ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA PARA LA SUMA Y LA RESTA DE NÚMEROS ENTEROS MEDIADA POR LA METODOLOGÍA INMERSA EN LA MATEMÁTICA ARTICULADA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

OSCAR COLLAZOS VIVAS

UNIVERSIDAD ICESI
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2015

ESTRATEGIA DE ENSEÑANZA PARA LA SUMA Y LA RESTA DE NÚMEROS ENTEROS MEDIADA POR LA METODOLOGÍA INMERSA EN LA MATEMÁTICA ARTICULADA EN LA ESCUELA SECUNDARIA

OSCAR COLLAZOS VIVAS

Trabajo de grado para obtener el título de Maestro en Educación

Director
GIOAVANNI ÁLVAREZ SERNA.
Mg. Matemática

UNIVERSIDAD ICESI
FACULTAD DE EDUCACIÓN
PROGRAMA MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2015

DEDICATORIA

A mis hijos que marcaron el camino.
A mi madre.
Mi esposa.

AGRADECIMIENTOS

Al maestro Francisco Escobar Delgado, creador de Matemática Articulada, quien lo hace posible.
A mis maestros de ICESI. A mis compañeros de maestría,
A Ramiro Guzmán Álvarez.

PREFACIO

La elaboración de este trabajo de grado es posible gracias a Carlos Andrés Duque por sus recomendaciones y orientaciones que se dieron hasta el momento de su viaje a Brasil para realizar estudios de doctorado. En segundo lugar, al Profesor Giovanni Moisés Álvarez Serna director de este trabajo de investigación, por su orientación y enseñanzas en el campo de la matemática, sin el cual no pudiera haberse llevado a cabo. En tercer lugar, quiero mostrar mi más sincero agradecimiento al doctor Francisco Escobar Delgado, por sus aportes y compañía a lo largo de los últimos años trabajando en Matemática Articulada. Agradecer a mis compañeros de maestría, También en el plano académico, doy las gracias a mis profesores de maestría de la universidad ICESI por sus saberes y apoyo en los comentarios sobre mi trabajo presente.

En el plano personal, a todas aquellas personas que me han acompañado hasta la conclusión de este trabajo de grado. A mi madre Berta, y a toda mi familia su incondicional apoyo, en todos los sentidos posibles porque sin ellos la vida carece de felicidad. A mi institución educativa José Holguín Garcés y mis estudiantes con los cuales aprendí y sigo aprendiendo matemática. Mención especial a la Fundación Compartir y al Premio Compartir el Maestro quienes me otorgaron esta beca de estudio. Espero que si alguien queda fuera de esta breve lista sepa excusarme. A todos ellos reitero mi más sincero agradecimiento.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN 12

INTRODUCCIÓN 14

1. CAPITULO I. GENERALIDADES DEL PROYECTO 18
1.1 CONTEXTUALIZACIÓN 18
1.2 PROBLEMA 22
1.2.1 Pregunta Problematizadora 22
1.3 OBJETIVOS 22
1.3.1 Objetivo General 23
1.3.2 Objetivos Específicos 23
1.4 JUSTIFICACIÓN 23
1.5 HIPÓTESIS 26

CAPITULO II. MARCO TEÓRICO 27
2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN 27
2.2 LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COLOMBIA 32
2.2.1 Una visión crítica de la sociedad colombiana 32
2.2.2 Pensamiento de educadores matemáticos 34
2.2.3 Marco legal de la educación matemática 38
2.2.3.1 Objetivos generales y específicos 38
2.2.4 Los lineamientos y los estándares matemáticos 39
2.2.4.1 El Currículo Matemático 41
2.2.4.2 Competencias en Matemática 45
2.3 DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA 50
2.3.1 a Transposición Didáctica 51
2.3.2 El Contrato Didáctico 53
2.3.3 Secuencia Didáctica 54

CAPITULO III.LA MATEMÁTICA ARTICULADA 56

3.1 LA MATEMÁTICA ARTICULADA, DE PUÑO Y LETRA DEL AUTOR 56
3.2 METODOLOGÍA USADA EN MATEMÁTICA ARTICULADA 58
3.3 ESTRATEGIAS Y RECURSOS 59

CAPÍTULO IV. MATEMÁTICA ARTICULADA. EL PROCESO 60
4.1 ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA EN LOS NÚMEROS NATURALES 60
4.2 LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA EN LOS NÚMEROS NATURALES. 61
4.3 LOS CONJUNTOS EN LA METODOLOGÍA 67
4.4 USO DE LOS PUNTOS GEOMÉTRICOS 70
4.5 LA DECENA 72
4.6 SUMA DE VECTORES Y SEGMENTOS NATURALES 75
4.7 SUMA DE PUNTOS NATURALES 78
4.8 REUNIÓN O UNIÓN DE CONJUNTOS DISYUNTOS Y SUMA DE NÚMEROS NATURALES 80
4.9 RESTA DE SEGMENTOS Y VECTORES NATURALES 85
4.10 RESTA DE PUNTOS NATURALES 87
4.11 DIFERENCIA DE CONJUNTOS 88
4.12 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS 90
4.13 LAS FUNCIÓN ES ROTACIÓN 92
4.14 SUMA DE PUNTOS ENTEROS 93
4.15 SUMA DE VECTORES ENTEROS 95

CAPITULO V. MÉTODO 98
5.1 TIPO DE ESTUDIO 988
5.2 METODOLOGÍA 989
5.3 PLAN DE AULA 100
5.4 ESTRATEGIAS Y RECURSOS 101
5.5 ENCUESTA APLICADA A MAESTROS 102
5.5.1 Gráficas de resultados institución Antonio Lizarazo vs. Marino Renjifo Salcedo 102
5.5.2 Grafica de la institución Antonio Lizarazo 104
5.5.3 Grafica para la institución Marino Renjifo 105
5.6 RESULTADOS ENCUESTA ESTUDIANTES INSTITUCIÓN JOSÉ HOLGUÍN GARCÉS 106
5.7 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS 109

6. CONCLUSIONES 111

7. REFERENCIAS..... 113

ANEXOS 115

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Enseña en primaria secundaria 102

Gráfico 1. Enseña matemática Si/No 103

Gráfico 2. Disfrutabas enseñar matemática SI/NO 103

Gráfico 3. De cuántas maneras sumas con matemática Articulada: 1 2 3 4 5 104

Gráfico 4. Estás en capacidad de iniciar a sumar por las centenas: 105

Gráfico 5. De cuántas maneras sumas con matemática tradicional: 1 2 3 4 5 105

Gráfico 6. De cuántas maneras sumas con matemática Articulada: 1 2 3 4 5 106

Gráfico 7. Resultados de encuestas a estudiantes. Edad Gráfico 8. En cuál grado iniciaste a estudiar matemática articulada 106

Gráfico 9. En cuál grado iniciaste a estudiar matemática articulada 107

Gráfico 10. Disfrutas estudiar matemática 107

Gráfico 11. De cuántas maneras sumas con matemática articulada: 1 2 3 4 5 108

Gráfico 12. Saber restar con el ábaco 108

Gráfico 13. Es la resta una operación contraria a la suma porque una se traslada a la izquierda y otra a la derecha en la recta 109

LISTA DE ANEXOS

Anexo A. Formato de encuesta aplicada a los docentes de las Instituciones Educativas Antonio Lizarazo y Marino Renjifo 115

Anexo B. Formato de encuesta aplicada a los estudiantes de la Instituciones Educativas José Holguín Garcés 119

ABSTRACT

Mathematics education in Colombia presents a structural problem that is evident in the results of the internal and external tests. To output should propose solutions and present work goes in that direction. The topic addressed is the process of teaching addition and subtraction in the integers with at least five different forms comprising the sum of vectors, segments, points, the numbers and the set union. The development of this process is crossed by pedagogy and didactics, with constructivist components, didactic situations and the didactic transposition as a fundamental part of the paradigm.

The teaching of subtraction and addition in Integer is based on the model of Mathematics Articulated Dr. Francisco Escobar Delgado[1], who epistemologically contained in the Langlands program whose contribution is that mathematics is only one and its constituent parts such as sets, logic, algebra, geometry and calculus are articulated. This process is developed primarily with the update discipline of teachers.

In the present year 2015 in educational institutions Antonio Lizarazo in Palmira (V) and Marine Renjifo Salcedo in Candelaria (V) mathematical articulated model, with 80 hours of classroom work and training is implemented. These institutions were selected because tests Saber, have low performance in the past results and are intended by local governments and the private sector to improve the curriculum and discipline. Improvement processes are aimed at the elementary level at this stage. This process is intended to improve educational processes and teaching addition and subtraction of integers using methodology Articulated Mathematics. The implementation in the classroom by teachers is developing in the two institutions, so the results are focused on what is apprehended by teachers and their conceptualization. Students of the institution José Holguín are part of the development of the curriculum that started in grade one and ends in Grade 11 and its evaluation will be in Tests know 11 when they will graduate from high school, but her routines in the use of knowledge forms and strategies can be seen in the use of geometric elements for addition and subtraction.

Participating teachers answered a survey which seeks to determine the level of apprehension about knowledge and acquired skills. It is observed in responses as the masters begin to change their ways of transmitting knowledge with new mathematical knowledge. These new mathematical elements are experience in the teaching of the sum and subtraction in the Integers with segments, points, vectors and sets which are added and subtracted, which articulated with the functions you reach the sum of numbers. This process with the students of the institution of José Holguín Garcés who is in your area plan from grade 1 is evident in their responses.

Keywords: translation, rotation, vector, pedagogy, didactics, segment, sum, subtraction. integer, point.

[1] Escobar, Francisco (1976). Creador del método de Matemática Articulada.

RESUMEN

La Educación Matemática en Colombia presenta un problema estructural que se evidencia para la educación en los resultados de las pruebas internas y externas. Para dar salida se deben plantear soluciones y el presente trabajo va en esa dirección. El tema abordado es el proceso de la enseñanza de la suma y la resta en los Enteros con al menos 5 formas distintas que comprenden la suma de vectores, de segmentos, de puntos, la de números y la unión de conjuntos. El desarrollo de este proceso está atravesado por la pedagogía y la didáctica, con componentes constructivistas, situaciones didácticas y la transposición didáctica como parte fundamental del paradigma.

La enseñanza de la resta y la suma en los enteros se fundamenta en el modelo de Matemática Articulada de Francisco Escobar (Escobar, 2012c) contenidos en una serie de 8 textos desde el número 1 para grado primero de primaria, hasta el número 3 que se usa en grado 5; esta metodología se contiene en el Programa Langlands[2] cuyo aporte radica en que la matemática es una sola y sus partes constitutivas como son los conjuntos, la lógica, el álgebra, la geometría y el cálculo se articulan. Este proceso se desarrolla primordialmente con la actualización disciplinar de los docentes.

En el presente año 2015 en las instituciones educativas Antonio Lizarazo en Palmira (V) y Marino Renjifo Salcedo en Candelaria (V) se implementa el modelo de Matemática Articulada, con 80 horas de formación y trabajo en el aula. Estas instituciones fueron seleccionadas porque en las pruebas Saber, presentan un desempeño bajo en los últimos resultados y se pretende por parte de las administraciones municipales y del sector privado mejorarlas en lo curricular y disciplinar. Los procesos de mejoramiento están dirigidos al nivel de primaria, en esta etapa. Con este proceso se pretende mejorar los procesos y didácticas de la enseñanza de la suma y la resta de enteros con el uso de la metodología de Matemática Articulada. La implementación en las aulas por parte de los maestros está en desarrollo en las dos instituciones, por ello los resultados se enfocan a lo aprehendido por los maestros y su conceptualización. Los estudiantes de la institución José Holguín son parte del desarrollo de la metodología y es implementa en su currículo que inició en grado uno y termina en grado 11 y su evaluación se hará en las Pruebas saber 11 cuando se vayan a graduar de bachilleres, pero sus rutinas en el uso de los saberes se aprecia las formas y estrategias en el uso de los elementos geométricos para realizar operaciones de suma y resta.

Los maestros participantes respondieron una encuesta con la cual se busca conocer el nivel de aprehensión sobre saberes y conocimientos adquiridos. Se observa en las respuestas como los maestros comienzan a cambiar sus formas de transmitir saberes con los nuevos conocimientos matemáticos. Estos nuevos elementos matemáticos se vivencian en la enseñanza de la suma y la resta en los Enteros con segmentos, puntos, vectores y conjuntos los cuales son sumados y restados, que articulándose con las funciones se llega a la suma de números enteros.

Este proceso con los estudiantes de la institución José Holguín Garcés que se realiza en su plan de área desde grado 1 se evidencia en sus respuestas. Notándose en los estudiantes el grado de aprehensión de estos saberes y estas operaciones.

[2] El programa Langlands (1970). Desarrolla los grupos de Galois con la teoría algebraica de números.

Palabras clave: traslación, rotación, vector, pedagogía, didáctica, segmento, suma, resta, Enteros, punto.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta una propuesta metodológica y conceptual de enseñanza de la suma y resta de números enteros mediada por la metodología de Matemática Articulada[3], con ella pretendo alcanzar aprendizajes significativos en la enseñanza-aprendizaje de estas dos operaciones en los números enteros. La propuesta se enmarca en el desarrollo curricular de los estudiantes del grado octavo de la institución José Holguín Garcés. Son representativos también los talleres de actualización en maestros de básica primaria de dos instituciones del Valle del Cauca, la institución Antonio Lizarazo de Palmira y la institución Marino Renjifo Salcedo de Candelaria. La propuesta surge en respuesta a la necesidad de corregir la forma tradicional y única que hemos utilizado como método de enseñanza de las operaciones mencionadas en los números enteros, aportando más elementos matemáticos y nuevas estrategias didácticas.

Para lograr este propósito se desarrolla desde hace 10 años con el apoyo administrativo y de los compañeros maestros en la institución José Holguín Garcés de Cali, esta propuesta. Esta propuesta tomó como referencia básicamente en primer lugar Matemática Articulada del doctor Francisco Escobar (Escobar, 2000) y en segundo lugar los artículos disciplinares y de análisis de la educación del doctor Diego Pareja (2007). En tercer lugar elementos de la tesis "Aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de séptimo grado de la escuela nacional de música" (Borja, 2009) donde muestra como su enseñanza representa un alto grado de dificultad para maestros y estudiantes el proceso enseñanza-aprendizaje. También los trabajos de Eva Cid (2003) abordan sobre los obstáculos epistemológicos del aprendizaje de los números negativos. Ellos abordan aspectos sobre la dificultad de construcción del concepto de número entero, el uso excesivo de la memoria en su aprendizaje, la aplicación de reglas y solucionarios para resolver problemas y las dificultades propias de cómo no se sitúan en el conjunto de los números enteros y los operan como si fuesen números naturales, representando la operatividad de la suma y la resta en los números enteros una enorme dificultad.

Este tema sobre las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las operaciones suma y resta de los números enteros es de gran interés para la pedagogía y la didáctica. Ha sido tratada ampliamente y la doctora Borja menciona en su tesis también como este problema ha sido abordado de tres formas por Gallardo (1994). La primera desde la retrospectiva teórica en los trabajos de Piaget (1960) que están enfocados sobre la teoría de la inteligencia y el desarrollo cognitivo y que el objeto es algo que se construye. En segundo lugar desde el carácter experimental de Vernaud (1989) que propone la utilización y clasificación de las situaciones aditivas de una sola operación. Y en tercer lugar el referido a la enseñanza en los trabajos de Bruno y Martinón (1997) que proponen el uso de los modelos concretos, presentándolos en situaciones aditivas.

Son diversas las investigaciones que se han realizado con respecto a la problemática y a las estrategias didácticas para la enseñanza de los enteros, de ahí que Cid (2003) los clasifique en tres grandes grupos: propuestas de enseñanza, dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos e implicaciones didácticas de la epistemología del número entero. La forma como se presentan los contenidos puede ser catalogada de tradicional, en el sentido de que son procesos caracterizados por la transmisión y por la falta de estrategias para el uso de los recursos

[3] Modelo metodológico creado por escobar Francisco desde 1976.

disponibles, lo cual ha traído como consecuencia que la asimilación del concepto de número entero y la realización de operaciones en este conjunto no sea la mejor y por ende el desempeño en diferentes pruebas como las Olimpiadas matemáticas, las pruebas Saber, la presentación de exámenes de ingreso a la universidad no presenten los mejores resultados en un gran porcentaje de los estudiantes.

Los estudiantes de la institución educativa José Holguín Garcés en el aprendizaje de la suma y la resta en los números enteros presentan problemas o dificultades similares a los que se reseñan en la literatura internacional respecto del aprendizaje de las operaciones mencionadas, en particular no hacen uso de la utilización de materiales manipulativos o material real para la enseñanza de la suma de números enteros. En el texto Estrategias en la enseñanza de números enteros en la escuela secundaria (Barrios y Valdivia, 2012) documenta que la enseñanza de estas dos operaciones se realice en un contexto de aprendizaje interesante con material real; ya que se ha planteado que efectivamente la manipulación de materiales ayuda a los estudiantes a comprender y verbalizar las reglas de la suma en el conjunto de los números enteros. Con una serie de actividades se debe pretender desarrollar las competencias de los estudiantes para que **tomen el aprendizaje como una experiencia vivencial.**

La desarticulación con la cual se realiza el proceso de la enseñanza de la suma y la resta en el conjunto de los números enteros es, como puede observarse, una situación similar en muchos lugares del contexto nacional o internacional. En los marcos conceptuales referenciados igualmente se identifican trazas de algunos de los problemas epistemológicos asociados con el desarrollo histórico del concepto de número entero y su uso o aplicación en la vida diaria de los estudiantes y ciudadanos. Este obstáculo lo tratamos con más elementos didácticos para la enseñanza de la suma y la resta en los números enteros; esta propuesta de Matemática Articulada incorpora aspectos que se presentan para su análisis, se trabajan otros elementos didácticos como la lectura de texto matemático diario en el aula, la inclusión en el aula pretendiendo el desarrollo de la autonomía, cada estudiante con su ritmo propio **de aprendizaje.**

Este trabajo presenta otras formas de la enseñanza de las operaciones suma y resta en los enteros; usamos elementos geométricos como vectores y segmentos, conjuntos y lógica. Estos elementos los articulamos con las funciones que son fundamentales en la enseñanza-aprendizaje de la ciencia matemática. El proyecto se basa en Matemática Articulada la cual se aplica desde hace 10 años en los procesos de enseñanza aprendizaje en la institución José Holguín de Cali y en los talleres de actualización matemática con maestros de las instituciones Antonio Lizarazo de Palmira y Marino Rengifo Salcedo de Candelaria en el Valle.

Para el desarrollo del texto ha sido dividido en 5 capítulos. El primero se dedica a establecer el análisis del problema y a la realización de la pregunta problema, la justificación del trabajo de investigación y a la hipótesis. En el segundo capítulo se desarrolla todo el marco teórico que incluye lo pedagógico, lo didáctico y el marco legal. En el capítulo tres todo lo referente a qué es la metodología en su discurso. En el cuarto capítulo se desarrolla el macro de cómo se suman y restan enteros en el proceso de Matemática Articulada. En el último capítulo se desarrolla lo referente a como se evaluó el proceso, por ello se presentan los resultados de las encuestas y el análisis de lo más fundamental sobre el proceso de enseñanza de la suma y resta de los números enteros.

El primer elemento de análisis es el elemento histórico de la colonia española que atraviesa nuestra enseñanza y por consiguiente la educación matemática, con sus aspectos negativos y

positivos los cuales se transmite en nuestras instituciones educativas; los negativos que son más en número, siguen generando los males que padece esta bella ciencia en nuestro contexto. Siendo este aspecto el más relevante en nuestro padecimiento disciplinar, sin olvidar otros que son muy fuertes en un análisis que muestre nuestras debilidades en la enseñanza de la matemática.

En segundo lugar se describe un diagnóstico del momento histórico que rodea la enseñanza de la matemática en nuestro país con las evaluaciones internas y externas, las cuales, principalmente las externas (Pisa 2012) muestran un panorama que no es el mejor para el sistema educativo colombiano, en ese punto deja en una situación muy difícil al Ministerio de Educación y a los maestros.

Con los elementos anteriores y las circunstancias presentadas el paso siguiente es el interrogante de ¿El cómo incorporar otros elementos matemáticos en el proceso de la enseñanza de la suma y la resta en los números enteros que permitan una enseñanza aprendizaje con una representación más amplia de estas dos operaciones?, tratar de dejar en el pasado lo que los profesores españoles nos transmitieron. Los objetivos de la investigación precisan que se presenta una nueva estrategia con elementos no usados con anterioridad en la enseñanza aprendizaje de la suma y resta de enteros. Pero también que ese nuevo paradigma se enmarque en un contexto pedagógico y didáctico, donde el otro sea el eje fundamental del proceso educativo, para transformar, para romper las ataduras que no permiten nuestro desarrollo como sociedad y como ciencia.

La justificación se centra principalmente en el análisis histórico sobre los orígenes de nuestra educación matemática, de la forma en que nos fue transmitida por los españoles y cómo esa forma se convirtió en tradicional y en la única que parece posible la enseñanza de esta ciencia para nuestros maestros. También en la justificación se demuestra que existen errores conceptuales los cuales perjudican el aprendizaje haciendo ambiguo sus conceptos, entrando en contradicciones cuando la matemática es una ciencia exacta. De la forma en que abordamos la enseñanza de la ciencia nos la desarticula haciéndola parecer como si ellas no fuesen una sola. Pero también se demuestra que de esa forma de enseñar y entender la matemática no podemos entender ciencia y muy difícilmente desarrollar tecnología. Desde este contexto se intenta dar una respuesta a necesidades de la educación. Estos aspectos nos proporcionan que decir que podemos realizar un proceso enseñanza aprendizaje donde se involucren más elementos matemáticos en el aprendizaje de la suma y la resta en los enteros.

Existen gran número de trabajos dedicados al estudio y análisis de los obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los números negativos (enteros) y de las operaciones suma y resta. Existen grandes aportes de importancia como el de Cid (2003), Borjas (2009), Rúa (2013), y Navia y Orozco (2013). Cid precisa Se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma; para Rúa la enseñanza de la suma de números enteros tiene como referente teórico el paradigma constructivista, en el cual el estudiante tiene un desempeño activo en la construcción de conocimiento; Navia y Orozco abordan la problemática proponiendo una secuencia didáctica que permita introducir el concepto de número entero a partir de números relativos en contextos significativos para los estudiantes. En el marco de las soluciones al problema de estudio, estas deben regirse por las leyes propias de esta ciencia y en segundo momento es que imitando a los grandes maestros de esta ciencia haya articulación con el uso de las transposiciones didácticas.

Posteriormente se realiza un análisis del marco conceptual desde los lineamientos del currículo, los objetivos y los estándares con los cuales se desarrolla el proceso educativo en las instituciones. Se revisan los cinco ejes que desde 1976 predominan en la concepción de estructura matemática. Se incluye en este apartado los aportes de diferentes teorías didácticas a la metodología, entre las más significativas desde su epistemología sobresalen la transposición, las secuencias, el contrato y los obstáculos didácticos.

Se brinda la visión y análisis de maestros y educadores matemáticos que han tenido y tienen competencias de alto desempeño por los reconocimientos que les otorga su labor y sus títulos académicos. De ellos se toma a los doctores en Matemática Francisco Escobar creador de Matemática Articulada y Diego Pareja Heredia[4], quienes analizan el panorama desde su óptica como matemáticos, pero también como educadores en instituciones universitarias. Ellos presentan un diagnóstico y a la vez aportan soluciones.

En el apartado dedicado al desarrollo de la propuesta metodológica y conceptual de la enseñanza de la suma y la resta en los números enteros, se muestran de la forma más detallada cada paso que ocurre en su desarrollo y los aportes a la enseñanza de estas dos operaciones. Realizamos suma de vectores, de segmentos, de puntos, con unión y diferencia de conjuntos. Los pasos buscan ser los necesarios, siempre respetando las leyes de la matemática y con procesos donde la didáctica y la pedagogía estén siempre presentes. La propuesta presenta la opinión y pensamiento del doctor Escobar sobre su investigación de Matemática Articulada. La realización del proyecto requiere de material que se desarrolló específicamente para su implementación.

Por último se presenta un análisis de datos donde muestro algunos de los resultados de la metodología obtenidos mediante dos encuestas, una dirigida a los maestros de las instituciones Antonio Lizarazo de Palmira (V) y Marino Rengifo Salcedo de Candelaria (V), y la otra encuesta a los estudiantes de grado 9-3 de la Institución Educativa José Holguín Garcés de Cali (V). Estos tres grupos, el de maestros y de estudiantes reciben en la actualidad enseñanza de la metodología propuesta. Los estudiantes en su proceso educativo reciben en su currículo Matemática Articulada desde grado uno. Este análisis de datos refleja las fortalezas y debilidades del proceso, pero también el grado en el que se cumple la hipótesis planteada. La educación matemática traspasa la esfera de la escuela para llegar a constituirse como un medio fundamental para hacer posible el desarrollo integral de los estudiantes. Es la escuela el lugar donde se transmitan estos saberes que dotan al ser para su desempeño social y laboral. En nuestro sistema educativo el aprendizaje y la enseñanza de la matemática con sus elementos históricos y su epistemología muestran síntomas que no permiten un mejor desempeño de los estudiantes en la vida diaria y el desarrollo de esta ciencia. La propuesta metodológica y conceptual presente se espera sea un punto de partida para el desarrollo de nuevos paradigmas que enriquezcan el proceso educativo de la educación en Colombia.

