

$$Log(I_t) = \beta_0 + \beta_1 Log(1/r_t) + \eta_t$$
$$I_t = e^{\beta_0 + \beta_1 Log(1/r_t) + \eta_t}$$
$$\frac{dI_t}{dr_t} = -\beta_1 \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 Log(1/r_t) + \eta_t}}{r_t} = -\beta_1 \frac{I_t}{r_t}$$
$$\frac{dI_t / I_t}{dr_t / r_t} = \frac{\Delta\% I_t}{\Delta\% r_t} = -\beta_1$$

Esto implica que para comprobar la hipótesis requerida será necesario plantear las siguientes hipótesis nula y alterna:

$$H_0 : -\beta_1 = -1$$
$$H_0 : \beta_1 = 1$$
$$vs$$
$$H_0 : \beta_1 \neq 1$$

Y esto se comprueba por medio de una prueba t. Se esperaba que el estudiante mostrara la formula que emplearía para calcular el estadístico y como tomaría la decisión.

4 (30 puntos)

La industria de licores del departamento de los Andes cree que la cantidad vendida y_t de su producto estrella (en 100,000 unidades) sigue la siguiente relación.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \varepsilon_t \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

donde X_{2t} representa el ***logaritmo*** del número de anuncios de televisión en el periodo t y X_{3t} denota la tasa de desempleo (medido como (Desocupados/PEA)*100).

a) ¿Qué condiciones debe cumplir el término aleatorio de error, para obtener estimadores MELI (BLUE) para los parámetros β por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO)? **(5 puntos)**

El término aleatorio de error debe:

- Tener media cero
- Varianza constante
- Y no estar autocorrelacionados

b) Después de realizar las transformaciones y operaciones aritméticas del caso, se obtienen las siguientes matrices que corresponden al equivalente de la matriz $X^T X$ y $X^T y$:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 100 & 40 & 0 \\ 40 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad X^T y = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Explique claramente a que corresponde cada uno de los elementos de estas dos matrices. (Por ejemplo, explique a partir de qué sumatoria sale el 10 que corresponde al último elemento de la matriz $X^T X$, y así sucesivamente con cada elemento de las dos matrices) **(5 puntos – medio punto cada uno)**

En este caso tenemos:

Falta

c) Encuentre los estimadores de los betas del modelo por el método de MCO. **(8 Puntos).**

En este caso tenemos que:

$$\beta_{hat} = \left(X^T X\right)^{-1} \cdot X^T y$$

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y = \begin{bmatrix} 1/20 & -\ 1/10 & 0 \\ -\ 1/10 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Interprete el significado de cada uno de los coeficientes estimados.**(6 Puntos – 2 puntos cada uno)**

Dado que $X_{2t} = \ln\left(Anun_t\right)$, entonces $\frac{\partial y_t}{\partial Anun_t} = \beta_2 \frac{1}{Anun_t}$ y por tanto $\frac{\beta_2}{100} = \frac{\partial y_t}{\Delta\% Anun_t}$

$\hat{\beta}_2 = -3/4$

Un aumento del 1% en el número de anuncios de televisión disminuirá la demanda de unidades del producto estrella en 750 (0.75*100,000/100 = 750) unidades.

$\frac{\partial y_t}{\partial X_{3t}} = \beta_3$

$\hat{\beta}_3 = 1$ Un aumento de un punto porcentual en la tasa de desempleo generará un aumento de 100,000 unidades en la venta del producto estrella.

$\hat{\beta}_1 = 1/2$. Carece de interpretación económica

e) Un investigador desea determinar si, en promedio, la elasticidad de las unidades vendidas del producto estrella con respecto al número de comerciales es igual a la elasticidad de éstas con respecto a la tasa de desempleo (en términos absolutos). Explique la hipótesis que debería realizar, y muestre la mayor cantidad de información que puede remplazar en las fórmulas que emplearía así como la manera en que tomaría la decisión.**(6 Puntos)**

Como se desea comparar las elasticidades en promedio se debe reconocer que:

$$\frac{\Delta\% y_t}{\Delta\% X_{3t}} = \beta_3 \frac{\overline{X}_{3t}}{\overline{y}_t}$$

Por otro lado, $\frac{\beta_2}{100} = \frac{\partial y_t}{\Delta\% Anun_t}$ y por tanto

$$\frac{\Delta\% y_t}{\Delta\% Anun_t} = \frac{\beta_2}{100}\frac{100}{\overline{y}_t} = \frac{\beta_2}{\overline{y}_t}$$

Es decir debemos determinar si:

$$-\left(\frac{\Delta\% y_t}{\Delta\% Anun_t}\right) = \frac{\Delta\% y_t}{\Delta\% X_{3t}}$$

$$-\frac{\beta_2}{\overline{y}_t} = \beta_3 \frac{\overline{X}_{3t}}{\overline{y}_t}$$

$$-\beta_2 = \beta_3 \overline{X}_{3t}$$

$$-\beta_2 - \beta_3 \overline{X}_{3t} = 0$$

$$\beta_2 + \beta_3 \overline{X}_{3t} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \overline{X}_{3t} \end{bmatrix} \beta = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \beta = 0$$

Así, la hipótesis es de la forma $R\beta = C$. Donde $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Noten que dadas las características de esta prueba de hipótesis, está corresponde a una prueba de hipótesis individual. La cual simplemente implica

$$H_0 : \beta_2 = 0$$
$$H_A : \beta_2 \neq 0 \qquad (5)$$

Esta hipótesis se puede comprobar empleando el siguiente estadístico:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_2}{S_{\hat{\beta}_2}} = \frac{\text{-3/4}}{\sqrt{(1/4)S^2}} = \frac{\text{-3/4}}{(1/2)\sqrt{S^2}} = -\frac{3}{2\sqrt{S^2}}$$

Este estadístico se debe comparar con el t de la tabla con 97 grados de libertad y con un nivel de significancia del 1%, 5% o 10% por ciento.