[4] Pareja, Diego. Matemático y profesor universidad del Quindío.

CAPITULO I. GENERALIDADES DEL PROYECTO

"A los 11 años empecé a estudiar geometría, teniendo por preceptor a mi hermano. Fue Uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. Jamás había imaginado que pudiera haber algo tan delicioso en el mundo". Bertrand Russell (1967)

1.1 CONTEXTUALIZACIÓN

El presente trabajo se ubica en un paradigma de la enseñanza de las operaciones básicas suma y resta en el conjunto de los Enteros, como parte de un proceso de desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dentro de la metodología matemática Articulada. Con ella se enfoca la enseñanza y el aprendizaje de estas operaciones partiendo de la inclusión de elementos como los conjuntos, la lógica y la geometría para llegar a representar esos elementos de forma aritmética. Esta metodología conceptual trabaja el aprestamiento de forma activa desde la geometría, la lógica y los conjuntos y anexo a ello tiene como eje transversal fundamental la lectura de texto científico, la pedagogía activa y el constructivismo. Con el uso de la geometría y los conjuntos busco que mis estudiantes perciban el movimiento, que el uso de la memoria sea mínimo y que se sienta feliz de aprender de una forma activa y entendiendo. La propuesta presente es parte del desarrollo de la metodología Matemática Articulada que se construye como proceso metodológico, con el objetivo de enfocar la forma en la que los maestros de esta ciencia la construyeron. Lo histórico tiene como objetivo sustentar en esos grandes maestros la teoría de Matemática Articulada.

El contexto de la propuesta se enmarca en connotaciones sociales, culturales e históricas de nuestro entorno, las cuales están presentes para aportar en la construcción de estos nuevos enfoques que faciliten nuevos paradigmas en la educación matemática y en la solución de sus necesidades. La sociedad, la industria y el avance de la ciencia moderna exigen mayor calidad en la educación y la escuela debe responder con alternativas que se pretende aporten a crear soluciones con rigor científico a estas falencias. Esta innovación aborda la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones mencionadas en la aritmética con otras dimensiones educativas las cuales son el producto de una investigación desde la topología matemática por parte del doctor Francisco Escobar Delgado (2000)[5] y ella como una de las mayores aportantes, junto al álgebra, a la lógica, los conjuntos y el cálculo, partes constitutivas de esta ciencia se construye el modelo Matemática Articulada. La aplicación del modelo tiene dos experiencias, una en la institución José Holguín Garcés (Cali) que atiende estudiantes de estrato 1, 2, y 3, y otra en talleres en diferentes ciudades de Colombia. En esa actualización docente en diferentes lugares de Colombia se ha compartido con maestros de El Banco, Plato y Pivijay (Mag), en Magangué y Cartagena (Bol), y en la actualidad con docentes de Palmira y Candelaria bajo el apoyo logístico de las fundaciones Mayagüez y Manuelita en el Valle del Cauca. Con base en los nuevos saberes

[5] Matemática Articulada 3: es una metodología construida basándose en el programa del matemático Robert Langlands Phelan. Su trabajo en formas automórficas y la teoría de la representación tuvo un efecto importante sobre la teoría de los números.

adquiridos durante la realización de los talleres se realizan encuestas para conocer el grado de aprehensión de esos elementos matemáticos impartidos en los talleres.

El sistema educativo colombiano al igual que todos los países de la región, está inmerso en el mundo globalizado y desde esa circunstancia se somete a las mediciones propias de los sistemas de control. Para nuestro país el Ministerio de Educación presentó en el año 2012 a nuestros estudiantes de 15 años a las Pruebas internacionales Pisa[6], los resultados ofrecen una información comparativa con los países que se presentan a ellas. Los resultados del año 2012 y los de las ediciones anteriores que se llevan a cabo cada tres años preocuparon nuevamente a la sociedad. En estas primeras reflexiones, y diagnósticos aparecen como fundamentales para solución de la crisis la pedagogía y la didáctica, pero estas desarrollan también por naturaleza una educación para la vida, como soporte hacia el avance de una sociedad más igualitaria, donde el otro, el desposeído, exista.

> Pensar la educación como acontecimiento ético significa asumirla como una relación con el otrodesde la alteridad, más allá de los discursos técnico–especializados o en términos económicos. Es la práctica de la hospitalidad y el acogimiento al recién llegado; es la educación como acción constitutivamente ética de una pedagogía de la radical novedad, en el que el ser humano se convierte en el epicentro de todo el proceso de aprendizaje (Bárcena y Melich, 2001).

Por ello cuando las pruebas internacionales Pisa (Programme for Internacional Student Assessment) que son programadas, producidas, calificadas y financiadas por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) y en el caso de Colombia en sus participaciones, los resultados obtenidos nos ubican en los lugares postreros. Esto nos lleva como deber ético y de educadores a reflexionar sobre este fenómeno y buscar nuevos modelos que otorguen a nuestra educación un mejor devenir cultural, social y educativo. Es oportuno aclarar que las pruebas internacionales donde se ha medido a parte de la educación colombiana no es la única ni debe ser la única para obtener información de la calidad. En la medición de los resultados del año 2012 en las pruebas Pisa se observa como los estudiantes colombianos con edad de 15 años obtienen un bajo desempeño en ciencias, matemática y lenguaje (lectura crítica y comprensión lectora). Estos resultados hicieron que el contexto político, el social, el académico y el sindical abrieran un debate sobre las causas y posibles soluciones. Gran parte de la sociedad hace referencia a estas falencias de la educación en nuestro país sin entender que significan las pruebas y qué son las pruebas Pisa y qué significa esos últimos lugares, en términos de educación, ciencia y tecnología para un mundo globalizado. El lograr que la educación esté en el centro de la discusión en nuestra sociedad es para muchos un éxito enorme porque pocas veces se ha vivido de manera tan fuerte en los medios de comunicación y menos en el mundo político.

Estos escenarios donde se plantean nuevos retos, nuevos horizontes para nuestra educación. Retomar la visión de Bárcena y Melich (2001) cuando aludían a que "entender la educación desde esta perspectiva implica una concepción de la tarea pedagógica como de radical novedad. Es hablar de educación como acontecimiento ético frente a todos los intentos de pensarla desde estrechos marcos conceptuales que pretenden dejarla bajo el dominio de los discursos tecnológicos…" La perspectiva educativa de mejora e innovación de los tecnócratas del

[6] Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes.

ministerio ha sido concebida bajo estrechos marcos políticos y de escasa concepción pedagógica, con modelos importados de los cuales tenemos recuerdos y secuelas, una de ellas la misión alemana en el período 1968–1972 (Rojas, 1982), otra la promoción automática (Decreto 230 de 2002).

Con los resultados de las pruebas Pisa 2012 se abre un debate sobre la educación y su calidad. Los planteamientos y análisis hechos por sectores de la sociedad que son un referente porque estos análisis apuntan a que nuestra educación debe mejorar y que son varios sectores los que deben aportar a la solución. La educación matemática presenta problemas en su enseñanza-aprendizaje y ella recibe críticas que deben ser analizadas. La enseñanza aprendizaje de las operaciones suma y resta se enmarcan en la situación problémica u obstáculo epistemológico de la educación matemática, por ello estos elementos son parte de un problema que es más amplio. El ministerio, los maestros y la sociedad son hacen parte del problema y deben ser parte de la solución de la calidad de la educación. Las universidades donde se forman los maestros deben rediseñar los currículos.

Este largo período como educador matemático me enseñó que sometí a mis estudiantes a grandes desaciertos, debilidades y frustraciones. Para el desempeño de mi área disciplinar recurría a las herramientas en pedagogía y didáctica que adquirí en mi formación normalista y muy pocas en mí licenciatura. Del ministerio recibí escasa actualización docente, poco apoyo para profesionalizarme en niveles de maestría y menos de doctorado, y por ultimo escasos materiales didácticos y tecnológicos. Recibí los estándares, los lineamientos y los modelos de pensamientos impuestos desde 1976 (Ministerio de Educación Nacional, 2002), siendo este modelo de pensamiento matemático el eje de la educación matemática para la enseñanza en la educación básica, media y media vocacional en Colombia; y cuya directriz es la que constituye los planes de clase, con los cuales los maestros desarrollamos los contenidos del área. En el desarrollo y construcción del modelo que aplico en el aula de clase esta herramienta me mostraba y muestra que contiene debilidades y contradicciones de las cuales me ocuparé más adelante. Hechos de esta magnitud me conducen a la reflexión sobre mí hacer docente, a reconocer cuáles eran mis errores y mis aciertos, donde empezar mis cambios disciplinares que me permitieran usar mejoras cualitativas con mis herramientas pedagógicas y didácticas, beneficiando en primera instancia a mis estudiantes, a la educación y la sociedad.

En esas circunstancias la Secretaria de Educación Municipal de Cali ofreció a las 10 instituciones con menor puntaje (año 2005) en las pruebas ICFES (hoy Saber 11) un actualización docente en matemática y es en ese momento donde tengo contacto con Matemática Articulada, desde ese momento ella me otorgó una nueva visión, nuevas herramientas conceptuales y pedagógicas sobre mi disciplina y mi hacer educativo. Una reflexión en primer momento me permite la necesidad de realizar cambios importantes en mi labor docente. Asumí esa tarea y desde ella proyecto mi trabajo como maestro.

Al revisar los modelos de pensamiento matemático en las cuales el MEN dividió la educación matemática para su enseñanza-aprendizaje desde 1976, en 5 pensamientos, el marco general de la labor docente que los maestros recibimos del MEN desde sus lineamientos y los estándares básicos que conforman la columna vertebral de la educación matemática. Los cinco (5) pensamientos que conforman la enseñanza temática del área de la educación matemática son: *Pensamiento métrico. Pensamiento aleatorio. Pensamiento variacional. Pensamiento numérico. Pensamiento espacial y geométrico*. Basados históricamente en este paradigma, la educación matemática y su praxis, adquieren rasgos

determinantes como la memorización y la repetición, pero también carentede movimiento. Nuestra educación matemática tiene una característica producto de su desarrollo, fue hecha para el conteo; desvertebración de sus áreas componentes, mecanización de términos y ejercicios. El caso de la memorización en matemática, abarca casi el 100 % del aprendizaje de esta ciencia. A ello se suma una evaluación descontextualizada, y por temas, junto a la separación de los pensamientos matemáticos. Elementos esenciales como la epistemología, la pedagogía, la psicología, la historia, la didáctica, la inclusión en el aula de clase, eran ausentes en gran parte de mi labor educativa. El no conjugar el saber didáctico y el saber disciplinar de las partes de la ciencia matemática, se reflejaba por ejemplo en la asignatura de geometría, que históricamente se trabajaba en la mayoría de las ocasiones solo al final del año escolar. Cabe anotar que en las instituciones donde he laborado, la geometría es una asignatura que se desarrolla de forma separada del álgebra y de la aritmética, como si ellas fueran ciencias diferentes. Hechos como este, muestran que la articulación de las partes componentes de la ciencia matemática son casi inexistentes en nuestra matemática, no se realizan procesos educativos que las integren como se realiza en el caso de la trigonometría donde se articulan la geometría y el álgebra. En el caso de la trigonometría se observa su articulación con la geometría en todo momento.

Hacer de la educación matemática una ciencia que genere en nuestros niños y jóvenes emociones positivas para que su aprendizaje sea un recuerdo agradable y significativo. Los genios de la matemática han hecho y hacen articulaciones. Por ello la metodología basa su desarrollo en articular las áreas que la constituyen como una solución factible para que sea entendida. Imitar a los maestros de esta ciencia es un camino valido, que tiene una gran ventaja, la ventaja de haber sido usada y demostrada, y por tanto libre de errores. Pero a esta articulación en la educación debemos agregar el amor, la esperanza, los sueños, permitiendo la natalidad de una poderosa ciencia que significativamente aporte al estudiante herramientas científicas, para el desarrollo como persona y para nuestra sociedad como ciudadano ético y competente matemáticamente. Esta educación matemática se apoya en la pedagogía, para la emergencia de un nuevo saber, para esa nueva natalidad de esta hermosa ciencia.

> Natalidad es efectivamente el término, aparece en todos sus libros en un lugar privilegiado de la argumentación: es siempre la bisagra entre una concepción fatalista del desarrollo de los asuntos humanos y la afirmación de las posibilidades de los hombres para actuar y torcer los destinos del mundo. (Arendt, 2011)

Y continúa adentrándonos en ese nacimiento del ser, de ese comenzar: "y que comenzar es la capacidad suprema del hombre–capacidad garantizada, por cada nacimiento, que es en sí cada hombre" (Arendt, 2011).

La enseñanza las operaciones suma y resta en el conjunto de los números naturales y los números enteros, es una forma de aprender para cambiar y construir desde nuevas visiones, desde nuevos estadios de la educación matemática, desde nuevas perspectivas. Ese inicio para mi es la geometría euclidiana, las funciones matemáticas, el movimiento, el aprender haciendo. Las funciones claramente me permiten articular las asignaturas o partes de esta ciencia, como lo han hecho los maestros de esta ciencia, ejemplos como el del maestro Isaac Newton[7] quien articuló la geometría y el álgebra para construir El Cálculo cuando usando la recta hizo

[7] Newton Isaac. 1642-1727. Matemático y físico inglés.

articulación con los números reales mediante la función posición lo cual nos lleva a saber por ejemplo el valor de la velocidad instantánea en física. Leonhard Euler (1770) en el pasado articuló matemática con física al calcular la rotación de nuestra luna, John Milnor (1976) como ejemplo articula la geometría y el cálculo en su texto Topología diferencial, y Gregory Perelman (1996) articulando en textos como Geometría Riemaniana y Topología geométrica en el presente. Para Robert Langlands (1976) quien en el presente adesarrollada el programa Langlands que integra áreas de forma más estructurada (me ocuparé especialmente más adelante) entre otros. Pero la articulación fundamentalmente me permite observar el *movimiento* que va desde el mundo real o físico hacia la matemática, que se obtiene únicamente a través de las funciones, son estas las bisagras entre dos o más áreas de la matemática (el maestro Euclides en su segundo y tercer postulado da movimiento al punto y por consiguiente a la matemática). Para resaltar la importancia de las funciones en la matemática recurramos a la cita de uno de los grandes matemáticos del siglo pasado, la del grande matemático alemán Félix Klein: "Pondremos el **concepto de función** en el centro de la instrucción, porque, de todos los conceptos de la matemática de los dos últimos siglos, este concepto desempeña el papel más importante cuando la matemática es empleada…" (El resaltado es mío) . Recordando también que el maestro Klein trabajó en el ministerio de educación de Alemania siendo hoy reconocido como uno de los artífices del desarrollo educativo y tecnológico de este país, y también profesor en la universidad de Gotinga (Primera universidad en otorgar títulos en el mundo de PhD en su época).

Criterios como el anterior pueden ser usados en nuestras aulas de clase adaptándolos a nuestros contextos sociales y educativos, adaptándoles a nuestro currículo a nuestros estándares educativos para ser evaluados, dejando su sitio a que la pedagogía tome su lugar natural en la educación, que entre al aula y se instale eternamente en concubinato con la didáctica, la moral y la ética. Hacer que este panorama deje solo el espacio mínimo necesario a la memorización, donde los maestros, niños y jóvenes haciendo uso de la matemática, sean reflexivos y críticos, para que la lectura de ciencia y tecnología llegue a sus saberes y sus prácticas. Que los procesos de desarrollo permita un goce del aprendizaje, del saber, de lo pedagógico, de lo metodológico, de lo temático, de lo físico y lo emocional. Que lo motriz y lo sicológico sean vividos felizmente en la escuela por nuestros estudiantes. Que el saber se convierta en alegría formando científicos, que comprendan y aprendan, que se maravillen al descubrir esta hermosa ciencia y les acerque al conocimiento de su entorno en lo ambiental, en lo social y en lo físico, que usen la memoria para recordarla con agrado y felicidad. Que sean seres y ciudadanos matemáticamente competentes. Que ésta ciencia matemática que fue hecha por los hombres sea para el goce y utilidad de ellos.

1.2 PROBLEMA

1.2.1 Pregunta Problematizadora

¿Cómo presentar una nueva metodología matemática en el proceso enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta de los números enteros que faciliten una representación más amplia de estas dos operaciones?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Presentar una estrategia metodológica con mayor variedad de elementos geométricos, lógicos y de conjuntos para la enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta en los números enteros, en tres instituciones públicas del Valle del Cauca.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Implementar en el proceso enseñanza aprendizaje la suma y resta de vectores, segmentos y puntos geométricos articulándolos mediante funciones con la suma de números enteros en el grado 9 de la institución educativa José Holguín Garcés y en la básica primaria de las instituciones Antonio Lizarazo (Palmira) y Marino Renjifo (Candelaria).

- Desarrollar el concepto de la función cantidad, longitud y posición articulándola con la enseñanza de la suma y la resta en los números enteros.

- Establecer articulación entre las funciones geométricas rotación y traslación con la suma y resta de enteros.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Nuestra historia, nos enseña que en la ciencia y la educación el único español que pisó tierras colombianas, con profundos conocimientos matemáticos en 300 años de colonizaje se llamó José Celestino Mutis y llegó a estas tierras al final de la colonia. Que su aporte fue muy importante pero nosotros seríamos distintos en lo social y científico si de España hubiesen llegado más hombres de ciencia como Celestino Mutis. Este hecho muestra las condiciones heredadas de España desde lo científico, lo tecnológico, lo social, lo educativo, lo ético y lo moral. El escaso aporte científico que heredamos de España aún la padecemos. Desde la educación matemática podemos aportar a mejorar cualitativamente las ciencias básicas que deben pasar a ser parte fundamental de esas herramientas que nos permitan asumir una ciencia propia, que nos de autonomía científica, una educación de calidad, donde la ciencia matemática y la educación matemática sean parte de esas mejoras cualitativas.

Los maestros debemos liderar innovaciones y proyectos para que en la educación de nuestro país se presenten en la básica primaria y la básica secundaria, nuevas alternativas metodológicas y pedagógicas que busquen dar salida a las falencias que hoy se pueden presentar en los procesos de enseñanza aprendizaje. Como maestro de matemática la enseñanza de las operaciones básicas como la suma y la resta en los números naturales y luego en los Enteros tienen falencias debido a que el acto educativo se ha centrado solo en la cantidad y en el conteo,dejando olvidado aspectos básicos de la geometría, como la suma de segmentos, de puntos, y la unión de conjuntos; implementar la utilidad de las funciones, el cómo representar el movimiento que tiene la materia para ser representado en forma matemática. En este procesode aula con la aplicación de las funciones, se realiza la articulación entre los conjuntos y la aritmética, entre la lógica y la aritmética, y la geometría

y la aritmética, dando movimiento a la matemática. Construyendo un proceso que luego se pueda relacionar con otros conocimientos geométricos, con aritmética, con álgebra en la suma de polinomios y en la ciencia computacional. La articulación se realiza durante una misma clase cuando por medio de las funciones pasamos de la geometría y los conjuntos hacia la aritmética hasta llegar a la suma de números naturales y Enteros, es un mismo proceso de aprendizaje conceptual.

La suma de números, de puntos, de vectores y segmentos enteros mediante las funciones geométricas y aritméticas, permite realizar procesos cognitivos donde por ejemplo mediante las función cantidad articular la unión de conjuntos con objetos reales, desde lo concreto hacia lo abstracto con la suma de números naturales, estos saberes pretenden ser más amplios porque en ellos se hace intervenir la lectura y la escritura como eje transversal. Con el uso de elementos geométricos y de conjuntos se busca aprendizajes pertinentes con desarrollos articulados al entorno y contexto de vida de los maestros y alumnos para mediante situaciones problémicas hacer aplicación de los conceptos y competencias adquiridas. Los saberes y aprendizajes pasan por lo práctico, aprender haciendo en contexto, a aprehender más competencias que las que hoy se plantean en los currículos. Los maestros y estudiantes adquieren lectura de texto científico permitiendo el uso articulado del lenguaje y la ciencia matemática. El uso de material real en diferentes materiales como fomi, cartulina, madera o tubos de pasta permite representar vectores y segmentos los cuales junto a la regla bicolor (herramienta de uso en clase de color verde y rojo en nuestro caso) se usan para realizar sumas de segmentos, de vectores geométricos y de puntos para realizar rotaciones de segmentos y vectores en el espacio, primero en el espacio euclidiano de una sola dimensión (E1). Y luego en el espacio de dos dimensiones E2. Con conjuntos disyuntos y material real se realiza articulación con la suma de números. Se crean procesos para que estos en la enseñanza de las matemáticas sean pertinentes, incluyentes, deseando que los tabúes y miedos que padecieron muchas generaciones, desaparezcan. Construir un paradigma, un proceso pedagógico que vaya más allá de una memorización y el conteo, donde lo afectivo sea parte constitutiva del aprendizaje.

Para Maturana (1997) "El afecto constituye un conjunto sensorial de gestos, de gritos, de mímicas y palabras que rodean al niño, y es un alimento afectivo que aniquila a los niños que se ven privados de él". Lo afectivo es elemento incidente en el proceso educativo, no solo el aprendizaje es por el saber sino también por el ser, con todas sus potencialidades incluida la del afecto. Este proceso de matemática está basada en pedagogía y didáctica de inclusión social, inclusión en la educación e inclusión en el aula. Esta última, cuyo principio fundamental es que cada niño tiene sus características, capacidades, ritmos, intereses y necesidades de aprendizaje propios y deben ser los sistemas educativos y los programas los que se adapten a la diversidad de dichas características y necesidades (UNESCO, 2009). La inclusión educativa y de aula es un eje transversal en nuestra propuestade aprendizaje que pretende hacer del estudiante un ser participativo, reflexivo y crítico. Esta metodología con los elementos anteriormente descritos pretende ayudar en la reducción de los niveles de deserción, perdida de años escolares y mejores resultados en competencias matemáticas dada la amplitud con la cual se trabajan.

La amplitud con la cual se trabajan y construyen los conceptos busca brindar oportunidades para el aprendizaje significativo de las operaciones suma y resta desde la geometría, los conjuntos y los números, se pretende que haya beneficios adicionales a los estudiantes dado que podrán entender desde el movimiento, por qué ley oprincipio geométrico estas operaciones son contrarias. Así también desde lo disciplinar lavisión de las operaciones y sus algoritmos son más fáciles de construir y útiles de aplicar. Es importante para los maestros y estudiantes porque facilita desde la praxis y el constructo la conceptualización de las operaciones, abordándolas

desde varios aspectos que permitirán más herramientas de aprendizaje y cognición de estas dos operaciones por su diversidad de usos en la vida práctica. Que un concepto matemático sea de fácil comprensión y aprendizaje es un aporte para que las deserciones por dificultades de aprendizaje matemático sean menores. Sabemos que las dificultades y los obstáculos de aprendizaje en el proceso cognitivo del área de matemática son diversas y variadas, La investigación tiene un fin disciplinar y es construir conocimientos y saberes, corrigiendo conceptos mal construidos como por ejemplo cuando en la se dice que: la suma se realiza siempre empezando por la derecha o columna de las unidades, cuando esto es una falacia, porque la suma se puede realizar en distinto orden ya sea empezando en las decenas o las centenas según sea el caso.

Errores conceptuales en las propuestas de enseñanza como el anterior deben ser corregidos para potenciar a nuestros niños como científicos y profesionales competentes, porque tienen la capacidad de entender conceptos básicos como por qué estas dos operaciones son binarias o cuáles leyes rigen su operacionalidad (asociatividad, clausurativiidad, modulativa, invertiva) posteriormente podrá asociar estas leyes en otras operaciones algebraicas como en la suma de polinomios. Subsanar errores conceptuales al retomar las demostraciones y definiciones de los maestros de la matemática, respetando las leyes de esta ciencia, aplicándolas en nuestra educación matemática nos conducirán por caminos más seguros en lo disciplinar y facilitan la enseñanza de estas dos operaciones iniciales, permitiendo desde un principio un aprendizaje, con más herramientas geométricas, siendo competente al enfrentarse al saber autónomamente, a leer e interpretar de los grandes avances de esta y otras ciencias afines. Matemática Articulada es una propuesta que utiliza solo leyes y conceptos usados, y aceptados por esta ciencia. La suma es una operación estructurada y rica en propiedades y leyes geométricas, con una amplia gama de usos en la vida cotidiana y en la ciencia de la que nos ha sido enseñada, porque a diario en la vida real se suman longitudes, posiciones y se realizan unión de conjuntos, que facilitan articularla con la suma de números racionales y reales.

La suma de naturales y de enteros en un proceso que se hará luego de igual manera al sumar racionales y al enseñar la suma de polinomios. Es así como de forma gradual la suma y la resta tendrán transposiciones desde el conjunto de los naturales (N), pasando luego a los enteros (Z), lo mismo por los racionales (Q) hasta llegar a los reales ®. Esta gradualidad que va desde el conjunto infinito de los Naturales hasta el infinito mayor de los Reales, desde el proceso de suma de menor dificultad hasta el de mayor dificultad. En este punto de la enseñanza de estas dos operaciones se puede mostrar su importancia mostrando como con base en geometría euclidiana y el uso de las funciones mencionadas, con la suma y resta de vectores en los Enteros, Blas Pascal[8] construyó una de las primeras computadoras mecánicas (Máquina de Pascal) haciendo uso de un programa aritmético articulado con uno geométrico en el uso de vectores. Este tipo de inferencias permiten a los estudiantes entender cómo se construyó y construye tecnología, máquinas y programas de carácter científico y tecnológico. En el desarrollo de adquisición de saberes y competencias habrá un momento posterior para la aprehensión de la misma operación en conjuntos de mayor infinitud. Se busca desarrollar en nuestros estudiantes competencias como la deducción que les pemita transferir sus conocimientos a la solución de situaciones problema en su quehacer diario como ciudadanos.

[8] Pascal, Blaise (1623–1662). La Pascalina fue la primera calculadora hecha con vectores curvos. El primer nombre que le dio a su invención fue “Máquina de aritmética.” http://www.monografias.com/

La enseñanza de la matemática debe evolucionar asumiendo nuevos formas didácticas y modelos pedagógicos que propendan por una mayor aprehensión por parte de los maestros y los estudiantes de las operaciones básicas suma y resta, dando inicio a que esta ciencia construida por el hombre, sea entendida y usada por los hombres y mujeres de forma competente, para que nuestra sociedad avance hacia la construcción de ciencia y tecnologías propias y más potentes. La propuesta de Matemática Articulada está dada para la enseñanza de la suma y la resta dirigida a una definición entendida y aplicada del concepto de suma en el conjunto de los enteros. Las actividades de aprestamiento que se realizan pretenden ampliar el significado de la operación como base necesaria y suficiente apuntan a que ellas de manera activa y constructiva se presenten desde el mundo físico hacia lo cognitivo para construir representaciones, ideas y conceptos sin hacer uso (exagerado) de la memorización. Aportar y trascender en los maestros y estudiantes para que de manera autónoma construya nuevos conceptos, haga inferencias, nuevos aprendizajes, con capacidad de afrontar diferentes situaciones problema. Conocimientos que permitan una ciencia propia para una sociedad más igualitaria e independiente científica y tecnológicamente. Maestros y estudiantes con más herramientas geométricas, conceptuales, con lenguaje lógico, con más competencias y una armonía emocional por aprender y descubrir.

1.5 HIPÓTESIS

El proceso de la enseñanza-aprendizaje de la suma y resta en los Enteros puede realizarse con mayor número de elementos matemáticos como los vectores, los segmentos, los puntos, los conjuntos, las traslaciones y las funciones, las cuales permiten una más amplia posibilidad de oportunidades de aprendizaje de estas dos operaciones a través de pedagogía activa.

CAPITULO II. MARCO TEÓRICO

La historia muestra que los jefes de naciones que han favorecido el cultivo de la Matemática, la fuente común de todas las ciencias exactas, son también aquellos cuyos reinos han sido los más brillantes y cuyas glorias son las más durables. (Michel Chasles)[9]

2.1 ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

Existe un gran número de investigaciones y trabajos sobre la enseñanza de la suma y la resta de enteros, tanto a nivel regional o internacional. En nuestra región sobre el tema relacionado referenciamos trabajos de grado de Rúa (2013) "Implementación de una estrategia de enseñanza mediada por la plataforma Moodle para el aprendizaje significativo de la suma de números enteros en el grado sexto de la Institución Educativa Cisneros". Otro trabajo de referencia es el de Sánchez (2012) "Propuesta didáctica para la enseñanza de **(Z,+)** a estudiantes de séptimo grado". El trabajo de Navia y Orozco (2012) "Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica". A nivel internacional el trabajo de Cid (2003) "Investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión" y la tesis de Borjas (2009) "El aprendizaje de los números enteros, una experiencia significativa, en los estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música"

Rúa (2013) inicia su propuesta de la enseñanza de los Enteros, con una iniciativa que surge en respuesta a la necesidad de fortalecer el manejo de las operaciones básicas en los conjuntos numéricos mediante el uso de tecnologías educativas con uso de Tic, teniendo como referente teórico el paradigma constructivista, en el cual el estudiante tiene un desempeño activo en la construcción de conocimiento, además con los aportes de Ausubel y Moreira sobre saberes previos. Rúa toma antecedentes pedagógicos con los cuales pretende reseñar algunas de las investigaciones realizadas en el ámbito de la enseñanza de los números enteros desde la perspectiva del aprendizaje significativo y aprendizaje significativo crítico, además se establece la relación entre lo planteado por los lineamientos y estándares curriculares y la forma en que están estructuradas las actividades académicas en la institución educativa Cisneros (Antioquia). Rúa anota que concuerda en su trabajo con los conceptos de Cid (2003) cuando clasifica en tres grandes grupos su propuesta de enseñanza aprendizaje: A) Propuestas de enseñanza, B) Dificultades de aprendizaje y C) Errores de los alumnos e implicaciones didácticas de la epistemología del número entero. Se orienta este trabajo siguiendo esta clasificación con el ánimo de presentar de una manera organizada los diferentes aportes de la investigación de Eva Cid. De las propuestas de enseñanza Arcavi y Bruckheimer (1981), estos realizan una clasificación de la introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela que luego puede hacerse extensiva a la estructura aditiva. Dicha clasificación consta a groso modo de la introducción inductiva, introducción deductiva, introducción constructiva, introducción por medio de modelos. En sus referencias sobre estudio de caso menciona a Coltharp (1966) y Fletcher (1976) que propusieron presentar los enteros en la educación primaria y secundaria de manera axiomática, haciendo parte de la introducción constructivista.

[9] Chasles, Michel. (1793-1880) Matemático francés.

En la introducción inductiva se destacan los trabajos de Snell (1970), Peterson (1972), Sicklick (1975) y Freudenthal (1983) para el cual una introducción de este tipo facilita el paso a un posterior desarrollo deductivo del tema sobre suma y resta de enteros.

También Rúa concuerda con las propuestas que hablan sobre el uso de modelos de Janvier (1983) el cual propone una clasificación en la que se distingue tres tipos de modelo: el de equilibrio, recta numérica y el hibrido, en Cid (2002) por su parte no tiene en cuenta el modelo hibrido y prefiere llamar al modelo de equilibrio como modelo de neutralización, dada la existencia de entidades opuestas que se neutralizan entre sí. Entre los modelos de neutralización Modelos de deudas y haberes o pérdidas y ganancias: Puig (1956), Malpas (1975), Bell (1986), Liebeck (1990), Sasaki (1993), Souza (1995), Baldino (1996). Cargas eléctricas positivas o negativas: Cotter (1969), Peterson (1972), juegos o clasificaciones con puntuaciones positivas o negativas: Frank (1969), Bell (1986). Rúa continúa con la referencia de otros modelos: Los modelos de desplazamiento se encuentran las siguientes propuestas: personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino Hollis (1967), Sazaki (1993), Souza (1995), Baldino (1996); Peldaños que se suben o bajan Skemp (1980); Termómetros o escalas de diversas magnitudes Cable (1971), Grup Zero (1980), Bell (1986); Ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos Puig Adam (1956); globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel del mar Petri (1986); desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre puntos de la recta numérica Havenhill (1969).

En su análisis Rúa apunta a que entre los trabajos que tratan sobre temas de las dificultades u obstáculos epistemológicos de aprendizaje y errores de los alumnos en el aprendizaje de los números enteros se encuentran Bell (1986), Bruno y Martinón (1994), Liebeck (1990), Mukhopadhyay (1997), los cuales sostienen que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números enteros usando el modelo de la recta numérica, ya que representan los números y el resultado de las operaciones mediante puntos, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo. Para Borba (1995) las operaciones con el mismo signo se resuelven mejor que las operaciones con signo distinto, Bell (1982) y Murray (1985) realizaron también estudios similares. En el trabajo de Herscovics y Linchevski observan que en secuencias de más de dos términos y con el uso de paréntesis los estudiantes tienden a cometer errores con los signos. Duroux (1982) habla de que un porcentaje alto de estudiantes no asume que el número (–X) puede significar el opuesto del número (X).

En los trabajos realizados sobre las implicaciones didácticas de la epistemología, Rúa apunta sobre el concepto de número entero, donde se destacan autores como Bachelard (1938), este también aporta una definición sobre obstáculo epistemológico en el ámbito de la filosofía de la ciencia, posteriormente adaptada por Brousseau (1980), al ámbito de la didáctica de las matemáticas. Muchos de los estudiantes responden que el concepto de número entero es de difícil construcción y entendimiento, sobre todo para aquel que apenas inicia sus estudios en secundaria. Por tanto la importancia de la forma como están estructurados los currículos y la secuencia establecida para los diferentes contenidos en cada una de las instituciones educativas son de mucha relevancia.

En el trabajo de Rúa se referencia sobre el aprendizaje significativo en los años sesenta que realizó Ausubel (1963) la cual fue la primera introducción de una teoría cognitiva del aprendizaje verbal significativo, que considera el aprendizaje como un proceso que se presenta cuando una nueva información interactúa de manera sustancial con lo que el estudiante ya sabe, es decir con aspectos que son relevantes para el individuo que aprende, convirtiéndose de este

modo en base para la nueva información venidera. En esta teoría cobra vital importancia lo que el estudiante ya sabe, es decir los saberes previos, Ausubel lo resume de la siguiente manera: "Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un solo principio enunciaría este: averígüese esto y enséñese consecuentemente". La interacción entre la información existente en la estructura cognitiva del estudiante y la nueva información debe ser de manera no arbitraria y no literal, aquí el docente cumple una función mediadora entre los contenidos científicos y el estudiante y es quien debe elegir de manera cuidadosa los materiales de aprendizaje para que se dé realmente el aprendizaje significativo. A continuación se enuncian y explican brevemente las condiciones para que se presente un aprendizaje de este tipo:

1) El material de aprendizaje debe ser potencialmente significativo. Estos materiales se caracterizan por tener un significado lógico y un significado psicológico. El significado lógico del material de aprendizaje está relacionado con la disciplina y se convierte en psicológico cuando pasa a ser parte de la estructura cognitiva del estudiante como producto de todo el proceso de aprendizaje.

2) La estructura cognitiva previa del estudiante debe poseer ideas relevantes que puedan relacionarse con el nuevo material. Suma de números enteros en la plataforma Moodle En la estructura cognitiva del estudiante deben existir (representaciones) bases o ideas pertinentes que permitan el aprehender de la nueva información, pero al mismo tiempo debe surgir una reestructuración activa de las percepciones, ideas, conceptos y esquemas que el aprendiz ya posee.

3) Disposición del estudiante para relacionar el nuevo material. Debe existir una actitud favorable que permita que el estudiante relacione de manera sustancial y no arbitrariamente los materiales potencialmente significativos con la estructura cognitiva preexistente.

En el trabajo referente de Rúa este desarrolla conceptualmente aplicaciones en base a 3 tipos de aprendizaje significativo de Ausubel-Novak (1983):

a) Aprendizaje representacional, el cual consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, es el aprendizaje más elemental y ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes, se da principalmente en los primeros años, en la etapa de preescolar y sirve para representar los objetos que tienen a su alrededor.

b) Aprendizaje de conceptos, en este caso los conceptos son objetos, eventos, situaciones, propiedades, que presentan unas características o atributos comunes y que se designan mediante un símbolo o signo, este orden de ideas se asemeja al aprendizaje representacional.

c) Aprendizaje proposicional, es algo más complejo que aprender el significado de las palabras aisladas o combinadas, ya que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones, implica además la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la suma de la resultante es más que la suma de los significados de las palabras individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la estructura cognitiva.

En el trabajo de investigación Navia y Orozco (2013) se plantea la enseñanza de los números enteros y sus obstáculos de aprendizaje haciendo referencia a que la enseñanza de la matemática es un proceso que ha crecido y ha evolucionado a través de los tiempos; resaltan

que actualmente, uno de los intereses en la enseñanza es que se ha centrado especialmente en el estudiante. En su análisis se centra en los obstáculos de la enseñanza de los Enteros y es cuando se refiere a solo definirlos y a presentar el concepto solo como cantidad, pero no hay una reflexión sobre los cambios conceptuales, es decir, este paso de los números naturales a los números enteros positivos, negativos y el cero, no sólo implica el ampliar el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, que están determinadas por sus propiedades y características matemáticas. Comentan que uno de estos cambios en el que se presentan dificultades, es el relacionado con el significado del signo menos o negativo, cuando se pasa de trabajar en el contexto de los Naturales a trabajar en un contexto más amplio como el de los Enteros, donde el signo menos en los naturales tiene un significado de disminución y en los enteros esta idea ya no está; una resta no significa disminución, y una suma no significa aumento, conceptos que no son fáciles en su representación mental cuando se usa la matemática tradicional. Entonces, el simple hecho de ampliar el significado de número, de ver que la suma y la resta en términos de operador es la misma, presenta dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje, es decir, se asume en muchos profesores que por dar la definición ya está clara la diferencia que hay cuando se pasa de definir la suma y la resta de los naturales a los enteros.

Quizá el trabajo más amplio es el de Eva Cid (2003) y es un referente que aporta una gran cantidad de elementos de análisis que enriquecen la reflexión en este proceso educativo en lo referente a la enseñanza de los números enteros y sus operaciones básicas. En sus aportes inicia Cid con la bibliografía didáctica y las dificultades u obstáculos didácticos sobre la enseñanza de los números negativos y las operaciones suma y resta se puede agrupar en tres grandes áreas: A) Propuestas de enseñanza B) Dificultades de aprendizaje y C) Errores de los alumnos y las implicaciones didácticas de la epistemología del número negativo. Naturalmente, estas áreas no son independientes entre sí, y de hecho, existen trabajos que relacionan las dificultades de aprendizaje con las propuestas de enseñanza; la epistemología de los números negativos con los errores que cometen los alumnos.

Para Cid una propuesta de enseñanza de los números enteros, plantea como referencia el trabajo de Arcavi y Bruckheimer (1981) sobre una clasificación de la introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela que puede hacerse extensiva a la estructura aditiva y que es un buen punto de partida para ordenar la bibliografía existente.

Introducción inductiva. Se caracteriza por el descubrimiento y generalización de regularidades.

Por ejemplo, se presentan a los alumnos secuencias como las siguientes:

$5 - 3 = 2$	$4 \cdot 3 = 12$
$5 - 2 = 3$	$4 \cdot 2 = 8$
$5 - 1 = 4$	$4 \cdot 1 = 4$
$5 - 0 = 5$	$4 \cdot 0 = 0$

Y después se les pide que continúen estableciendo resultados como:

$5 - (-1) = 6$	$4 \cdot (-1) = -4$
$5 - (-2) = 7$	$4 \cdot (-2) = -8$
$5 - (-3) = 8$	$4 \cdot (-3) = -12$

La Introducción deductiva es otra opción en la enseñanza de los Enteros que consiste en añadir a los números naturales su simétrico respecto a la suma y definir las operaciones en ese nuevo conjunto numérico de manera que se conserve la estructura algebraica de los números naturales. Nos referimos a los números enteros y no a los números negativos porque casi todos los autores identifican la enseñanza de los números negativos con la de los números enteros. Cuando se abordan las operaciones en los Enteros, los estudiantes las operan de forma aritmética, a este fenómeno se le conoce como el Principio de permanencia en la aritmética.

La Introducción constructiva se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia por ejemplo de (3,5) equivalente a (-3,-5) si, y sólo si, a+b'=b+a'. Posteriormente se define la suma, el producto y el orden de dicho conjunto cociente y se deduce la estructura de anillo totalmente ordenado.

La Introducción por medio de modelos. Es una presentación de los números enteros basada en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los alumnos como pueden ser el sistema de referencia en los grados centígrados. Se supone que los estudiantes a partir de su experiencia con el modelo, pueden conjeturar o dar al menos sentido, a sus reglas de funcionamiento y luego por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros. A la vez se les atribuye una función de recuerdo o idea previa, pues se espera que, en caso de olvido de las reglas de cálculo, el estudiante pueda reconstruirlas con ayuda del modelo. Estos modelos de trabajo didáctico con material real han recibido distintos nombres: 'modelos físicos', 'modelos intuitivos', pero el más usado en la actualidad es el de 'modelos concretos'.

Uno de los aspectos referentes a las operaciones con Enteros es cuando la resta significa la "operación de unarios" lo que implica la operación unaria que afecta al sentido –positivo o negativo– del número, manteniéndolo o transformándolo en el sentido opuesto. Para Cid la resta se puede realizar con desplazamientos en la recta en el sentido izquierda-derecha de manera sucesiva hasta obtener el resultado final. En cuanto al orden se interpreta los números enteros en términos de posiciones y diciendo que un número entero es menor que otro si, su posición está a la izquierda del otro. Estos modelos de desplazamiento han sido tratados por varios autores como (Hollis, 1967; NCTM, 1970; Ettline y Smith, 1978; Alsina *et al.*, 1980; Chang, 1985).

Cid se refiere a que si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto status familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran (Bell, 1986, p. 199, citado por Cid, 2003). Para el caso en lo referente a la competencia en la realización de operaciones formales, Küchemann (1980, 1981) sobre suma, resta y multiplicación de números enteros, en su trabajo concluye que los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que las restas resultan ser las operaciones peor resueltas. Cid expone que la enseñanza de los enteros tiene obstáculos epistemológicos como el de la creencia en que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, para Glaeser esta es una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los ***Elementos*** **de Euclides.**

Uno de los temas más relevantes en la enseñanza de los Enteros y posteriores, es la suma y

la resta en los Enteros que se direccionan hacia los obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser: la "falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas" y la "dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas", lo cual no debiera ser considerado así, pues sólo indica un déficit de conocimiento. El referente sobre este aspecto se relaciona con el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones, que "la concepción del número como medida", es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una de magnitud.

Sobre los comentarios a *Los Obstáculos internos a las matemáticas*, es una categoría que señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de la matemática ha sido el de "cantidad", pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de "número". Para Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de los textos matemáticos de otras épocas.

La bibliografía correspondiente a obstáculos epistemológicos en los números negativos ha tenido poco impacto en lo que se refiere a las propuestas de enseñanza y los errores y dificultades de los alumnos. Los problemas de aprendizaje de los números enteros se manejan como si se tratase de naturales donde el signo menos (-) se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que produce muchas respuestas erróneas. Para Cid la noción de obstáculo epistemológico ha recibido interpretaciones muy diversas, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau y además el entusiasmo que despertó en los primeros momentos fue posteriormente, sustituido por un cierto escepticismo, dado que su uso no proporcionó los resultados esperados.

Sobre el trabajo de Borjas (2009) y Sánchez (2012) se destaca lo referente a la trascendencia de la memorización sobre el aprendizaje de los números enteros y en forma general en la educación matemática, donde para ellas la comprensión de los conceptos debe ser fundamental en el proceso de aprendizaje. Un segundo elemento apunta al uso de material real para ampliar el significado del concepto de número entero. La coincidencia en las propuestas y referentes son amplias en los trabajos que se aportan como referentes a la investigación presente, pero enriquecedoras en sus posiciones porque permiten reforzar la propuesta presente principalmente en los obstáculos epistemológicos.

2.2 LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN COLOMBIA

Cualquier sistema educativo en el contexto del presente se encuentra inmerso en un mundo globalizado por lo cual los referentes son todos los sistemas educativos del planeta. En este contexto nuestra educación siente el peso de estas circunstancias y se vive el hecho de ser sometida a evaluaciones con parámetros internos y externos como una forma de control al sistema por parte de los sistemas políticos. Para el análisis de la propuesta presente, hago referencia a aspectos que buscan ampliar en lo más global la visión de la situación de la educación en este momento histórico y para el caso, el de la educación matemática.

2.2.1 Situación de la educación en Colombia. Una visión crítica de la sociedad

colombiana

La matemática como ciencia presenta grandes avances los cuales se reflejan en los desarrollos tecnológicos de los últimos decenios y las perspectivas de desarrollo que se avizoran para el ser humano son enormes, pero hechos matemáticos como por ejemplo el de espacio E8, nombre de un grupo de Lie[10] (grupo de Lie) el más y grande excepcional del álgebra de Lie que le está asociada, la cual fue estructurada y descubierta en 1887 por este matemático noruego para estudiar las simetrías. Este enorme conocimiento matemático de más de un siglo de demostrado difícilmente llega a una aula de clase en un pregrado en nuestro sistema educativo. Esto nos puede mostrar que lejana está nuestra educación matemática de estos conocimientos más avanzados. La sociedad, la ciencia y la educación exigen cambios para la enseñanza de esta ciencia que nos puedan acercar a aprehender saberes tan valiosos para el desarrollo de nuestra ciencia. El MEN como consigna solicita y ofrece una mejora en la calidad de la educación y de forma colateral incluye la educación matemática y desde los sectores académicos aunque pocos, presentan propuestas y soluciones.

Pero cabe preguntarnos, si realmente tenemos problemas o no, en la enseñanza de la matemática en este caso. Si pedagógicamente y didácticamente existen debilidades, si lo que se enseña y aprende es lo que necesita nuestra sociedad y nuestra ciencia, si lo que enseñamos está acorde con lo que es necesario para el desarrollo de esta ciencia. Se produjo una reacción colectiva de la sociedad sobre los informes de las pruebas Pisa 2012. Podemos observar en ellos la desazón que produjeron. Pero es bueno citar algunos de los comentarios que dieron en general en la sociedad, en el año 2014 como una muestra de lo que se vive en educación. Artículos de prensa que comentan los resultados de las pruebas Pisa dicen, por ejemplo:"Colombia no logra salir de los 9 últimos puestos entre 65 países evaluados. Colombia vuelve a rajarse en las pruebas de educación Pisa. En comparación con la prueba realizada en 2009, el país obtuvo peores resultados." (El Espectador, 2013) Y continúan diciendo: "La instrucción de los verdugos. Todas las sospechas sobre las causas del infierno se hicieron físicas en los recientes resultados de las pruebas Pisa." (El Espectador, 2013) Los comentarios siguen en igual dirección. "Los exámenes Pisa divulgados a finales de la semana pasada replican los resultados de los obtenidos en los últimos 6 años" (Editorial, 2013).

También hubo comentarios en otros medios que coincidían con apreciaciones de los comentaristas del diario El Espectador. "Dicen los informes alarmantes que Colombia hoy ocupa el puesto 61 entre los 65 países que participaron en las pruebas Pisa (Programa Internacional de Evaluación a Estudiantes)..." (Correa U., 2012 citado en El Espectador por Sarmiento, E., 2013).

Las voces del MEN sobre las pruebas Pisa en Matemáticas también se oyeron. – ¿Por qué a Manizales le fue menos mal en las pruebas Pisa?– En las pruebas internacionales superaron a Bogotá, Medellín y Cali.

> El menor desempeño se registró en matemáticas. Menos de la quinta parte (18%) de los evaluados alcanzó el nivel mínimo (dos). Estos estudiantes pueden interpretar situaciones en contextos que sólo requieren una inferencia directa, utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales y efectuar

[10] Lie, Marius Sophus (1842-1899) Matemático noruego, creador en gran medida de la simetría continua.

> razonamientos directos e interpretación literal de los resultados. Sólo 10 de cada 100 mostraron competencias en los niveles tres y cuatro. La mayoría de los estudiantes colombianos sólo demostró capacidad para identificar información y llevar a cabo procedimientos matemáticos rutinarios, siguiendo instrucciones directas en situaciones explícitas, y responder a preguntas relacionadas con contextos conocidos. (Ministerio de Educación Nacional - MEN, 2008)

Para el rector del Colegio de Estudios Superiores de Administración (Cesa) José Manuel Restrepo Abondano "Es una excusa decir que culturalmente estamos retrasados en este aspecto. Larazón por la que los estudiantes presentan debilidades en esta materia tan importante para el futuro profesional y laboral es porque no contamos con los profesores idóneos para enseñar didácticamentematemáticas. (…) Falta capacitación y usar los métodos adecuados..." (Revista Academica, 2013).

Por último el exministro de economía Rudolf Hommes:

> Las competencias que destaca el estudio son la comprensión de lectura y la capacidad de usar lo que se lee; numerosidad (habilidad numérica y matemática); y la destreza para resolver problemas en entornos ricos en tecnología. Los niveles de estas tres competencias están positivamente correlacionados con el desempeño en las pruebas educativas Pisa, lo que depende de la calidad de la educación básica".
> Continúa diciendo: "Se requiere crear ambientes de colaboración entre alumnos y profesores y depurar los programas de educación básica para suprimir todo el contenido inútil y concentrarse en lo más necesario, por ejemplo las competencias a las que se refiere el estudio de la OCDE, y enseñar a los alumnos a aprender por su cuenta. (El Tiempo, 2013)

Pero el análisis de las anteriores críticas muestra que el problema de los bajos resultados no es causado por incapacidad de los jóvenes, en contrario, que la responsabilidad corresponde al gobierno como ente regulador, a las instituciones formadoras de formadores y a los mismos maestros. De este modo los estudiantes pasan a ser víctimas de la educación que se les imparte. Pero todo ello no es impedimento para que algunos de nuestros estudiantes sean excelentes científicos y profesionales. A manera de anécdota algunos expertos en educación aseguran que las soluciones dadas por el ministerio y los maestros es: *más de lo mismo en dobles cantidades.*

2.2.2 Pensamiento de educadores matemáticos.

Para quienes padecimos la dolorosa pedagogía que convivió con la educación por generaciones, seguramente que a muchos de nosotros nos causa aún pesadillas en mayor o menor grado. Este podría ser un elemento de juicio para ser tenido en cuenta para evaluar desde lo educativo el fracaso de muchos estudiantes en el aprendizaje de por ejemplo la matemática. Maestros colombianos con formación matemática y en gran medida por sus estudios con altos estándares educativos, han fijado análisis de este panorama de la educación matemática, aportando solucionesdesde la innovación y la investigación. De ellos los doctores Francisco Escobar Delgado, profesor Jubilado titular de la Universidad del Cauca y del doctor Diego Pareja Heredia profesor titular de la Universidad del Quindío, de ellos encuentro gran material teórico

para implementar mi análisis y mi propuesta, porque son coincidentes en varios puntos de sus diagnósticos. Existen otros maestros que coinciden con ellos pero esencialmente los nombraré a los dos.

> La Educación Matemática en Colombia en los primeros niveles ha sido un engaño de 500 años; el desconocimiento de las leyes de La Matemática, la gran cantidad de errores matemáticos que se le enseñan a nuestros niños y jóvenes, la enseñanza memorística sin entender de La Ciencia Exacta y el no enseñar con esta disciplina a pensar y a proceder correctamente a los estudiantes, nos han sumido en el atraso social, tecnológico, científico e informático, y ha ayudado a convertir a Colombia en un País violento. (Escobar, F., 2012a)

Ante este panorama de la educación matemática en Colombia el doctor Francisco Escobar realiza una investigación de cerca de 35 años, desde lo histórico, lo epistemológico, lo didáctico y lo disciplinar desarrollando la metodología denominada Matemática Articulada de la que ha producido 8 textos dirigidos a la enseñanza desde primaria hasta bachillerato. Las operaciones básicas de la aritmética en general en nuestra educación presentan dificultades para su aprendizaje desde su concepción, donde la repetición de ejercicios escritos sin una base pedagógica y científica es rutinaria.

> … ya que debemos repensar la Educación Matemática actual, desaprender la multitud de errores conceptuales que están dañando la salud mental de nuestros niños, desterrar el método absurdo de aprender de memoria sin entender, y reemplazarlo por el método lúdico de recrear el conocimiento matemático siguiendo los mismos caminos empleados por los grandes maestros y genios que descubrieron estos conocimientos. (Escobar, 2012a).

Se debe eliminar la educación matemática que nos fue impuesta por los colonizadores y luego mantenida por aquellos educadores que transmitían más de lo mismo, con fines que nos han mantenido en un atraso científico, cultural y educativo grande.

> La educación Matemática es un matrimonio entre la Pedagogía y la Matemática, entonces este matrimonio funcionará muy bien si hay una estrecha interrelación entre estas dos artes; y así, la pedagogía proporcionará formas agradables para el disfrute del conocimiento matemático que mantendrá al estudiante siempre ligado a la escuela; y la Matemática con su historia y su epistemología le aportarán ideas a la pedagogía para armar juegos reconstructores del conocimiento matemático que se realizarán de forma similar a la creación de este conocimiento, así, el niño y el joven se contagiarán de estas genialidades de quienes crearon la Matemática, de la sabiduría de estos sabios y de la belleza que le pusieron a esta creación. (Escobar, 2012a)

Esta relación entre la pedagogía y la educación debe ser primordial, necesaria en las innovaciones que se desarrollen. La escasa pedagogía que poseemos no permite articular la matemática con otras disciplinas; esta articulación solo es fructífera cuando se conjugan en armonía, para que la matemática se convierta en arte.

El arte en la matemática nace con ella, la historia de esta ciencia cuyo nacimiento oficial se remonta a Euclides, cuando logró aritmetizar la geometría en su libro los Elementos, usando la inducción planteó las bases sólidas de la geometría y la matemática, las cuales 2300 años

después no han sido refutadas. El decir aritmetizar por tanto me lleva a que la aritmética y por ende sus operaciones están atravesadas por ella: "los matemáticos reconocemos a Euclides como uno de los padres de la matemática y nos apoyamos en él sin remover partealguna de las bases puestas por él en Los Elementos para seguir construyendo el edificio de la Matemática" (Escobar, 2006).

Pero para reafirmar el arte y la exactitud del trabajo del maestro Euclides retomo las palabras del maestro alemán Félix Klein:

> El destacado maestro, físico y matemático alemán Félix Klein de finales del siglo 19 y principios del siglo 20, a quien en gran parte se le atribuye el desarrollo tecnológico de Alemania en la primera mitad del siglo 20 hizo una traducción de Los Elementos de Euclides al alemán y afirmó después de este trabajo que Los Elementos no tienen errores. (Escobar, Félix Klein, 2007)

Por ello la propuesta de la enseñanza de la suma y la resta en los Enteros plantea el uso de las funciones, y las leyes de la geometría Euclidiana.

Las operaciones suma y resta en los enteros se enmarcan desde la pedagogía y la matemática en retomar ese uso de la geometría para demostrar y construir sólidamente las ideas y conceptos que faciliten el aprendizaje desde distintos escenarios didácticos y pedagógicos. La geometría debe enseñarse y aprenderse a partir de las bases disciplinares dadas por Euclides, pero su uso garantiza de antemano que, no habrá errores. Es tan contundente la importancia de la geometría Euclidiana y su uso para la enseñanza armónica y articulada con las demás áreas de la matemática que el maestro Carlos Vasco también coincide con esta apreciación:

> La necesidad de enseñar Geometría Euclidiana por la importancia de esta y también como un medio para enseñar la deducción… palabras del Doctor Carlos Vasco[11] no se acogió porque la comisión de competencias del M.E.N. no acató esa sugerencia. (Escobar, F., 2012b)

> La Matemática se debe enseñar como disciplina, como arte y como ciencia. Como disciplina, enseñando las leyes y convenios de la Matemática, para utilizarlos y cumplirlos; el respeto por la ley dentro de la Matemática servirá para que el ciudadano del mañana respete las leyes… (Escobar, 2007)

El desarrollar estos elementos didácticos y disciplinares posibilitan un aprendizaje efectivo, este modelo es el que persigo como maestro para buscar que mis estudiantes lleguen a tener competencias matemáticas básicas. Enseñar matemática o cualquier otra ciencia como arte, es el ideal que como maestro se desea, su belleza es inigualable:

> La percepción y apreciación de la estética dentro de la Matemática, ayudará al desarrollo de otras artes. La apropiación de los métodos de deducción e inducción le enseñarán a pensar a los jóvenes Colombianos y por consiguiente podrán investigar como científicos en esta ciencia, en la Física y las otras ciencias. (Escobar, 2012b)

[11] Vasco, Carlos (2012). Matemático y físico. Asesor del MEN.

El maestro Diego Pareja ha expresado también en diferentes artículos su posición sobre la enseñanza de la matemática en nuestro país:

> No hay discusión en cuanto a la conveniencia de enseñar matemáticas a lo largo de toda la escolaridad básica (elemental y media). Lo que siempre se ha puesto en tela de juicio es: qué y cómo estamos enseñando matemáticas." Realmente estamos enseñando lo que necesita el estudiante, la sociedad y el país". Diego Pareja continúa diciendo: "Como mencionaba en otra columna, el vacío formado entre lo que enseñamos ahora y la cresta en el desarrollo de las matemáticas es enorme; a tal punto que se nos hace imposible entender, el lenguaje empleado por topólogos, lógicos, analistas matemáticos, o algebristas de nueva generación, sólo para mencionar algunas de las muchas especialidades en las que ahora trabajan los matemáticos." (Pareja, D., 2006)

Precisa en sus comentarios sobre el desfase existente entre la matemática y la educación matemática y continúa en su artículo: El gran vacío entre la educación matemática y la frontera de las matemáticas: "Nuestros intelectuales generalmente desconocen las matemáticas que se estilan en los ámbitos de las grandes universidades y en la comunidad matemática universal. Surge entonces una nueva pregunta, ¿por qué se formó ese gran vacío entre las matemáticas que enseñamos y las matemáticas que están detrás, por ejemplo, del teléfono celular, del DVD, del escanógrafo, de la robótica, de la predicción del tiempo, de la encriptación bancaria universal, etc.? De nuevo, la respuesta hay que buscarla en la educación matemática que estamos impartiendo."

Preguntas como estas directamente se relacionan con el currículo y los fines de la educación en matemática un tema como el Último teorema de Fermat de la última década del siglo pasado es conocido por muy pocos matemáticos puros y seguramente por algún maestro de bachillerato dada su complejidad. El doctor Pareja es contundente en su visión de la educación matemática cuando expresa: "Ante un panorama tan brumoso, los que en alguna forma tenemos que ver con educación matemática, debemos buscar alternativas inteligentes para tratar de cubrir ese enorme vacío. El primer acercamiento a una solución es reconocer el problema. Y el problema, yo creo está, no solo en la orfandad de liderazgo matemático en las esferas del estado, sino también en la incapacidad de las facultades de educación de analizar y cuestionar sus propios programas para ponerlos a tono con el desarrollo científico de nuestro tiempo. El caso de las facultades de educación es crucial, por cuanto es ahí donde se forman los maestros de las futuras generaciones, y depende de ellas, que el vacío, al que hemos hecho referencia, se logre en cierta medida disminuir." (Pareja, 2006).

Si se oyera a quienes sí saben de matemática en este país, seguramente el futuro de nuestra educación sería bien diferente para hechos positivos. Como educador matemático leer a Diego Pareja nos ubica en un contexto que necesitamos repensar urgentemente:

> A veces uno trata de explicar las razones por las cuales unos países se destacan, mientras otros no. Por otro lado, España en su larga historia que se remonta a los romanos, no ha mostrado ninguna figura de relieve en las matemáticas, salvo Julio Rey Pastor, que indudablemente en su producción matemática, está muy lejos de lo logrado por los matemáticos alemanes nombrados. En cuanto a Colombia, las cosas no son muy diferentes a la situación de España. Aquí necesitamos urgentemente, innovar y renovar. Innovar en materia de formación de nuevos docentes. Primero en las facultades de educación y luego en el currículo de la educación media y básica primaria. Innovares materia prioritaria. (Pareja, D., 2010)

Los nuevos educadores deberán tener nuevas y más cualificadas competencias didácticas y disciplinares, seguramente muchas de las que enuncia el doctor Pareja para ser maestros de matemática.

"Para comprender la tecnología y las complejas relaciones de la sociedad de hoy se requieren matemáticas diferentes a las que se enseñaban hace cien años o más." Los maestros necesitamos una revisión que permita despertarnos del letargo que nos produce la comodidad de enseñar como nos enseñaron. El doctor Pareja retoma a Félix Klein:

> Los nombres de Félix Klein, el gran matemático de la escuela de Gotinga y un gran educador, y de Hyman Bass[12], el pasado presidente de la (ICMI), están aquí reseñados, como hitos históricos que representan dos épocas. Una, la del florecimiento mayor de las matemáticas en Europa y la otra que vivimos, caracterizada por su gran complejidad en lo que a educación se refiere." Por ejemplo Klein se preguntó: **¿Cómo podemos probar que e y π son trascendentes?**, es una de las preguntas que Félix Klein responde, en un curso de actualización para profesores de colegios de bachillerato de la Asociación para el Avance de la Educación Matemática y de las Ciencias Naturales de Alemania. Estamos hablando de un cursillo que el "gran Félix Klein" matemático de talla mundial, dicta a los docentes de educación media en los años de 1890. (Pareja, 2006).

Finalmente expresa sobre los aspectos educativos de nuestro currículo: "El tiempo empleado en insistir sobre las rutinas, de las cuatro operaciones básicas, se puede aprovechar, primero, en explicar el ¿por qué? de tales rutinas o procedimientos, si se quiere, y segundo, cómo plantear y resolver problemas" (Pareja, 2007), sus comentarios continúan con severas críticas a la educación matemática: "Seguimos con la aritmética, la geometría euclidiana, el álgebra y el cálculo casi en estado fósil" (Pareja, 2007) Y de manera contundente refleja una de los mayores males de la educación en nuestra educación: "Véase el caso, por ejemplo, del Álgebra de Baldor, después de más de setenta años y allí sigue firme, como el mayor libro de matemáticas que se atesora en muchos hogares colombianos." (Pareja, 2007)

La crítica fuerte del doctor Pareja es una guía que permite reflexionar sobre labor y mis prácticas educativas porque es concluyente:

> Mientras este estatismo ocurre en la enseñanza, el conocimiento matemático, se desarrolla a pasos agigantados en sus respectivos frentes, dando origen a una brecha de tamaño descomunal con respecto a la primera, muy difícil de llenar, si no se toman correctivos a tiempo
> (Pareja, 2007).

2.2.3 Marco legal de la educación matemática

2.2.3.1 Objetivos generales y específicos

El sistema educativo colombiano presenta un desarrollo con características filosóficas,

[12] Hyman Bass (1932). Matemático de Princeton. Secretario de la sociedad matemática de USA.

pedagógicas e históricas plasmadas en las leyes, las cuales se perciben en diversas formas pero la principal es que la educación se convirtió en un derecho y por ello en un servicio gratuito. De estamanera la educación es una función social del Estado colombiano, está reglamentada por la Ley general, los lineamientos curriculares, los estándares y las competencias. En la parte constitutiva de los objetivos específicos se hace mención de cuáles son los pertinentes al área de matemática. El currículo y el PEI (Proyecto Educativo Institucional) de cada institución deben regirse por ellas. La propuesta presente tiene su origen en La Constitución, la Ley General de Educación, los estándares, las competencias y los lineamientos curriculares. Observemos inicialmente el artículo 21 de la ley general donde se enuncian los siguientes objetivos generales y específicos para matemática:

c) El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, lógicos, analíticos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana.

e) El desarrollo de los conocimientos matemáticos necesarios para manejar y utilizar operaciones simples de cálculo y procedimientos lógicos elementales en diferentes situaciones, así como la capacidad para solucionar problemas que impliquen estos conocimientos.

g) La asimilación de conceptos científicos en las áreas de conocimiento que sean objeto de estudio, de acuerdo con el desarrollo intelectual y la edad.

Los anteriores objetivos sirven de marco referencial para el desarrollo del proceso de suma y resta en el conjunto de los enteros y me ajusto a los anteriores requerimientos.

2.2.4 Los lineamientos y los estándares matemáticos

Un elemento fundamental para el desarrollo de los procesos educativos es la orientación dada por los lineamientos, las competencias y los estándares, los cuales constituyen un punto de apoyo para la orientación general y para el desarrollo del programa de educación matemática. En la presentación de los lineamientos el MEN invita a entender el currículo como "...un conjunto de criterios, planes de estudio, programas, metodologías y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local..." (Ley 115, 1994).

"También cambian los procedimientos que el Ministerio de Educación emplea para orientar el desarrollo pedagógico del país. Abandona el rol de diseñador de un currículo nacional para asumir el de orientador y facilitador de ambientes de participación en los cuales las comunidades educativas despliegan su creatividad y ejercen la autonomía como condición necesaria para que haya un compromiso personal e institucional con lo que se hace y se vive en las aulas."

La Ley General, a través de los lineamientos y los estándares, permite de forma clara la construcción de procesos innovadores y la autonomía de los docentes en construcción de la orientación pedagógica.

> Los lineamientos buscan fomentar el estudio de la fundamentación pedagógica de las disciplinas,el intercambio de experiencias en el contexto de los Proyectos Educativos Institucionales. Los mejores lineamientos serán aquellos que propicien la creatividad, el trabajo solidario en los microcentros o grupos de estudio, el incremento de la autonomía y fomenten en la escuela la investigación, la innovación y la mejor formación de los colombianos. (Colombia, 1994)

El MEN deja claro que los maestros podemos de forma consciente y autónoma investigar e innovar para una mejor formación educativa. Es en buen sentido provocadora la invitación del currículo a innovar a repensar nuestro trabajo en el aula. La renovación curricular del MEN propuso para innovar, integrar las distintas áreas de las matemáticas, como son los números, la geometría, las medidas, la misma lógica, los conjuntos y los datos estadísticos (la cual no hace parte de la matemática porque sus métodos de demostración son distintos de los de la matemática) desde una forma sistémica que comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. Los lineamientos curriculares para el área de matemáticas toman como punto de partida los avances logrados en la RenovaciónCurricular, uno de ellos es la socialización de un diálogo acerca de la estructura sistémica y el papel que juega en el proceso de aprendizaje la didáctica.

En este proceso de construcción de un nuevo modelo de enseñanza aprendizaje en su práctica se dirige a emplear en las matemáticas aspectos internos innatos como el ser (ontología) y el conocer (epistemología) sin dejar de lado elementos y aportes filosóficos que la matemática otorga a la construcción del pensamiento humano. Con ellos podemos realizar reflexionessobre la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática, en el proceso de construcción de una propuesta metodológica.

Para el MEN es preciso también suprimir todas las reflexiones inútiles, la huella de los errores cometidos y de los procederes erráticos, es oportuna esta anotación dado que cuando se haga un análisis más profundo de los procesos en ellos se pueden encontrar falacias por tanto no será una sorpresa que verdades eternas pueden dejar de serlo. Este aspecto en lo conceptual deja sentado la opción de crear sin miedo a encontrar errores, esta libertad permite que una propuesta metodológica emerja para solucionar contenidos y aprendizajes que erróneamente se pueden haber construido o no fueron sometidos a una revisión profunda por parte de expertos en la disciplina de la matemática. La propuesta se encamina aprecisar en las operaciones suma y resta aspectos de como ellas son operaciones binarias y que significa por ejemplo este concepto para la neurociencia y para las leyes mismas de la matemática como el concepto de grupo, el cual se rige por leyes que son fundamentales en la construcción del pensamiento y de las estructuras matemáticas.

Esa construcción del pensamiento matemático debe comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica que son fundamentales para nuestros niños y jóvenes, haciendo que la comprensión (no memorización) sea más fuerte para que el aprendizaje sea significativo y pertinente. Hacer matemática implica que el maestro se ocupe de problemas, pero no olvidar que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarle soluciones. La historia de la matemática permite con claridad definir que la geometría es el mayor sustento o pilar donde se soporta la estructura de las matemáticas y el ministerio apunta en esa misma dirección y en su relevancia:

> La geometría, por su mismo carácter de herramienta para interpretar, entender y

> apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior… (Colombia, 1994)

2.2.4.1 El Currículo Matemático

En la estructura curricular los procesos generales son aquellos que tienen relación con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación. Sencillamente son conocimientos básicos que están ligados con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Estos procesos se concatenan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial y el métrico. La propuesta que se trata está construida desde estos espacios, marcos pedagógicos y sistemas que el MEN tuvo en cuenta en su formulación de marco conceptual para los lineamientos, competencias y los estándares.

En su marco conceptual de la estructura curricular el MEN toma del matemático Miguel De Guzmán[13] uno de sus planteamientos referentes a que "la enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces." en su planteamiento propende por el pensamiento matemático desde la visión de De Guzmán (1995) que aduce:

> El estudiante manipule los objetos matemáticos; que active su propia capacidad mental; que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento con el fin de mejorarlo conscientemente; que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental; que adquiera confianza en sí mismo; que se divierta con su propia actividad mental; que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana; que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Puede observarse con claridad la coincidencia sobre aspectos que impulsan y sustentan mi propuesta, sobre buscar autonomía del maestro y el alumno, que se divierta con su propia actividad mental, es decir que sea feliz con lo que hace y en este caso que su aprendizaje matemático y sus actividades matemáticas lo hagan sentirse alegre, en la medida que se siente que aprende, y es competente con sus acciones y competente para dar solución a las situaciones problema que se le presentan en el proceso enseñanza aprendizaje. Estas son herramientas de gran ayuda pedagógica que se usa por la gran cantidad de elementos cognitivos que intervienen.

Para el MEN la matemática y dentro de la estructura curricular, aspectos como la teoría de números representan un elemento primordial en la formación del pensamiento y las competencias matemáticas de esta ciencia, por consiguiente la educación matemática y para el MEN "el énfasis que se ha hecho en el estudio de los números ha ido cambiando a través de las

[13] De Guzmán, Miguel (1936-2004). Matemático español.

diferentes propuestas curriculares.*”* El énfasis que ahora hacemos en el estudio de los sistemas numéricos es el desarrollo del pensamiento numérico: “Se puede decir que una de las herra mientas para desarrollar dicho pensamiento son los sistemas numéricos”. La teoría de números que se construye por la educación matemática se realiza durante todas las etapas escolares, es esencial y así lo asumo porque ella hará parte de todos los procesos escolares en la matemática. La teoría de números indica el MEN:

> Se construye paso a paso formando el pensamiento numérico que se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos otras situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hacen referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes interpretaciones y representaciones, a la utilización de su poder descriptivo, al reconocimiento del valor (tamaño) absoluto y relativo de los números, a la apreciación del efecto de las distintas operaciones, al desarrollo de puntos de referencia para considerar números. (Colombia, 1994).

En todas estas apreciaciones coincido plenamente porque es exactamente lo que de ello debemos hacer con la teoría de números, para poder enriquecer estas apreciaciones debemos en nuestra educación recurrir a la historia de esta ciencia y es allí donde emergen y abundan hechos y situaciones que tienen un enorme valor pedagógico, didáctico y conceptual porque han sido construidos por genios de la ciencia matemática, si los conocemos tempranamente se pueden potenciar aún más estos aprendizajes.

Continuando con la estructura curricular del MEN hacen referencia a como se pueden adquirir habilidades y destrezas para el aprendizaje de cálculos:

> Los estudiantes que son muy hábiles para efectuar cálculos con algoritmos de lápiz y papel son estos éstos el indicador mediante el cual el pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos. (Colombia, 1994)

Se aprecia el valor que tiene en el proceso de aprendizaje de las operaciones básicas de los algoritmos y como debemos articularlos con la teoría de números. Los algoritmos son de importancia para la comprensión de las operaciones y los procesos, y con ellos pedagógicamente se obtiene su conceptualización; además la matemática se aprende haciendo, con los dedos, contextualizando, donde la competencia es la demostración del proceso que lleva la teoría a la práctica haciendo uso de innumerables saberes, de aciertos y errores. Para David Perkins (1997) el uso de papel y lápiz tiene una connotación y debemos ser cuidadosos con la apreciación y su uso: “el lápiz y el papel no son vehículos potentes que dan apoyo a la cognición sino simples adminículos que comunican al maestro lo que el alumno tiene en la cabeza”.

La teoría de números se utiliza también para medir, describen la cantidad de unidades de alguna magnitud continua, como longitud, superficie, posición, volumen, capacidad, peso, áreas; que se supone dividida en múltiplos de la unidad correspondiente y que nos permiten contestar a preguntas como ¿cuántas unidades hay? ¿Cuántas decenas hay? El inmenso valor, los enormes temas, la gran cantidad de investigaciones que abarca la teoría de números para la matemática y la educación matemática son extensos, ellos presentan un potencial en las competencias y saberes matemáticos. Conceptos como las operaciones en los conjuntos, el orden en los sistemas numéricos, las leyes de las operaciones como la clausurativa, la

asociativa, la conmutativa, el inverso que conllevan a formar grupos, grupos Abelianos, a los anillos y a estructuras algebraicas. Podríamos enumerar muchos otros elementos de teoría de números. Para la enseñanza de la suma y la resta en los enteros, saber que existen conocimientos asociados a su enseñanza aprendizaje que exigen una mayor profundidad la cual nos permiten asociar el tema deteoría de números a otras ciencias, como ejemplo en neurociencia el cerebro forma una estructura algebraica en la formación del concepto y las ideas.

En el currículo el MEN se ocupa de la comprensión del concepto de las operaciones, en aprehender las propiedades matemáticas de las operaciones; en comprender el efecto de cada operación en algún aspecto de la vida real y las relaciones entre operaciones. También estos aspectos enmarcados dentro de la teoría de números centrado en las operaciones suma y resta en los Enteros permiten construir conceptos como grupo y estructura de grupo, cómo la suma es una operación binaria y esto generará la ley asociativa. Para las operaciones continúa exponiendo el ministerio: "El cálculo mental y la estimación dan una gran oportunidad a los alumnos para hacer más dinámicas las operaciones y para desarrollar ideas sobre relaciones numéricas. Concierne estimularlos para que exploren e inventen estrategias alternativaspara el cálculo mental" (Colombia, 1994).

Es preciso recalcar que hacer cálculos mentales no significa memorizar, repetir sin saberes pertinentes, las operaciones como fueron construidas son dinámicas, ellas se estructuran en el movimiento. Por último el currículo se refiere a que: "Los niños poseen una potente aritmética informal y que lo que comprenden y hacen a nivel intuitivo es mucho más amplio y de mayor magnitud que lo que hacen en el nivel escrito y simbólico del cálculo." Los maestros debemos usar los saberes previos de nuestros niños para potenciar el aprendizaje, sus competencias y sus conceptos, para que en contexto ellos los apliquen y nosotros los valoremos de forma pedagógica y educativa.

"La mente de nuestros alumnos dista mucho de parecerse a pizarras limpias y la concepción constructivista asume este hecho como un elemento central en la explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula" (López. J., 2009). Desde este principio, atribuir un sentido y construir los significados implicados en dicho contenido. Estas construcciones mentales no se lleva a cabo partiendo de cero, ni siquiera en los momentos iniciales de la escolaridad. El maestro debe saber que el alumno construye personalmente un significado (o lo reconstruyedesde el punto de vista social)[14] sobre la base de los significados que ha podido construir conanterioridad, el lenguaje y su interacción en comunidad son herramientas que todo estudiante adquirió y lleva a la escuela desde su primer día de escolaridad. Gracias a esta base de datos es posible continuar aprendiendo, continuar construyendo nuevos significados. Para Ausubel (1963) el concepto de conocimientos previos nos conduce a otro, el de aprendizaje significativo que debe tener en cuenta dos aspectos en la formación de este: La significatividad lógica que se refiere a conocimientos e ideas ya existentes; y la significatividad psicológica que refiere a intereses y sentido de lo que se aprende.

Pasando a un nuevo aspecto del currículo nos referimos al que hace referencia sobre pensamiento espacial y este se aborda por el ministerio sobre la importancia de la formación de estepensamiento en los niños y jóvenes porque su competencia *es* vital para los usos en áreas delpensamiento:

[14] Ausubel, David. Psicólogo y pedagogo, una de las personalidades más importantes del constructivismo.

> Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas, tales como el dibujo técnico, la arquitectura, las ingenierías, la aviación, y muchas disciplinas científicas como química, física, matemáticas, requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial." se afirma en el currículo. Para la formación del pensamiento espacial debemos hacer uso de forma amplia de la geometría…" y continúa: "La propuesta de Renovación Curricular avanzó en este proceso enfatizando la geometría activa como una alternativa para restablecer el estudio de los sistemas geométricos como herramientas de exploración y representación del espacio". (Ministerio de Educación Nacional , 2002)

En este punto la propuesta presente reafirma su construcción desde aspectos geométricos. La geometría es esencial en lo referente al espacio, pero aquí el retomar a Euclides y los griegos es fundamental en la aplicación de leyes y postulados para la interpretación, y uso dado por la ciencia de ellos. Observamos que en el currículo es claro y pertinente el concepto trazado: "Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento." aquí los constructores del currículo hacen referencia a objetos en reposo y otros como objetos en movimiento. Sobre este concepto de objetos en reposo no somos coincidentes porque en la construcción demis saberes matemáticos no he leído ningún maestro de la matemática que haya demostrado hecho referencia a este concepto y por lo investigado hasta el momento no es aceptado niusado en los círculos académicos de esta ciencia.

Otros aspectos del currículo son para esta propuesta de relevancia en la formación del conocimiento geométrico, el uso y la contextualización para su aplicación en la suma y la resta de Naturales y Enteros se adaptan para tener más amplias competencias: "Otro aspecto importante del pensamiento espacial es la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio." Es grato observar en la conceptualización del currículo como se abordan temas que los maestros no usamos en la práctica y hago referencia a las traslaciones, aunque se aborde de una manera no científica al cambiar términos académicos por otros que no lo son, como decir deslizarse: "Cuando se estudien estos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero". Las homotecias, los isomorfismos y las semejanzas son términos claros y precisos que se usan en la geometría, pero en el currículo han sido dejados a un lado:

> Cuando se estudien estos sistemas de transformaciones, debe comenzarse por los desplazamientos que pueden hacerse con el propio cuerpo, o deslizando objetos y figuras sobre el plano del piso, del papel o del tablero. Con esto se llega primero a las rotaciones y a las traslaciones. Se trata de ver qué tipo de movimientos conservan la dirección, cuáles la orientación en el plano o en el espacio, cuáles cambian los órdenes cíclicos de los vértices, sin definir verbalmente ninguna de estas transformaciones. (MEN, 2002)

Para la suma y resta de Enteros es importante la geometría con vectores, con posiciones y con segmentos lo cual se da en un inicio en E1, allí realizamos sumas de este tipo. Luego hacemos estas operaciones en E2, allí también incluimos sumas de áreas. La estructura curricular del MEN posee suficientes elementos pedagógicos y disciplinares para que un

maestro desarrolle mejores saberes en los estudiantes pero esto no se ve reflejado en los resultados de ciencia y tecnología del país. La estructura curricular del MEN le hace falta articulación y transversalidad.

2.2.4.2 Competencias en Matemática

A continuación se presentan las competencias más relevantes para la enseñanza de las operaciones suma y resta en los enteros:

. Claramente con una noción amplia de competencia como conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Esta noción supera la más usual y restringida que describe la competencia como saber hacer en contexto en tareas y situaciones distintas de aquellas a las cuales se aprendió a responder en el aula de clase. La adopción de un modelo epistemológico coherente para dar sentido a la expresión ser matemáticamente competente requiere que los docentes, con base en las nuevas tendencias de la filosofía de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como:

- Las matemáticas son una actividad humana inserta en y condicionada por la cultura y por su historia, en la cual se utilizan distintos recursos lingüísticos y expresivos para plantear y solucionar problemas tanto internos como externos a las matemáticas mismas.

- Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de laactividad de comunidades profesionales, resultado que se configura como un cuerpo de conocimientos (definiciones, axiomas, teoremas) que están lógicamente estructurados y justificados.

- Con base en estos supuestos se pueden distinguir dos facetas básicas del conocimiento matemático.

- La práctica, que expresa condiciones sociales de relación de la persona con su entorno, ycontribuye a mejorar su calidad de vida y su desempeño como ciudadano.

- La formal, constituida por los sistemas matemáticos y sus justificaciones, la cual se expresa través del lenguaje propio de las matemáticas en sus diversos registros de representación.

Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. (Ministerio de Educación Nacional, 1998)

El concepto del ministerio sobre los estándares es claro y preciso, va más allá de un saber

hacer en contexto, permitiendo que elementos como la inclusión en el aula tengan espacio en el proceso enseñanza aprendizaje. Un currículo por naturaleza está atravesado por aspectos sociales, afectivos, culturales, y políticos, solo la reflexión me permite que ellos cada día estén en mi proceso educativo:

> Admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es una cuestión relacionada únicamente con aspectos cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Estas consideraciones se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes. De esta forma se amplía la base argumentativa para relacionar las matemáticas con las finalidades culturalmente valoradas de la educación. (MEN, 1998)

En los estándares se incorporan nuevas finalidades sociales a los propósitos de la formación matemática, estas se argumentan con base en razones como son el carácter utilitario ampliado del conocimiento matemático, en tanto que el mundo social y laboral fuertemente tecnificado del Siglo XXI requiere cada vez más de herramientas proporcionadas por las matemáticas. Es con estos principios que esta propuesta incluye que las operaciones suma y resta posean otros valores agregados como el uso científico que de ellas se puede obtener. Demostrar cómo Pascal en base a suma de vectores construyó la Pascalina refleja qué importancia tiene articular estas operaciones con la geometría en los conocimientos y competencias de mis estudiantes.

Los estándares del MEN son coherentes como cuerpo teórico y expresan aspectos fundamentales de la educación matemática. Sus planteamientos van más allá del presente y por tanto su visión es oportuna y clara:

> Se hace necesaria una nueva visión de las matemáticas como creación humana, resultado de la actividad de grupos culturales concretos (ubicados en una sociedad y en un periodo histórico determinado) y, por tanto, como una disciplina en desarrollo, provisoria, contingente y en constante cambio. Ello implica incorporar en los procesos de formación de los educandos una visión de las matemáticas como actividad humana culturalmente mediada y de incidencia en la vida social, cultural y política de los ciudadanos. En segundo lugar, se hace necesario también incorporar los fines políticos, sociales y culturales a la educación matemática. (MEN, 1998)

Una propuesta educativa tiene como eje la actividad humana y cualquiera que ella sea se construye con hombres, en beneficio de los hombres. Por tanto mi innovación va dirigida al otro, como ser que siente que los saberes son para el beneficio individual y colectivo. La educación matemática debe formar seres humanos críticos y reflexivos pero sobretodo en nuestra sociedad con principios éticos y morales. Desde la matemática una de sus partes constitutivas La lógica que dentro del currículo, en los estándares, en los lineamientos y en las competencias son tratadas como un apéndice, es la encargada mediante sus leyes contribuir en estas competencias. La lógica matemática, el lenguaje de la matemática es fundamental en la construcción de pensamientos sociales aunque en el currículo estos se abordan sin mencionarla explícitamente:

> Busca contribuir desde la educación matemática a la formación en los valores democráticos. Esto implica reconocer que hay distintos tipos de pensamiento lógico y matemático que se utilizan para tomar decisiones informadas, para proporcionar justificaciones razonables o refutar las aparentes y falaces y para ejercer la ciudadanía crítica, es decir, para participar en la preparación, discusión y toma de decisiones y para desarrollar acciones que colectivamente puedan transformar la sociedad. (MEN, 1998)

La historia de la matemática es una herramienta que ayuda a corregir los conceptos que erradamente se plantean en el currículo de matemática. Los enunciados contradicen pensamientos que no han sido refutados:

> Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. (MEN, 1998)

El lenguaje matemático es único, pero sus representaciones pueden ser varias. Como ejemplo los conjuntos se pueden representar de en diagramas de Venn o con notación de conjuntos y su significado sigue siendo el mismo. Que la representación de conjunto se haga de al menos dos formas no quiere decir que sean dos lenguajes diferentes. Por lo tanto conceptuar que hay distintos lenguajes matemáticos es erróneo, pero el concepto errado es continuo en el currículo:

> A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones. (MEN, 1998)

Cuando los argumentos no cumplen las leyes de la ciencia presentan al estudiante más adelante contradicciones que confunden al estudiante, perjudicando la formación correcta del pensamiento matemático. Se debe crear pensamiento crítico desde la matemática, pero la formación del pensamiento matemático se construye con métodos de demostración propios de la ciencia y ella tiene tres claros en su devenir histórico: **el método inductivo, el método deductivo y el contraejemplo**. La propuesta del MEN es: "Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración". De esta forma el currículo muestra que tiene errores conceptuales pero que pueden ser corregidos en los procesos educativos valiéndonos de la investigación y como recurso valido con la historia.

Dentro del currículo la modelación ocupa un espacio vital para la construcción de pensamientos disciplinares y a ellos se refiere así el currículo:

> Con respecto a la modelación, en la didáctica de las matemáticas se ha hablado también con frecuencia desde 1977 de "la matematización." de una situación problema, con un

término introducido por Hans Freudenthal.[15] Esta expresión se suele tomar como sinónimo de "la modelación." y ambas pueden entenderse…". (MEN, 1998)

Cuando se usa la expresión matematización se hace referencia a un concepción del pensamiento para representar el mundo material o físico, pero el usado universalmente por los pensadores matemáticos es matematización, por ello uso y recomiendo con mis estudiantes en el aula de clase el de matematización. La matematización es el proceso de construcción de un modelo matemático y el modelo matemático se define como la organización sistemática de un conjunto de conceptos matemáticos basados en ciertos algoritmos, para dar solución a algún problema de la realidad concreta. La concretización es el proceso inverso a la matematización de transferir un modelo matemático a la realidad:

> Con el desarrollo de las matemáticas y luego de la física, se notó también que había aspectos espaciales más intuitivos y cualitativos que los de la geometría, de los que se desarrolló una ciencia abstracta del espacio llamada "topología"[16], por la palabra griega para el espacio o el lugar, "topos.," los cuales no necesitaban de las nociones métricas. (MEN, 1998)

Para un niño que está creando conceptos de matemática y tratando de relacionarlos con su mundo real y para un maestro que tome como cierto este concepto lo construirá pero de manera errada. Enunciar que la topología es una ciencia abstracta del espacio (E3) no es precisa, los espacios en topología matemática pueden ser espacios *n*, así que modelar la matemática es cuestión de construcción clara.

Para desarrollar este pensamiento desde los primeros niveles de la Educación Básica Primaria son muy apropiadas, entre otras, las siguientes actividades: analizar de qué forma cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de fiecesió números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término…

> …aun en el sentido restringido de "saber hacer en contexto." pues ser matemáticamente competente requiere ser diestro, eficaz y eficiente en el desarrollo de cada uno de esos procesos generales, en los cuales cada estudiante va pasando por distintos niveles de competencia. Además de relacionarse con esos cinco procesos, ser matemáticamente competente se concreta de manera específica en el pensamiento lógico y el pensamiento matemático, el cual se subdivide en los cinco tipos de pensamiento propuestos en los Lineamientos Curriculares: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional." Y agrega diciendo: "el pensamiento matemático se distingue del lógico porque versa sobre el número y sobre el espacio, dando lugar a la aritmética y a la geometría. (MEN, 1998)

Cabe preguntarse para la lógica matemática: ¿Cuál es la lógica de la lógica matemática? Y ¿Cuál es el objeto de estudio de la lógica? La lógica matemática se construye desde la primaria, porque es un lenguaje de carácter especial de tal forma que abordarlo se da en forma paralela a la enseñanza de la aritmética y la geometría, se hace de manera gradual y en constante ascenso,

[15] Hans Freudenthal (1905-1990) matemático holandés. Hizo contribuciones a la topología algebraica y la educación matemática. Un matemático y didáctica, experto en teoría curricular.

[16] Topología: Parte la matemática estudia las propiedades y características que poseen los cuerpos geométricos y que se mantienen sin alteraciones gracias a cambios continuos.

de lo más particular a lo más general. Las competencias definidas en el currículo están direccionadas en dos sentidos uno en la concepción de la interpretación del mundo real (abstracción) y el otro en su aplicación en beneficio del hombre y para ello la lógica es un lenguaje aceptado. Haciendo un mejor uso de los aspectos que están en el desarrollo de abstracción que hay en las operaciones aritméticas se abarcan diversos elementos que amplían los procesos cognitivos, sensoriales y motrices y aquí de nuevo la posición del currículo es acertado:

> En especial, la geometría euclidiana es un campo muy fértil para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo, de la deducción formal a partir de axiomas, por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto, y lo cotidiano y lo académico. (MEN, 1998)

La enseñanza de las operaciones aritméticas abarca todos los tipos de pensamiento cada uno de ellos aporta en el desarrollo de competencias. El aprestamiento que antecede a la etapa final de la concreción del pensamiento formal está dirigido a que cada uno de estos pensamientos participe en el aprendizaje de la operación estudiada, en la construcción y formulación de ella. El currículo define sobre la operación suma: "Aquí se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional."(Colombia, 1994). Para llegar a la concreción de la operación suma o resta en los números naturales y enteros, las experiencias deben abarcar desde distintas formas de conteo, generando un camino que lleve a producir procesos cognitivos que permitan una definición conceptual con las operaciones usuales (adición, sustracción, multiplicación y división) generando una comprensión del concepto de número asociado a la acción de contar, con la reunión de conjuntos, con traslación de vectores, con la suma de vectores, con el uso de notación de base diez para sumar en el ábaco, con empaquetar y desempaquetar; para construir ideas previas a la resta y con la rotación en E2 de vectores y segmentos, para formar la idea de vectores negativos o sentido izquierdo. El aprestamiento que hace parte del proceso de la enseñanza de las operaciones debe generar movimiento por ser parte esencial de la materia y cómo la matemática describe funciones de la materia:

"Any straight line segment can be extended indefinitely in a straight line." and "Given any straight line segment, a circle can be drawn having the segment as radius and one endpoint as center,"[17] por ello en el currículo no debe ser un deseo sino una obligación: "Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional". Los postulados dos y tres de Euclides arriba enunciados son la base del movimiento en esta ciencia lo cual ha sido analizado por innumerables tesis doctorales.

En las competencias se hace referencia al papel de reflexión e investigación para una mejora calidad educativa desde y en la práctica, esta reflexión e investigación se desarrolla en.

> Los grupos informales de autoformación y de investigación, dejarán atrás las propuestas de los textos escolares y de los documentos oficiales en el avance de los docentes hacia el perfeccionamiento de sus conocimientos matemáticos, pedagógicos y didácticos, de sus estrategias de enseñanza y del logro de aprendizajes significativos y comprensivos en sus

[17] El resaltado es mío. Traducción hecha del griego al inglés por la universidad de Harvard. Es una de las más recomendadas por su apego al original.

> estudiantes, que ojalá los lleven mucho más allá de loque proponen los estándares para cada conjunto de grados.

Esta reflexión busca ser plasmado en los hechos que servirán como el vaso comunicante hacía una acción educativa que desarrolla competencias y saberes mayores de calidad que produzcan en los estudiantes la capacidad de sentirse autónomos y capaces de entender ciencia y tecnología con capacidad de mejorarla.

La reflexión dirigida hacia el estudiante.

> La evaluación formativa como valoración permanente integra la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre éstos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos generales de la actividad matemática tanto individual como grupal. (MEN, 1998)

La evaluación en mi contexto se realiza con criterios que desarrollo durante periodos de 4 o más años, lo cual me permite observar sin presión de tiempo el aprendizaje de los estudiantes. Para mí práctica el desarrollo de lectura matemática es fundamental siendo un criterio para evaluar, la lectura se desarrolla en los textos guía y se presenta lo más pronto posible en su pro ceso matemático.

> Se trata, entonces, de comprender que la organización curricular de cada institución, en coherencia con su PEI, debe buscar el desarrollo de un trabajo integrado en los distintos pensamientos, más que el progreso en cada uno de ellos independientemente de los demás. (MEN, 1998)

Este fin se obtiene si el desarrollo de la labor educativa en el aula y en la institución, logra comprometer a todos los órganos constitutivos de la escuela, por ello debo trabajar y pensar articuladamente. Un proyecto de innovación solo es posible con la ayuda y cooperación que brinde el entorno, donde la investigación de carácter disciplinar y pedagógico propendan por una educación de calidad.

2.3 DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La metodología de Matemática Articulada se soporta para su construcción y desarrollo en la didáctica y de ella ha tomado diversas teorías. *Los obstáculos epistemológicos, las dificultades de aprendizaje en el proceso enseñanza de los números enteros, los contratos didácticos, las transposiciones didácticas y las secuencias didácticas* son algunas de estas teorías. Desde estos referentes se apoya en la historia de la construcción de la matemática y en los aportes de la pedagogía, dando igual importancia a los saberes disciplinares y a la pedagogía. Desde esta unión de pedagogía y matemática podemos construir procesos y secuencias que posibiliten un saber enseñado en condiciones más amplias y pertinentes. Desde estos dos elementos inseparables para la enseñanza realizamos las operaciones suma y resta. La metodología emplea y recurre a reconocer como ha sido ese camino recorrido en su construcción hasta lo que hoy se vive en el aula de clase en su proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los números enteros y en especial el subconjunto de los números negativos han sufrido muchos cambios a lo largo de la historia, muchos matemáticos se resistieron a su utilización. La aceptación de los números negativos fue un proceso muy largo ya que su incorporación y aceptación en el mundo de la matemática solo fue hasta el siglo XIX cuando Henkel los introdujo de manera formal. Desde el punto de vista de la didáctica, la enseñanza y el aprendizaje de los números enteros presenta muchas dificultades u obstáculos en los estudiantes, esto también lo manifiestan importantes matemáticos que han estudiado la importancia del proceso de la enseñanza aprendizaje de estos números. El proceso de los números negativos suele iniciarse su enseñanza en séptimo grado a niños con edades entre 11-14 años. En este proceso de la etapa escolar la transición de grado sexto a séptimo de los estudiantes se desarrolla la evolución de los conceptos de los números naturales cimentando las bases para sistemas numéricos más abstractos como los enteros. Al introducir los números negativos en esta etapa escolar, se suponen nuevas reglas para realizar operaciones incluyendo una nueva simbología para números y operaciones. Estas novedades con relación a los conocimientos previos que traen los estudiantes con respecto a los números, son probablemente la causa de las dificultades y obstáculos que surgen en los estudiantes con respecto a los números negativos. El propósito de esta investigación es presentar una estrategia de enseñanza-aprendizaje bajo el marco de la didáctica de las matemáticas, que consistente en el diseño e implementación de una secuencia didáctica cuyo objetivo fundamental es mejorar los procesos de comprensión de los conceptos y operaciones de suma, resta de los enteros.

2.3.1 La Transposición Didáctica

Tratar la didáctica en las matemáticas es básico en la metodología de Matemática Articulada y además un área muy amplia, donde la teoría sobre la forma de transmitir saberes es un referente para las didácticas de otras ciencias y la transposición didáctica se convirtió en guía para su uso en la educación en la enseñanza de otras disciplinas. Los aportes desde las transposiciones didácticas son grandes sobre la enseñanza de los números enteros y esos aportes poseen una amplia teoría. En lo relacionado con la transposición didáctica el referente principal es Chevallard (2005) que da inicio al desarrollo de este proceso mediante el cual se transforma un contenido de saber para adaptarlo a su enseñanza. De esta manera, el *saber sabio* es transformado en *saber enseñado*, para adecuarlo al nivel intelectual del estudiante. Así la transposición didáctica se enfoca en la transformación del saber científico a un saber didactizado, posible de ser enseñado. Es a comienzos de los años 90 cuando Chevallard realiza una aproximación antropológica de los saberes, mostrando en especial que todo saber es una respuesta a una pregunta. En el proceso de Matemática Articulada y para el caso de la enseñanza de la suma y la resta en los enteros, las transposiciones son fundamentales por los elementos de contexto social, histórico y los saberes disciplinares; ya que estos últimos sufren una transformación del saber científico al saber enseñado.

También Michel Verret es otro de los referentes teóricos de la transposición didáctica, conceptúa que en la educación donde se enseñan saberes es un fenómeno donde se realiza una transmisión de aquellos que saben un saber a aquellos que no lo saben. De aquellos que han aprendido a aquellos que aprenden" (Verret, M., 1985) es así como toda práctica de enseñanza de un objeto de estudio presupone, en efecto; la transformación previa de su objeto aprendido en objeto de enseñanza. La programación de los aprendizajes y de los controles siguen las

secuencias (procesos) razonadas que permiten una adquisición progresiva (secuencial) de los aprendizajes, es decir una programación de la adquisición del saber" (Verret, 1985). Para Matemática Articulada los procesos y los tiempos son fundamentales para el logro de los objetivos y la adquisición de competencias de los estudiantes, es por ello que el proceso está enmarcado con concepciones pedagógicas que se derivan de la Transposición didáctica.

De forma general la transposición didáctica permite la adaptación o transformación del saber de un conjunto de conocimientos y es aquí donde se debe hacer un énfasis en los maestros para que los saberes se puedan transponer de otras formas posibles en nuestro contexto escolar colombiano, estos saberes adquiridos mediante el estudio o la experiencia, sobre algún área disciplinar, en este caso de la matemática donde tuvo su inicio como discurso pedagógico y didáctico, disciplina, ciencia o arte, en contenidos enseñables, en un tiempo, lugar y contexto preciso. Para que esto sea posible se debe dar un proceso de descontextualización y recontextualización, donde los saberes nacen y crecen bajo la influencia de ciertos contextos, sociales, culturales, históricos etc., las sociedades necesitan que los saberes transciendan y sean enseñados y aplicados, para que esto suceda deben sufrir transformaciones o adaptaciones que correspondan al lugar o contexto donde se van a difundir de este modo los saberes generales que se aplican a algún área de estudio están relacionados a ámbitos específicos., así el estudiante será abordado en primer lugar, en el tiempo histórico, social y cultural en el que se desarrolla, también ubicarlo en una institución educativa o lugar geográfico y en una situación de aprendizaje, existiendo un vínculo entre su entorno familiar, social, con el docente, con sus compañeros y con el objeto de conocimiento. Como menciona Chevallard: "El aprendizaje constituye un proceso de construcción activa de significados por parte del sujeto que aprende". Este proceso implica la relación entre lo que cada uno sabe y puede hacer, o lo llamado competencia, y los nuevos contenidos que ha de aprender. El proceso de aprender no es lineal sino pluridimensional y dinámico, direccionado, con frecuencia, por avances desiguales, que requiere de constantes y múltiples reorganizaciones mentales y comportamentales.

El sistema didáctico corresponde al proceso que se lleva a cabo entre un docente, los alumnos y un saber matemático (Chavellard, Y., 1985). Estos tres "espacios" forman el sistema didáctico y la relación ternaria, que existe entre estos tres elementos. La distancia que separa el saber aprendido y el saber enseñado, es una relación pedagógica obligatoria de distancia. Esa transformación del saber sabio que ha sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de translapaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo o proceso que se le aplica a un objeto de saber a enseñar hace para transformarlo en un objeto de enseñanza, se le llama transposición didáctica. El saber cómo fundamento cognitivo debe permitir su *desincretización*, dividiendo la práctica teórica en campos limitados, de ellas se derivan las prácticas especializadas. Debe producirse además una separación entre el saber y la persona, en un proceso de d*espersonalización.*

El estudio de los obstáculos y dificultades didácticas, es de importancia para nuestro modelo de enseñanza de la suma y la resta de los enteros porque desde ellos se pueden observar en sus discursos las vicisitudes y situaciones que dificultan el aprendizaje de este importante tema educativo en la enseñanza de la matemática y las dificultades y obstáculos didácticos surgen de un sumun de hechos pedagógicos y didácticos por ello se implica que el obstáculo didáctico se debe a factores como la mala elección didáctica hecha para establecer la situación de enseñanza, herramientas, tipos de temas, etc.

2.3.2 El Contrato Didáctico

Cuando cada año escolar se inicia, se forma un nuevo sistema didáctico constituido por elementos: el saber, el docente y el alumno. Estos elementos estarán inmersos alrededor del programa escolar, que va a designar y diseñar el saber a enseñar, así un nuevo contrato didáctico se renueva anualmente entre el maestro y sus alumnos. Por lo tanto ese contrato requiere una reflexión donde los saberes previos han sufrido un desarrollo desde el maestro, el estudiante y el saber y, generalmente por su contexto evolutivo desde lo físico y emocional en los estudiantes. Cualquier proceso en la educación debe fijar los parámetros didácticos para esa textualización del saber que supone igualmente la introducción de una programación, de una norma de progresión para el conocimiento (Chevallard, 1985). Este contrato tendrá entonces un comienzo, un intermedio y un fin donde el contrato procede por secuencias, allí los maestros y los estudiantes deben convenir normas, programas de la asignatura, etc. Con lo cual se realiza un proceso educativo y a este acto se le denomina contrato didáctico. Con el contrato se dan parámetros entre el docente y el estudiante, de manera tal que las normas implícitas sean, normas explícitas, logrando que exista un "aula diversificada" donde los tiempos, espacios, contenidos, objetivos etc., sean convenidos. Existe un contrato didáctico y de aprendizaje cuando los estudiantes y profesor de forma explícita intercambian sus opiniones, comentan sus necesidades, sus expectativas, comparten proyectos y deciden la forma de llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje y lo reflejan oralmente o por escrito. En nuestro proceso el contexto ha sufrido cambios porque muchos de esos aspectos se renuevan cada año, los aspectos pedagógicos se presentaban escasamente y el proceso de aprendizaje desde lo didáctico ha sido bastante.

Quizá el aspecto del contrato didáctico sea uno de los aspectos con mayor trabajo por realizar ya que los estudiantes se oponen por naturaleza al aprendizaje. Para que el contrato didáctico se establezca de manera efectiva debe haber:

1. Consentimiento mutuo.
2. Aceptación positiva del estudiante, en tanto que es quien mejor se conoce y quien en definitiva realiza la actividad de aprender. Es te aspecto se refiere a la democracia en el aula de clase.
3. Negociación de los diferentes puntos o partes constitutivas de la relación escolar en cuanto al aprendizaje.
4. Compromiso recíproco entre el profesor y el estudiante de cumplir el contrato. En general se trata de una metodología de enseñanza-aprendizaje de tipo casi que personalizada lo que permite dirigir el trabajo independiente o presencial del estudiante promoviendo su autonomía y su capacidad de aprender.

Anderson y Sampson (1996), señalan los siguientes beneficios o razones:

- *Relevancia:* Para cuando los estudiantes han identificado sus propias necesidades, los contratos identifican las necesidades/intereses de los estudiantes.
- Autonomía. Los contratos de aprendizaje permiten una considerable libertad para elegir qué aprender y cómo aprenderlo.
- *Estructura*. Proporciona un esquema formal conocido y compartido por profesores y estudiantes para estructurar las actividades de aprendizaje. Al mismo tiempo proporcionan

un alto grado de flexibilidad.

• *Equidad*. Facilitan el acceso a los contextos y la equidad dentro de los cursos. Además son muy útiles con asignaturas basadas en competencias y en prácticas, cuando los alumnos trabajan de manera autónoma, como medio de combinar o sustituir las clases presenciales.

El contrato didáctico requiere de una metodología la cual debe ser clara y precisa. El qué aprender es esencial el contrato. El cómo aprender. El cómo evaluar la calidad del aprendizaje. Por último la importancia de un contrato en las evaluaciones por sus tiempos educativos y sociales.

2.3.3 Secuencia Didáctica

Para el proceso de la enseñanza de la suma y la resta en los enteros la secuencia didáctica es una estructura de acciones e interacciones relacionadas entre sí, intencionales que se organizan para alcanzar un aprendizaje significativo y pertinente. Las secuencias didácticas (SD) quedan configuradas por el orden en que se presentan las actividades a través de las cuales se lleva a cabo el proceso de enseñanza- aprendizaje. El énfasis está en la sucesión de las actividades planificadas o programadas secuencialmente, que serán desarrolladas en un determinado período de tiempo. El orden y el ritmo de la enseñanza constituyen los parámetros de las Secuencias Didácticas; además algunas actividades pueden ser propuestas por fuera de la misma SD para ser realizadas en un contexto espacio-temporal distinto al del aula, como lo mencionan Uri (2011) y Chamorro (2003).

Se puede concluir entonces que la Secuencias Didácticas es la organización de actividades orientadas al aprendizaje, a las características de la interacción, los recursos y materiales de soporte. Una Secuencia Didáctica permite identificar los propósitos, condiciones de inicio, desarrollo y cierre de los procesos involucrados en la enseñanza aprendizaje. (Uri, 2011) (Chamorro, 2003) La secuencia didáctica se orienta al desarrollo de la unidad didáctica, que es la mínima unidad o unidad irreductible que contiene las funciones o elementos básicos del proceso de enseñanza- aprendizaje: planificación, desarrollo y control. Algunos autores establecen una sinonimia entre secuencia didáctica y unidad didáctica enfoque que no carece totalmente de sentido; a nuestro criterio el concepto de secuencia didáctica se aplica a las actividades enfocadas al desarrollo de la unidad didáctica, lo que le da una connotación más funcional a la primera, y más estructural a la segunda.

Las secuencias didácticas forman el corazón de la didáctica, es allí, donde el momento de la verdad se pone en acción, el éxito o el fracaso del proceso de enseñanza- aprendizaje está en marcha. La Situación Didáctica implica la planificación de corto plazo, que durante su ejecución confluye con la de largo plazo. Quedarán así explícitos algunos elementos tales como las técnicas y los recursos didácticos y permanecerán implícitos otros más generales como las estrategias y concepciones filosóficas y psicológicas. Para Zabala (2010) las actividades de las Situación Didáctica deberían tener en cuenta los siguientes aspectos fundamentales u objetivos generales:

- Indagar acerca del conocimiento previo de los alumnos y comprobar que su nivel sea adecuado al desarrollo de los nuevos conocimientos.
- Asegurarse que los contenidos sean significativos y funcionales y que representen un reto o desafío aceptable.

- Que promuevan la actividad mental y la construcción de nuevas relaciones conceptuales.
- Que estimulen la autoestima y el auto concepto.
- De ser posible, que posibiliten la autonomía y la metacognición.

Cuando en la enseñanza de la matemática se reconocen estos aspectos didácticos, se espera de los procesos obtener mejores resultados en la enseñanza de la suma y la resta en los enteros, partiendo de que estos aspectos deben estar presentes en el aula desde lo didáctico. Desde el saber se debe permitir su *desincretización*, que implica dividir la práctica teórica en campos de saberes limitados, de los cuales se derivan prácticas especializadas. Debe producirse además una separación entre el *saber* y la *persona*, en un proceso de *despersonalización*, lo que debe reflejarse en las competencias y habilidades del estudiante cuando su desempeño sea puesto en escena. La importancia de los aspectos didácticos en la enseñanza de la matemática puede ser evidenciada en muchos ejemplos, Chevallard (1996) estudió y analizó junto a Joshua cómo la noción de distancia geométrica fue introducida en los programas oficiales en Francia en 1971 para los grados séptimos. Los maestros franceses vivían la implementación de la Matemática Moderna en sus currículos por ello al rastrear la historia de este concepto en los saberes sabios matemáticos remontándose hasta la definición de la noción de distancia matemática de M. Frèchet en 1906, quien creó este objeto matemático para sus necesidades de demostración en el campo del cálculo funcional. La noción de distancia, por ejemplo, define entonces la distancia que separa dos funciones. Los autores mencionados, se interesarán en el camino que permite pasar una noción del dominio de las matemáticas sabias a aquellas de los programas del colegio. De esta manera cuando la noción de distancia penetra en los programas de matemáticas del colegio, hay una gran diferencia con el papel para el cual Frèchet había sido construida inicialmente esta noción. Mientras que el matemático utilizaba el concepto para hacer análisis, éste es introducido en el programa de séptimo de geometría por vía de hecho: la transposición didáctica va a dar a la noción de distancia un modo de funcionamiento muy diferente, irreducible a priori, a sus modos de funcionamiento científico y disciplinar (Joshua y Dupin, 1993, p. 227).

CAPITULO III. LA MATEMÁTICA ARTICULADA

La educación debe ser lo más personalizada posible (...). Resulta impostergable transformar los métodos educativos. La educación, en todos sus niveles, debe considerar que no todos los estudiantes son iguales, que no todos caben en el mismo molde y que, por tanto, debe ajustarse a las características individuales de cada alumno. (Rodolfo Llinás)

3.1 LA MATEMÁTICA ARTICULADA, DE PUÑO Y LETRA DEL AUTOR

Francisco Escobar Delgado[18], doctor en matemática pura de Rice University, de Houston, Texas y creador de la metodología de Matemática Articulada desde hace 39 años. En sus palabras expone que es matemática Articulada, cuales sus objetivos, sus aportes disciplinares, pedagógicos y didácticos:

"El modelo conceptual y metodológico de Matemática Articulada está hecho de la misma manera como hacen las matemáticas los mejores matemáticos vivos y como la han hecho los mejores matemáticos del pasado. Ellos trabajan las áreas de la matemática en equipo para resolver los problemas más fácilmente.

La articulación se hace de acuerdo a la historia de la construcción del conocimiento matemático, imitando a los mejores e introduciendo "el movimiento" para hacer que el aprendizaje sea más aplicable y más útil para las ciencias, la informática y la tecnología.

Aquí el conocimiento matemático aparece sin errores, el método está apoyado en el comprensión de la lectura matemática, para aprender de las ciencias, desarrollar la capacidad de observación, formar niños más felices que los de ahora, enseñarle a pensar a los jóvenes, para formar ciudadanos más éticos, respetuosos de las leyes y capaces de construir un país más agradable que el actual y más desarrollado tanto en lo científico como en lo tecnológico.

La matemática enseña a ser cuidadoso, a *rendir tributo a la verdad*, a ser honesto, porque es la ciencia exacta que no admite errores, ni engaños, ni inexactitudes.

El propósito de ayudar con este modelo a la construcción de una mejor Colombia desde la orilla de la matemática.

El objetivo es construirles a niños, jóvenes y maestros colombianos, un camino en la matemática articulada para que puedan ser ciudadanos destacados, tanto en los oficios como en las artes, la tecnología, la informática y otras ciencias para posicionar a Colombia en lugar destacado en el concierto mundial".

A través de sus libros se construye un camino a los niños en el mundo de la matemática para que la puedan leer, entender y disfrutar sin tener que aprender nada de memoria.

"La matemática es una familia, así me lo enseñaron en Rice University, en Houston, Texas;

[18] Escobar, Francisco. Matemático. Profesor jubilado de Unicauca.

así la enseñan en las mejores universidades del mundo, como Princeton y Harvard. En Colombia se enseña con el método que trajeron los conquistadores españoles, que separa el lenguaje de la matemática de la aritmética, de la geometría y de sus otras áreas. Además se enseña con errores, es por eso que a las personas les es difícil entenderla.

Cuando terminé la maestría en matemática pura en Rice University, sentí la necesidad de enseñarles a los niños, jóvenes y docentes colombianos, de la misma manera como muchos grandes maestros matemáticos me enseñaron. Para lograr esto decidí construir un camino y hacer los libros que guiaran ese camino. Aquí todo debe ser entendido, sin errores, respetando, obedeciendo y aplicando correctamente las leyes de la matemática. Me enseñaron a ser cuidadoso, a rendir *tributo a la verdad*, es decir que me siguieron enseñando a no mentir, a ser honesto; esto es como debe ser, puesto que la matemática es la ciencia exacta y no admite errores, ni engaños, ni inexactitudes. Nuestra educación matemática tiene errores, es cierto, mas no es un problema de los docentes del presente, ni de los que les enseñaron a estos. Muchos errores están desde hace 500 años por situaciones históricas, como ejemplo el poder del maestro en el aula o el modelo de conductista que se vivió por cientos de años en nuestra educación.

Sí. A mí, y a más del 99,9% de los 1000 docentes de primaria y bachillerato con los que he interactuado últimamente, nos enseñaron que siempre se suma por la derecha, por las unidades, este es un error de 500 años.

Mire, uno de los daños que hace este error es el siguiente: el comerciante que no ha ido a la escuela o fue pocos años, suma por la izquierda y lo hace bien, sin embargo lo estimulan para que vaya a la escuela de adultos, encontrándose con un profesor que le dice que así como él suma no es correcto, introduciéndolo en el error del sistema tradicional.

Otro error que me enseñaron y que muchos docentes lo tienen, es que sumar es reunir cantidades de la misma especie en una sola. Eso es falso, las cantidades no se reúnen. Con este error llega el niño a bachillerato y luego le enseñan suma de polinomios y como cree que sumar es reunir cantidades, él va a pensar que los polinomios son cantidades, lo cual es un nuevo error, y estos errores producen contradicciones y frustraciones.

Otra cosa que me dijeron es que sumar es aumentar y cuando eso se dice, se está violando la ley modulativa, y al violar esta ley surgen las contradicciones, porque le dicen sumar es aumentar, sin embargo en las tablas de suma escriben $5 + 0 = 5$ o $0 + 5 = 5$ y no aumenta. Se crean definiciones erróneas, y con estas se producen contradicciones innecesarias y enfermedades mentales a nuestros niños que los perjudican, esto así es un engaño y hay que desterrarlo.

De las cuatro leyes de la suma de los números naturales, los profesores de primaria no entienden por lo menos tres, por consiguiente se violan y no es culpa de ellos, es la falta de capacitación y porque los libros usados para la docencia no las han explicado acertadamente. Cuando les expliqué la suma de los números naturales a los docentes de los corregimientos Coyongal y Madrid, del municipio de Magangué, Bolívar, algunos me dijeron: ‘hoy aprendí a sumar’, y la mayoría asintió con la cabeza”.

No solo las leyes de las operaciones aritméticas que se desconocen, se violan; también se desconocen las leyes de las otras áreas de la matemática.

No se puede edificar sobre bases falsas, salir de los errores es condición sine qua non para poder progresar en ciencia y tecnología. Se requiere un equipo de colombianos integrado por educadores matemáticos, matemáticos de alta graduación, pedagogos, psicólogos y profesores de español conocedores del lenguaje de la matemática, que todos conozcamos la realidad colombiana actual de la educación matemática, para ayudar a los profesores a desaprender los errores que a ellos les enseñaron y acompañarlos en ese proceso.

Este trabajo puede romper el ciclo y lograr que las nuevas generaciones aprendan matemática sin errores, *que la entiendan*, aportándoles a su futuro, porque ella acompañará a estas generaciones durante toda su formación académica y profesional y en su vida cotidiana. Esto ayudará en la búsqueda de la equidad y el desarrollo, al poder competir en igualdad de condiciones con los demás países que están más adelantados que el nuestro, y con todo esto, tener paz para siempre".

3.2 METODOLOGÍA USADA EN MATEMÁTICA ARTICULADA

Partamos de como es el proceso metodológico de Matemática tradicional. En ella la construcción de conceptos de suma y resta de Naturales y Enteros se realiza básicamente desde los conjuntos realizando una aplicación de "función cantidad" sin especificar su uso con claridad para construir el concepto de número Natural. La construcción de número entero es imposible desde la función cantidad. Para la suma se realiza generalmente unión de conjuntos y en muchos casos se hace "suma" de conjuntos lo cual es incorrecto porque esta operación no existe en la matemática. Por último se construyen las tablas de sumar, pasando luego a sumas por filas y columnas. Se suman más de dos números en la misma operación sin aplicar el concepto de operación binaria, que indica que el cerebro solo puede sumar dos números.
Los números enteros en la matemática tradicional se conceptúan desde la recta geométrica indicando que hay unos puntos de la recta que están en el lado izquierdo del punto cero (P0) y a ellos se le llama números negativos. Es fundamentalmente el proceso que se realiza en la enseñanza de la suma y la resta de enteros.
Para Matemática Articulada el proceso se inicia desde la historicidad y la epistemología de la ciencia matemática, donde tenemos claro primero quienes forman parte constitutiva de la ciencia. *La geometría, el álgebra, el cálculo, los conjuntos y la lógica son sus partes constitutivas*. Y desde esta claridad referencial se empieza el camino basado primeramente en la geometría y allí ocupa primer lugar los postulados de Euclides (325 A.C) para mostrar el movimiento que posee la matemática en su construcción y se debe usar en la enseñanza de la ciencia. Por ello en toda la didáctica se muestra y son evidentes el movimiento. En segundo lugar se basa en la lectura de texto y gráficos durante el proceso en el aula con el texto guía. Y con la lógica matemática, las representaciones del mundo físico se articulan mediante las funciones en lenguaje verbal y escrito. Para un niño en nuestro proceso por ejemplo le es permitido y aceptado como válido la suma: Dos más dos igual a cuatro, o escribir 2 + 2 = cuatro, porque ello es importante es la construcción del saber y se observa didácticamente que ese niño tiene bases y saberes adquiridos de forma correcta. Estás expresiones no violan ninguna ley matemática ni del lenguaje formal.

En tercer lugar una de las fortalezas de la matemática como ciencia ha sido el uso de las funciones para mediante ellas articular desde el mundo físico a la abstracción o representación simbólica del mundo matemático. Es desde grado uno que introducimos este concepto y por

ello nuestros estudiantes crean conceptos y saberes cuando usan funciones como la de longitud, la función cantidad, la función posición o la función borde.

En cuarto lugar la secuencia didáctica del plan de área y de aula, donde se inicia desde la geometría, la lógica o los conjuntos pasando por la lectura en contexto del texto, llegando articular con la aritmética, el álgebra o el cálculo. Esto es evidente en la secuencia didáctica que se muestra en la propuesta consecuente de esta investigación de la enseñanza de la suma y la resta en los entero.

En quinto lugar los conceptos deben tener una aplicación práctica hacia la vida cotidiana del estudiante o hacia una construcción o diseño de tipo científico. En el caso presente se puede mostrar su uso por parte de Blas Pascal[19] con la Pascalina, como consecuencia de un saber correctamente construido y su competencia en la aplicación de un saber sabido.

En sexto lugar valorar desde la lógica la ética que nos enseña una articulación con otras ciencias o disciplina como por ejemplo la de los valores de la verdad desde la implicación y su estudio en la construcción de leyes naturales de convivencia y ciudadanía, y la matemática donde se prohíbe falsear la verdad cuando las tablas de verdad nos indican que de una verdad solo se implica otra verdad.

En séptimo lugar la didáctica y la pedagogía activa permiten que los estudiantes con uso de material pedagógico construido para trabajar durante todo el proceso, opten por la construcción del concepto y del saber, que le permitan luego reconstruirlo en otros contextos necesarios. Esto implica que la ***memoria*** ocupe su espacio necesario en el desarrollo del conocimiento sin que el aprendizaje se base solo en esta función cerebral, como tradicionalmente se ha hecho en nuestro contexto educativo. Pero también se aplica con este proceder que todo en matemática se tiene que *demostrar* para que sea válido. En matemática debe propenderse para que todo deba ser entendido en el proceso de aprendizaje, que no haya nada que se convierta en obstáculo didáctico y que luego ese concepto pueda ser empleado.

3.3 ESTRATEGIAS Y RECURSOS

La institución educativa José Holguín Garcés desde el año 2006 decidió apoyar el proceso de Matemática articulada, para ello los niños de 2 grupos primero de primaria inician el proceso. El otro proceso de la institución se realizó desde grado 6 con 4 cursos. Los 6 primeros cursos del bachillerato ya realizaron sus estudios y están en la universidad alrededor de unos 40 estudiantes. El otro proceso inicio en 1° de primaria y hoy está en grado 9. A ese proceso han llegado unos y han salido otros. En el momento el proceso tiene 35 estudiantes con más de tres años en el proceso de Matemática Articulada. La institución para desarrollar el proyecto adquirió un texto por cada estudiante y lo ha hecho durante 5 ocasiones que es el nivel de Matemática Articulada donde hoy se encuentran ubicados los estudiantes. Otros recursos que aportó la institución ha sido regla bicolor y segmentos para cada estudiante y un kit que consta de ábaco, 2 planos cartesianos en triplex perforado y figuras geométricas madera. Cada año en el área de matemática se le asigna los mismos cursos al mismo maestro, él se encarga de trabajar con ellos durante los 6 años.

[19] Pascal, Blas (1623-1662). Matemático
Frances. Inventor de La Pascalina. Computador mecánico para sumar.

CAPÍTULO IV. MATEMÁTICA ARTICULADA. EL PROCESO

4.1 ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA EN LOS NÚMEROS NATURALES

Edward Frenkel en su texto Love and Math reseña y resalta algunos aspectos sobre la obra del matemático Robert Langlands y el Programa Langlands.

> «Profesor Weil: Como respuesta a su invitación para dar una charla, le adjunto la siguiente carta. Tras escribirla me he dado cuenta de que difícilmente contiene una sola afirmación de la que esté seguro. Si la lee como pura especulación le estaré agradecido; si no es así, estoy convencido de que tiene una papelera a mano.» Con estas líneas comenzó el matemático Robert Langlands, en aquel entonces en su treintena, una carta al reconocido André Weil. Estaba llena de especulaciones **para relacionar áreas de las matemáticas que hasta entonces se creían independientes**. El documento se considera el origen de las conjeturas de Langlands. El libro que nos ocupa es un intento porparte del matemático Edward Frenkel de explicar, en términos accesibles para el no experto, en qué consiste el programa de Langlands y sus ramificaciones en geometría y física." (El resaltado es mío). Y continúa su exposición diciendo: "El programa de Langlands corresponde a una red deconjeturas de las cuales algunas se han demostrado, mientras que otras siguen sin resolver. A día de hoy constituyen un área vasta y muy actual de investigación en matemáticas.

El programa Langlands consiste en una extensa red de conjeturas que interrelaciona de manera precisa la teoría de números, el álgebra y el análisis, eliminando supuestos compartimentos estancos entre las subdisciplinas, reseña el profesor de la universidad Nacional Fernando Zalamea en su texto *Grandes corrientes de la matemática.*

El tomar en primera instancia los trabajos de Langlands sobre articulación de distintas áreas de la matemática y basándonos en ello para luego hacer uso y articular por ejemplo lageometría con la aritmética, permite caminar sobre bases sólidas en la propuesta educativa planteada. Tomar los postulados de Euclides permite trabajar sobre bases disciplinares en laenseñanza aprendizaje de temas como la suma de Naturales y, suma y resta de Enteros, partiendo por ejemplo desde la geometría o desde los conjuntos y llegar a la aritmética, usando las funciones.

Con este enfoque, y conociendo, entendiendo y respetando las leyes de la aritmética (también leyes algebraicas), poniendo a interactuar estas leyes con los 5 axiomas o postulados (leyes) de la geometría de Euclides en su texto Los Elemento y siguiendo el camino de la Aritmética Geométrica planteada por él, iniciamos un camino firme basado en estas leyes.

1. Any two points can be joined by a straight line.
2. Any straight line segment can be extended indefinitely in a straight line.
3. Given any straight-line segment, a circle can be drawn having the segment as radius and one endpoint as center.
4. All right angles are congruent.
5. Parallel postulate. If two lines intersect a third in such a way that the sum of the innerangles on one side is less than two right angles, then the two lines inevitably

must intersect each other on that side if extended far enough.

Se usa la traducción realizada del griego al inglés por la Universidad de Harvard por ser reconocida como una de las mejores. Se recomienda por parte de matemáticos el uso de traducciones del griego al inglés, al frances y al alemán por ser las más cercanas a el concepto original de Euclides.

El segundo postulado y tercer postulado son fundamentales en el proceso de enseñanza aprendizaje para mostrar el **movimiento** que posee la matemática. Euclides así nos acerca a un elemento que facilita la enseñanza y el aprendizaje en el preescolar y en la educación básica.

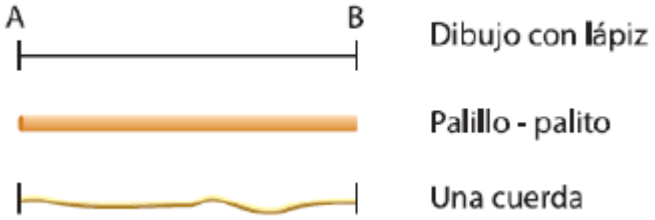
En este proceso donde los seres deben ser enamorados por el maestro y la ciencia matemática. En este contexto es cuando la metodología de Matemática Articulada y los procesos educativos necesitan la ayuda de la pedagogía y la didáctica. Los aportes de Yves Chevallard, Michel Verret y Guy Brousseau la Transposición didáctica, las Situaciones didácticas y su Contrato didáctico son aportes fundamentales para el desarrollo de la propuesta metodológica y la transmisión de saberes científicos en el área de matemática.

4.2 LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA SUMA Y LA RESTA EN LOS NÚMEROS NATURALES.

"Los profesores deben ser una guía, su labor no consiste en dar instrucciones sino en comprender a cada alumno es sus particularidades para brindarle una orientación adecuada" (R. Llinás).

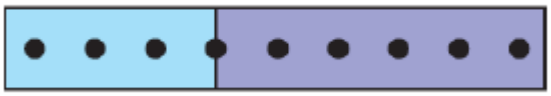
Una primera aproximación para el desarrollo de la metodología es identificar las partes (áreas) que componen la matemática, ellas son: *La teoría de conjuntos, la lógica, los dos constituyen el lenguaje de la matemática, la geometría, el álgebra y el cálculo*. Con ellas y su articulación se desarrollan las teorías matemáticas. En Los Elementos, Euclides enuncia los postulados, axiomas y los teoremas. Los primeros son afirmaciones lógicas y por ello no se demuestran (Moise, D. , 1996), pero son la base fundamental para las demostraciones de los teoremas. La primera definición que se usa es el **punto geométrico** que tiene características precisas como el de ser indivisible, el no tener grosor y no tener anchor. Del segundo postulado de Euclides tiene un uso especial porque con el **describió el movimiento de traslación que toma el punto en la matemática**, con ello construye la idea y representación de la recta, de figuras planas, del plano y desde allí se construyen sus representaciones (Representaciones mentales se entienden como aquella forma material o simbólica de dar cuenta de algo real en su ausencia, están organizadas en estructuras que permiten darle sentido al entorno). Con estos dos elementos, punto y movimiento se trabaja construyendo figuras que representan la recta (dan la idea) o sus segmentos; se trazan a lápiz, con colores, con la punta de agujas y alfileres, con granos de arroz, granos de lenteja, hilos y otros materiales, la **representación** de la recta. Estas experiencias previas[20] son construidas desde procesos anteriores permitiendo que con ella se construya material didáctico de apoyo para potenciar la interpretación de ideas y construir conocimientos más amplios. Por ejemplo se puede representar así:

[20] Ausubel, David. Teoría del aprendizaje significativo.

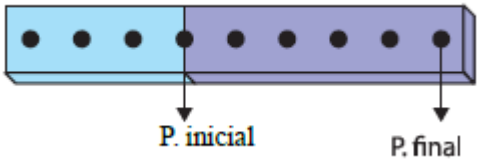


La regla bicolor: en nuestro caso se usa los colores verde y rojo; cuando trabajamos en clase, el color verde se ubica hacia la derecha y el rojo irá hacia la izquierda; pero también el verde hacia arriba y el rojo hacia abajo. Con una unidad patrón construimos los puntos naturales desde punto cero (P0) el cual se ubica en la frontera entre el color rojo y el verde, en la regla tenemos hasta punto nueve (P9) este lado de la regla es de color verde y hasta punto menos tres (P-3) de color azul. Desde aquí construimos dos nuevos elementos geométricos para el desarrollo del proceso:

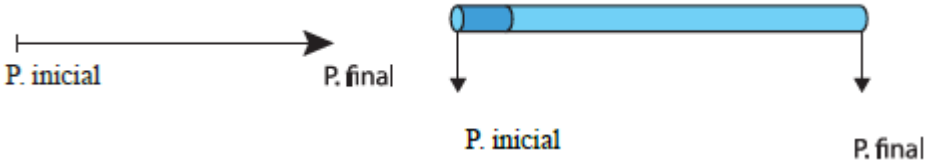
Segmento de recta que hace parte de ella y es una parte de ella, está compuesta de puntos.



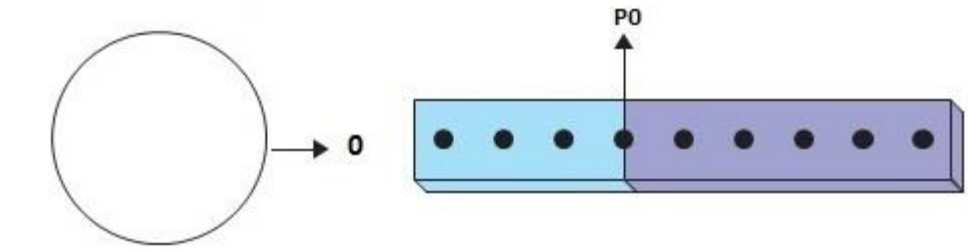
Tiene como características constitutivas un punto inicial y un punto final e inherente a ello una longitud, cuando está definida en la recta tiene una dirección y un sentido (estos se definen más adelante). Todos los segmentos que van a corresponder a vectores geométricos que inician en el punto cero. Son representados y construidos en material real en nuestro caso con fomi, varillas de pasta o cartulina.



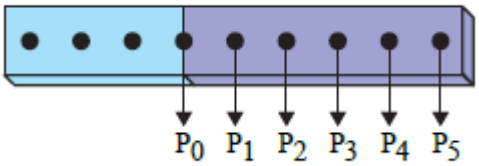
Vector geométrico que hace parte de la recta y es una parte de ella inician en el punto cero (P0), está compuesto de puntos. Sus características fundamentales son el tener un punto inicial y un punto final, tiene longitud y sentido. Inherente a su construcción un punto inicial y su punto final, tiene una longitud. Los vectores geométricos todos inician en el punto origen. Para su representación los construimos en fomi y cartulina u otros materiales:



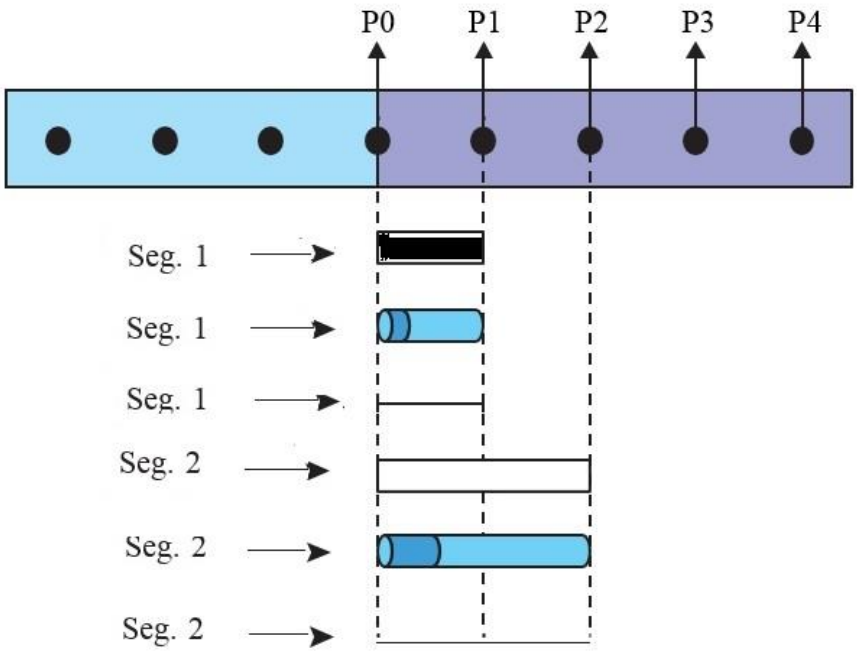
Punto geométrico es el elemento que constituye la recta. No tiene grosor, es aquello que no tiene partes, no tiene anchor por lo tanto tiene longitud cero. Un punto por tanto es la nada, lo cual indica que es indivisible. Punto cero (P0). El punto cero es el lugar en la recta donde inician todos los vectores y segmentos geométricos. En la recta elegimos un punto y le damos un nombre especial al llamarlo punto origen o punto cero y su posición o coordenadaes el número cero. En los conjuntos, tomamos un conjunto especial que es aquel que **no tiene elementos, ni uno solo,** entonces mediante la función cantidad asignamos a este conjunto el número cero. En la recta asignamos al punto P0 la ubicación donde se encuentra el límite entre la derecha y la izquierda. En la regla bicolor el punto cero P0 se ubica donde inicia el color verde y dónde comienza el color rojo, es la frontera. Se le asigna al P0 por función posición del número cero.



Todos los cuerpos geométricos están compuestos de puntos, son conjuntos de puntos. En la recta decimos que punto uno (P1) es donde termina el V1 y el seg1. El punto dos (P2) es el punto donde termina el V2 y el seg2. Así sucesivamente ubicamos los puntos naturales (P0, P1, P2, P3, P4,…). El lugar que ocupa cada punto en la recta se le llama posición y desde allí mediante la **función posición** le asignamos un número al punto.



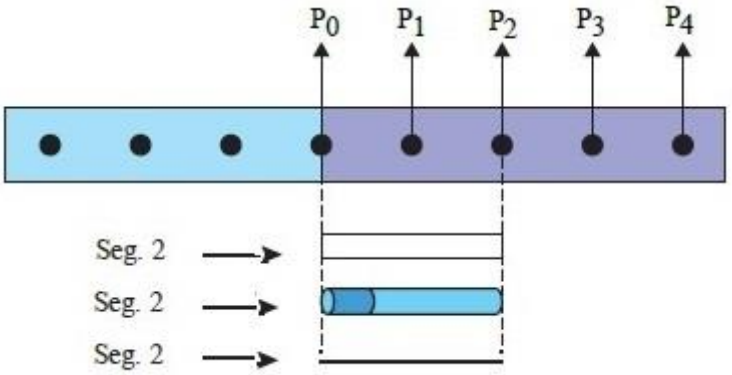
Estos elementos los representamos usando transposiciones (Chevellard, Y. 1992) de forma sucesiva articulándola con elementos pedagógicos, siendo este material didáctico de diversos texturas en su construcción, de tamaños que coincidan con puntos naturales en la regla bicolor y de formas diferentes permitiendo que en la construcción de la representación o idea, se comprenda que los materiales y colores no inciden en la representación de los vectores y segmentos. Entre los materiales que más usamos está el fomi, las piolas, la cartulina y la madera, pero podemos usar otros más.



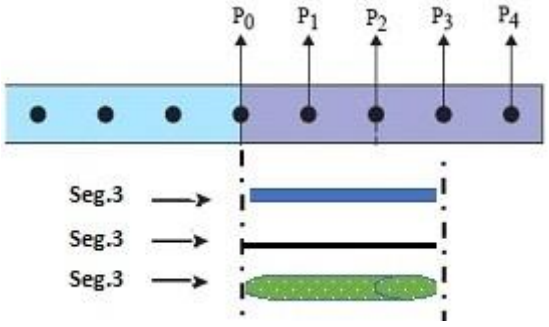
En este proceso metodológico de Matemática Articulada se construyen y representan algunos vectores geométricos y segmentos geométricos, y mediante la **función longitud–sentido** se asigna un número natural a cada uno de estos vectores y el número informa la longitud y el sentido del vector.

Segmento de longitud uno (Seg1). Seg1 Inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto uno (P1).

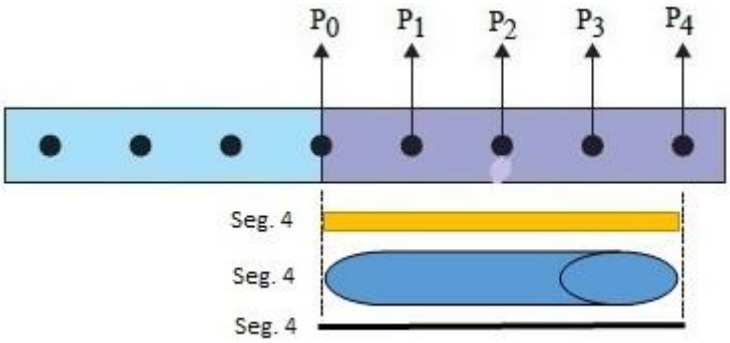
Segmento de longitud dos (Seg2). Seg2 Inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto dos (P2). Decimos del seg2 que la dirección es la misma que tiene la recta y de sentido derecho o arriba



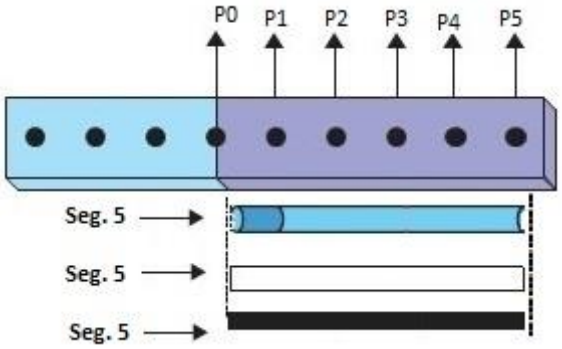
Segmento de longitud tres (Seg3). seg3 Inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto tres (P3).



Segmento de longitud cuatro (Seg4). Seg4 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto cuatro (P4).

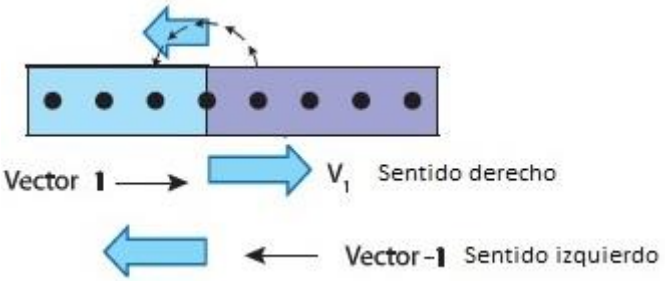


Segmento de longitud cinco (Seg5). Seg5 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto cinco (P5). Ahora, si giramos media vuelta a los segmentos anteriores, entonces lo que se obtiene son vectores geométricos que son subconjuntos de la semirrecta de sentido opuesto a la semirrecta donde están los segmentos. Los segmentos ahora van a ser vectores con sentido derecho y sus opuestos, vectores con sentido izquierdo.

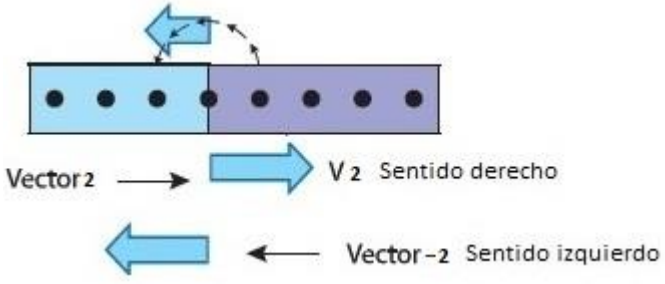


Podemos construir y representar algunos vectores geométricos en la regla bicolor. Mediante la **función longitud** le asignamos un número entero que hasta aquí es un número (Natural).

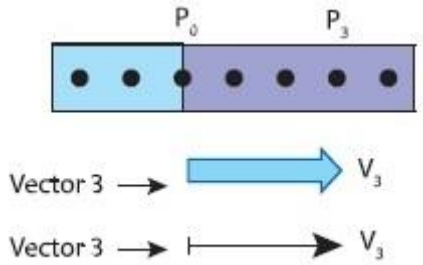
Vector uno (V1). V1 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto uno (P1), y tiene longitud. Ahora lo pensamos que tiene sentido derecho. Ahora se puede decir que **V1 = V+1. Si el V+1 tiene sentido derecho entonces el V–1 tiene sentido izquierdo y longitud 1.**



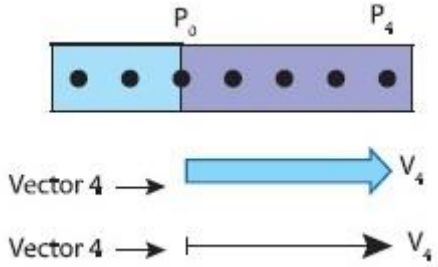
Vector dos (V2). V2 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto dos (P2). **V2 = V+2** tiene longitud 2 y sentido derecho.



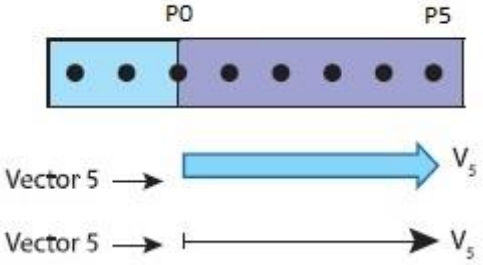
Vector tres (V3). V3 inicia en el punto cerro (P0) y termina en el punto tres (P3).
V3 = V+3 tiene longitud 3 y sentido derecho.



Vector cuatro (V4). V4 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto cuatro (P4).
V4 = V+4 tiene longitud 4 y sentido derecho.



Vector cinco (V5). V5 inicia en el punto cero (P0) y termina en el punto cinco (P5).
V5 = V+5

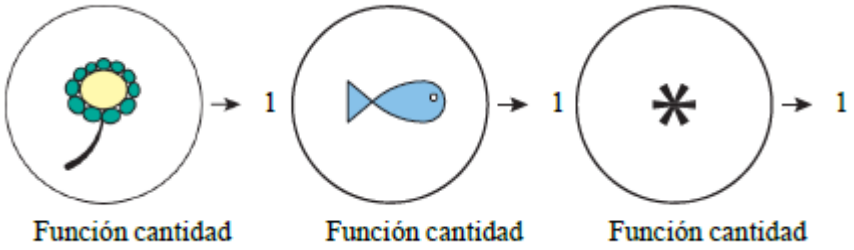


Se realiza el proceso de la construcción de los conceptos de vectores y segmentos usando la regla bicolor comenzando ahora la transposición en la construcción de vectores y segmentos hacia el metro como una unidad de medida convencional. De la misma manera los niños construyen vectores y segmentos de un cm, de dos cm etc. Así cada estudiante con el material elaborado puede realizar comparaciones entre vectores de la regla bicolor y los elaborados en el metro, se usa el material real y se obtienen conclusiones. En este mismo proceso se construye el conjunto de vectores naturales y segmentos naturales.

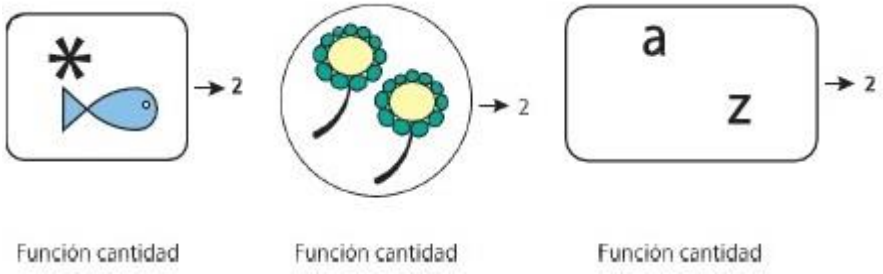
4.3 LOS CONJUNTOS EN LA METODOLOGÍA

Los conjuntos permiten construir el concepto de número mediante la función cantidad. La función cantidad permite articular los conjuntos con la aritmética y de esta manera asignar a un conjunto un número. Los fines de proceso pretenden construir el **conjunto de los números naturales.**

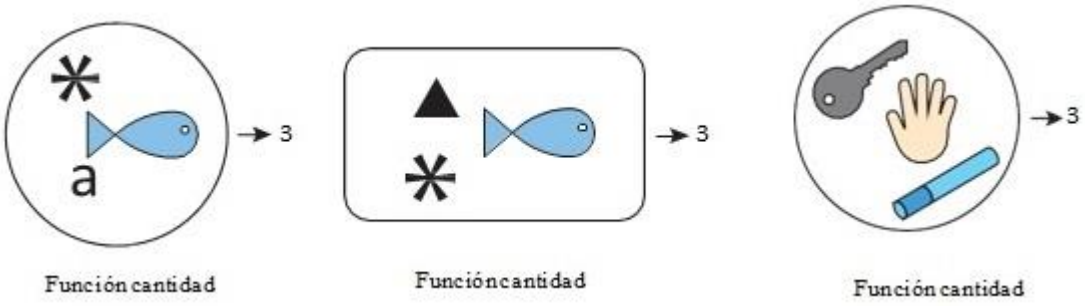
Al conjunto de un elemento le asignamos mediante la función cantidad el uno (1).



Un conjunto de dos elementos le asignamos mediante la función cantidad el número dos (2).

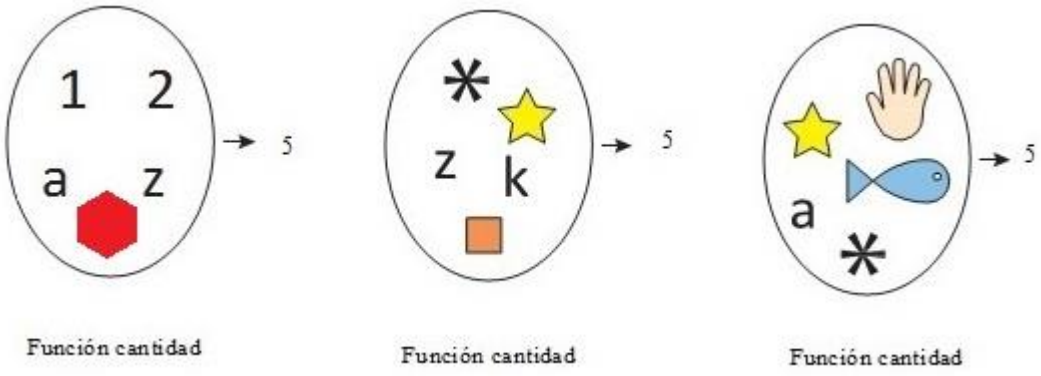


Un conjunto de tres elementos le asignamos mediante la función cantidad el número tres (3).

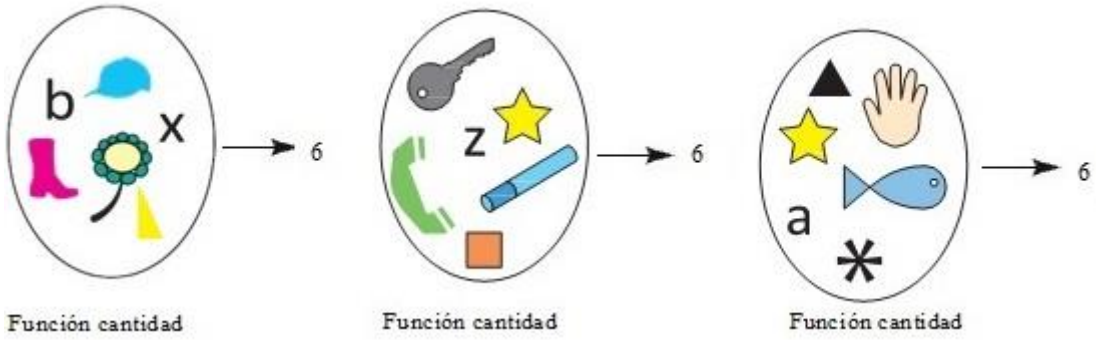


Un conjunto de cuatro elementos le asignamos mediante la función cantidad el número cuatro (4).

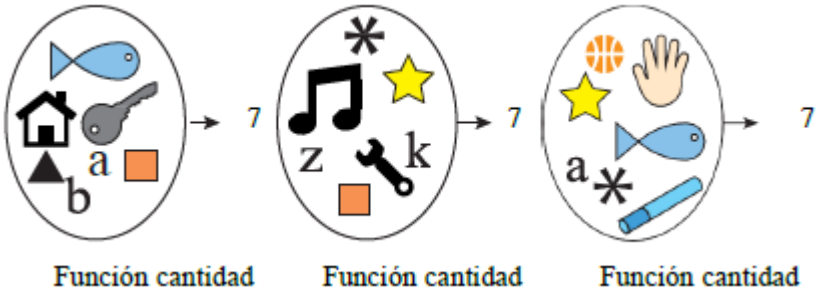
Un conjunto de cinco elementos le asignamos mediante la función cantidad el número cinco (5).



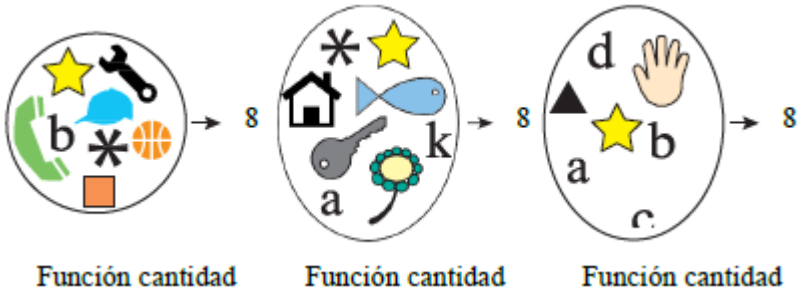
Un conjunto de seis elementos le asignamos mediante la función cantidad el número seis (6)



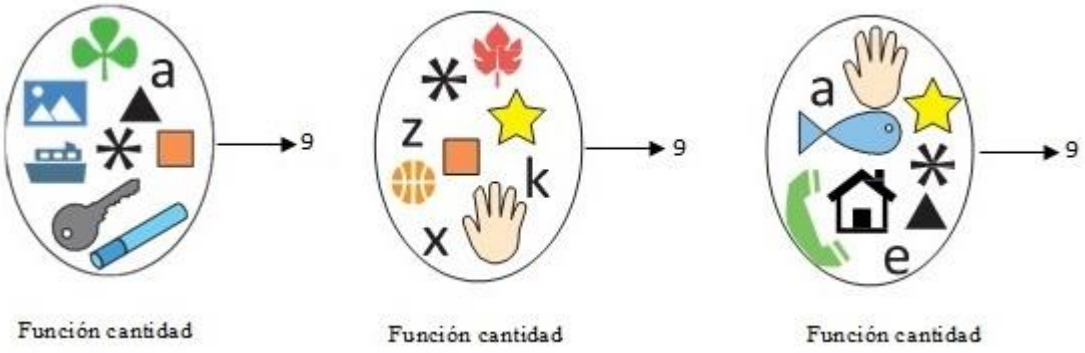
Un conjunto de siete elementos le asignamos mediante la función cantidad el número siete (7).



Un conjunto de ocho elementos le asignamos mediante la función cantidad el número ocho (8).



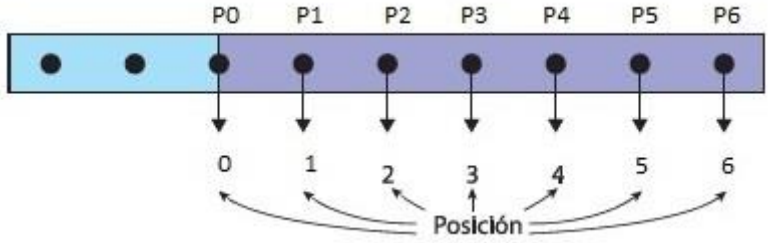
Un conjunto de nueve elementos le asignamos mediante la función cantidad el número nueve (9).



Al conjunto de que no tiene elementos o conjunto vacío, le asignamos mediante la función cantidad el número cero.

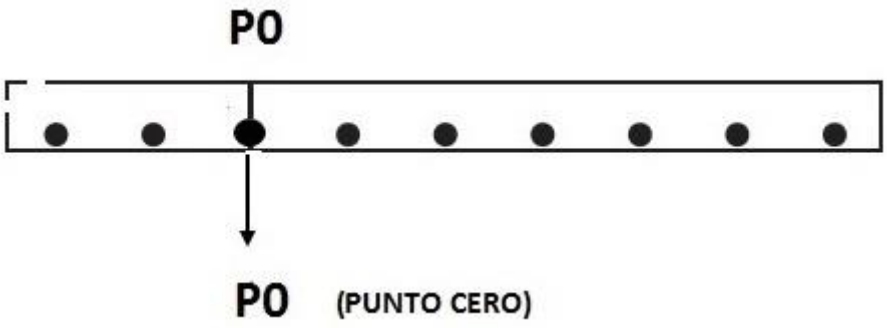
4.4 USO DE LOS PUNTOS GEOMÉTRICOS

La recta es un conjunto con infinitos puntos y de estos seleccionamos uno que es el origen y lo llamamos punto cero (P0), tomamos a partir de él un segmento que llamamos vector uno (V1) cuya longitud es uno. El punto final de V1 es el punto uno (P1). El vector uno (V1) inicia en el punto cero (P0) termina en el punto uno (P1) (recordemos todos los vectores geométricos inician en el punto cero, o punto origen. Entonces, utilizando la función traslación (T) trasladamos V1, haciendo que el punto final de V1 coincida con el punto inicial del V1 trasladado, así el punto final del V1 trasladado será ahora el P2. De modo similar trasladamos (T) el V1 haciendo que su punto inicial coincida con el P2 y el punto final del V1 trasladado, coincida con el P3. De esta manera se da la posición a los puntos naturales en la recta geométrica y se construye el conjunto de los puntos naturales.

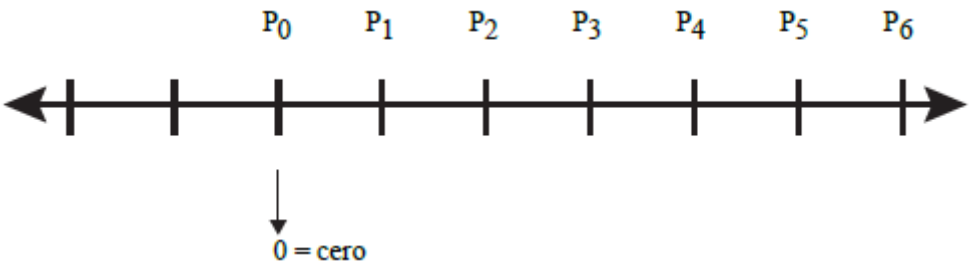


Se puede observar en la recta la posición de los puntos naturales así por ejemplo el P1 decimos ocupa la posición uno, el P2 ocupa la posición dos, el P3 ocupa la posición tres, etc.

En la recta al **P0 le asignamos la posición cero** y su imagen es el número cero mediante la función posición.

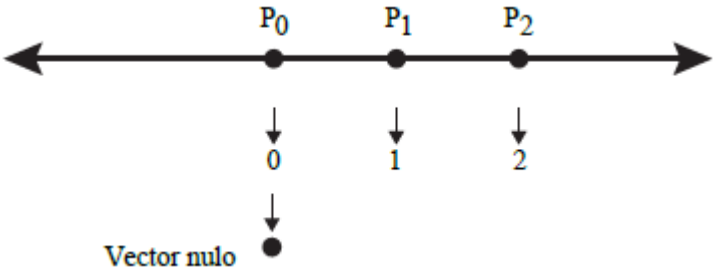


El Vector nulo es un conjunto formado por un punto, es decir que el vector nulo es vector geométrico, que tiene punto inicial igual a su punto final y además no tiene dirección ni sentido en la recta. Su medida o longitud es cero, entonces mediante la función longitud asignamos el número cero.



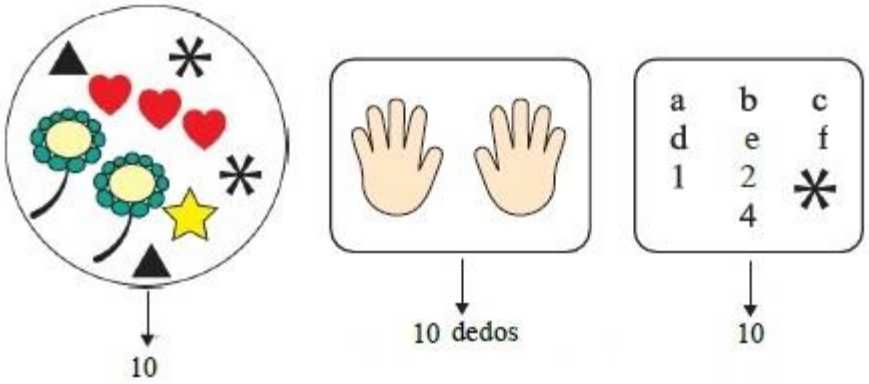
4.5 LA DECENA

El conjunto con diez (10) elementos se puede ver como un conjunto formado por diez subconjuntos de un elemento o un paquete de diez y cero elementos sueltos, son esos cuya imagen en el sistema decimal es el número 10 escrito en masculino, o decena (10) en femenino.

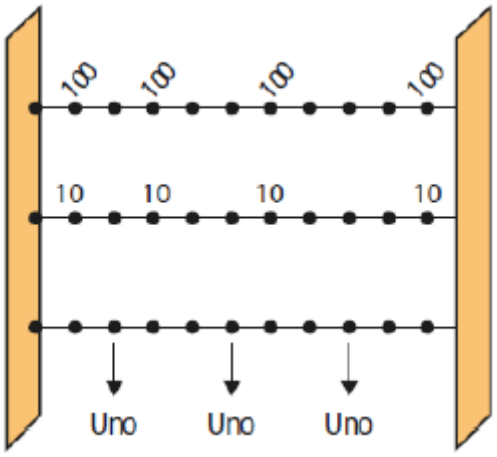


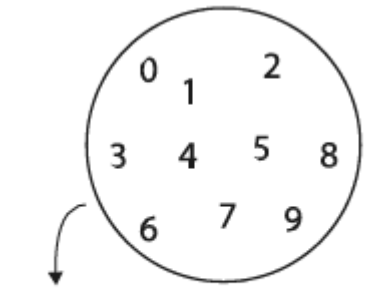
Cuando tenemos un conjunto con 10 elementos iguales los empaquetamos. Esa es la condición con la que se construye el sistema decimal.

Hacemos uso de palitos, palillos, tapas de gaseosa y otros materiales con 10 elementos cuya foto o imagen es 10. Con los palillos se introduce el concepto de **empaquetar** (Escobar, F., 2012c) (empaquetar se realiza en la vida real mediante la acción de tomar 10 palillos o pitillos y ajustarlos con una banda de caucho o introducirlos en una bolsa plástica transparente) que significa tener un conjunto de 10 elementos y solo 10 elementos, damos inicio a la idea o representación de **base 10**.



Haciendo uso del **ábaco** introducimos su aplicación mostrando que cuando es cerrado tiene sus fichas fijas en cantidad 10, de esta manera construiremos el concepto de sistema decimal que luego conduce a la base 10. Cada fila tiene un valor generado por su posición en el lugar que está empaquetado. La primera fila tiene cada elemento un valor de uno (1) en total son 10 unidades. La segunda fila cada elemento tiene un valor de diez (10) en total son diez dediez que sumados dan (cien) 100. La tercera fila cada elemento tiene un valor de cien (100), al ser 10 elementos sumados dan mil (1000). Así sucesivamente cada fila adquiere un valor mayor pero de la unidad seguida de ceros o en base 10. Sabiendo que cada 10 paquetes iguales se empaqueta de nuevo formando un elemento de mayor valor en base 10. Al definir que la base numérica es 10, construimos el conjunto numérico con estos 10 elementos así:





Conjunto de números que forman la base 10

Números base 10 = {0, 1, 2, 3, ..., 9}

Pasamos a la articulación con la cinta métrica de modistería (cinta que viene empaquetada en colores cada 10 unidades) mostramos como ella está empaquetada cada 10 unidades.

Podemos pasar con la introducción de la idea de **la decena** a definir de forma aritmética como escribirla.

El número **1** se escribe aritméticamente[78] en **base 10** así: $\mathbf{1 * 10^0}$ (Se lee uno por diez a la cero. Diez a la cero significa una unidad. Cero empaquetado. Diez elevado a la cero es uno)
El número **2** se escribe aritméticamente en **base 10** así: $\mathbf{2 * 10^0}$ (Se lee dos por diez a la cero)
El número **3** se escribe aritméticamente en **base 10** así: $\mathbf{3 * 10^0}$ (Se lee tres por diez a la cero)
Así desarrollamos este proceso hasta construir este concepto terminando con el número 9.

Esta forma de escritura la llamaremos suma de productos en base 10. Cuando tenemos el número 10 lo podemos descomponer en suma de base diez así: $1*10^1 + 0* 10^0$. Se lee uno por diez a la uno más cero por diez a la cero. (10 elevado a la 1 es igual a 10 y 10 por uno es 10. Más 10 a la cero es igual a uno y uno por cero es igual a cero entonces 10 más cero es igual a 10).

Cuando tenemos el número 11 entonces tenemos un paquete de diez o decena más un paquete de uno $\mathbf{1 * 10^1 + 1 * 10^0 = 11}$

Para cualquier número se puede usar la misma forma de escritura en suma de productos de base 10. Por ejemplo, el número **35** se escribe $\mathbf{3 * 10^1 + 5 * 10^0 = 35}$ o también $\mathbf{5 * 10^0 + 3 * 10^1 = 35}$

Cuando tenemos 10 paquetes de 10 (es decir 100 unidades) se cumple que tenemos 10

iguales, en este caso tengo 10 paquetes de 10 unidades, por lo cual puedo volver a **empaquetar** formando un nuevo paquete que tiene dos empaques hechos, uno para diez unidades y el nuevo empaque para 100 unidades.

En matemática se escribe como $\mathbf{10^2}$. Para el número 100 en suma de producto de base 10 escribimos:

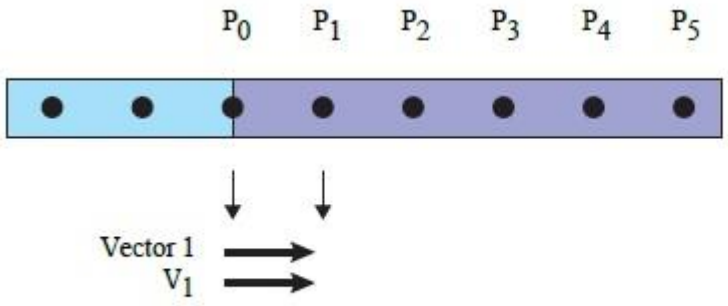
El número $\mathbf{100 = 1 * 10^2 + 0 * 10^1 + 0 * 10^0}$ en suma de productos de base 10, se lee 1 por 10 a la 2 más 0 por 10 a la, 1más 0 por 10 a la 0, o simplemente 10 a la 2. Otras formas de lectura es un paquete de 100 más cero paquetes de 10, más 0 (cero) paquetes sueltos.

El número **105** lo podemos descomponer así: $\mathbf{105 = 1* 10^2 + 0*10^1 + 5*10^0}$

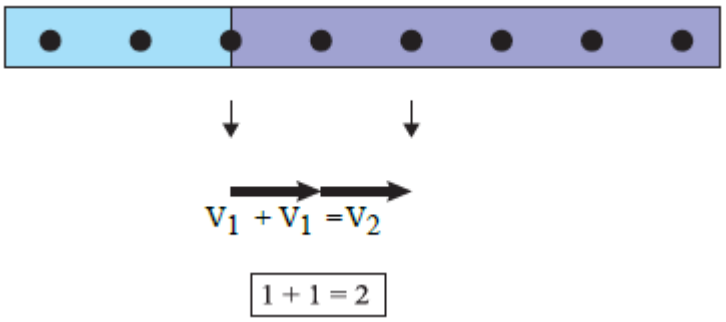
4.6 SUMA DE VECTORES Y SEGMENTOS NATURALES

Para la suma de vectores se da igual manejo que para la suma de segmentos lo cual no quiere decir que en el aula de clase se omita sumar segmentos. Es fundamental entender que la suma de segmentos, la de vectores, la de puntos y números naturales es una **operación binaria**,[21] lo cual me ordena que solo pueda sumar dos y solo dos vectores y obteniendo como resultado un solo vector, dos segmentos y obtengo como resultado un solo un segmento, dos números y obtengo como resultado un solo número y dos puntos obteniendo como resultado un solo punto.

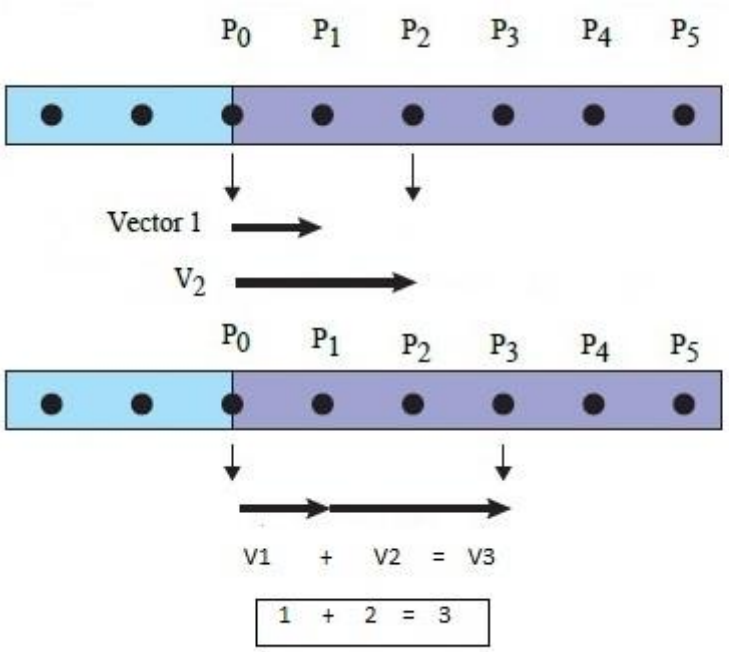
Para construir la tabla de sumar del (uno) 1, se puede iniciar sumando (V1 + V1) en la regla bicolor con material real en este caso con los vectores que se han construido, luego realizamos la **traslación hacia la derecha** del segundo vector hasta donde termina el primer vector formándose un nuevo vector y solo uno que empieza en el punto cero y termina en el punto 2.



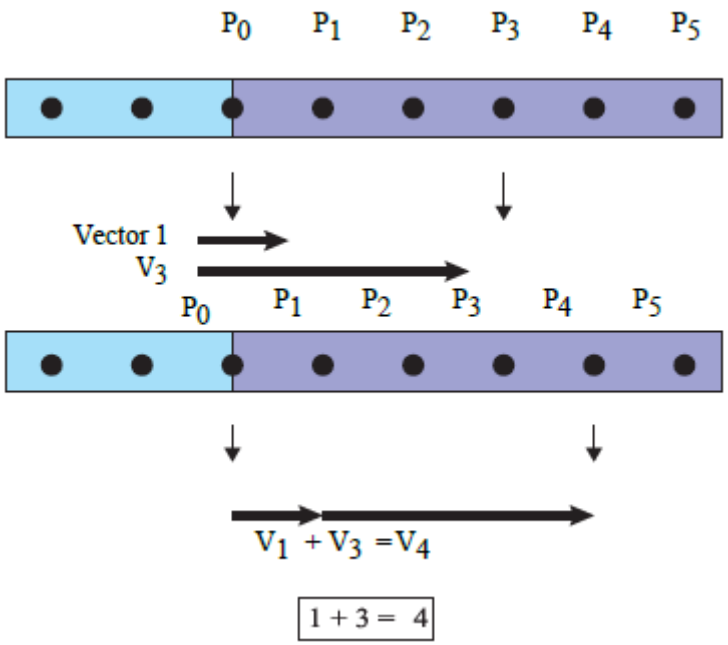
[21] Operación binaria se hace entre dos elementos del mismo conjunto y produce uno de los mismos elementos.



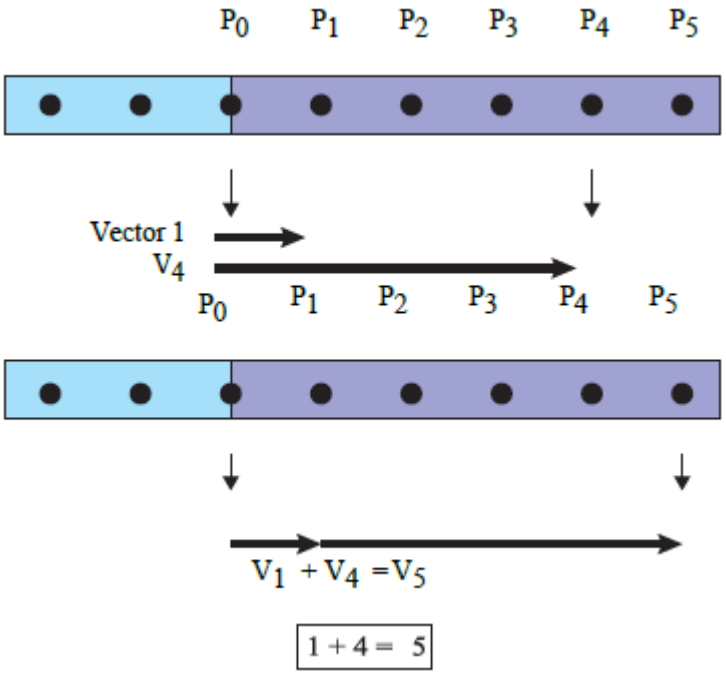
Realicemos la suma de V1 + V2 = V3 en la regla bicolor con material real en este caso los vectores que ellos han construido, luego realizamos **la traslación hacia la derecha** del segundo vector hasta donde termina el primer vector formándose un nuevo vector para el caso el nuevo vector empieza en el P0 y termina en el P3.



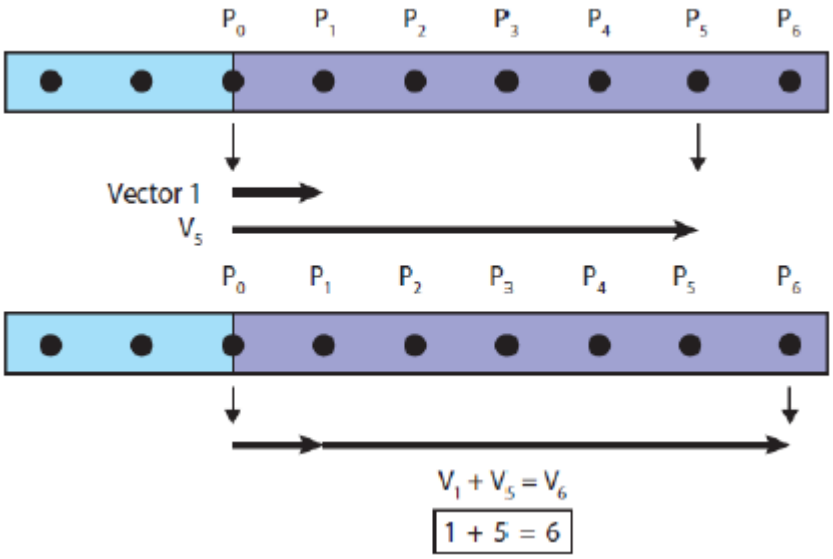
Ahora sumar V1 + V3 = V4 en la regla bicolor con material real en este caso los vectores que ellos han construido, luego realizamos **la traslación hacia la derecha** del segundo vector hasta donde termina el primer vector formándose un nuevo vector para el caso el nuevo vector empieza en el P0 y termina en el P3.



Sumar V1 + V4 = V5 en la regla bicolor con material real en este caso los vectores que ellos han construido, luego realizamos **la traslación hacia la derecha** del segundo vector hasta donde termina el primer vector formándose un nuevo vector para el caso el nuevo vector empieza en el P0 y termina en el P3.



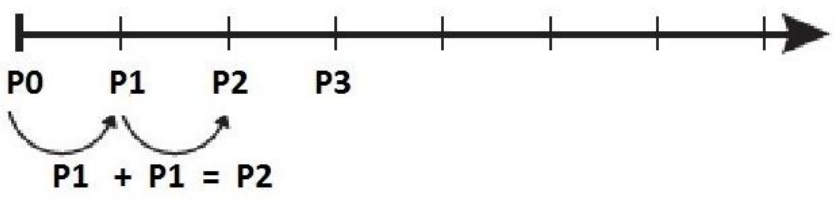
Luego se suma V1 + V5 = V6 en la regla bicolor con material real en este caso los vectores que ellos han construido, luego realizamos **la traslación hacia la derecha** del segundo vector hasta donde termina el primer vector formándose un nuevo vector para el caso el nuevo vector empieza en el P0 y termina en el P3.



De forma similar realizamos las demás sumas. La suma de V1 con V9 por ultimo para construir la tabla de sumar del uno. Para construir el resto de tablas de sumar se realiza de la misma forma hasta construir la tabla de sumar del 9 o hasta donde el maestro del curso lo desee. La construcción de las tablas de sumar se realiza aquí con la geometría de vectores articulándola con la aritmética.

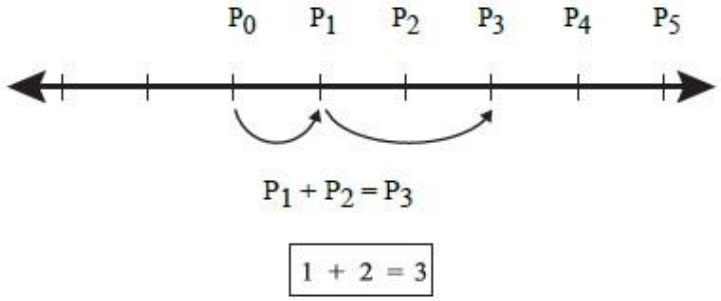
4.7 SUMA DE PUNTOS NATURALES

En la regla bicolor con una plastilina o una estrellita señalamos el punto que necesitemos señalar en la regla. Empezamos con la suma de (P1 + P1), partiendo siempre del punto origen contamos un punto **hacia la derecha,** estando en este punto nos trasladamos un punto **más hacia la derecha**, de esta manera el punto ahora estará ubicado en el P2, hasta donde llegó luego de sumar P1 más P1.



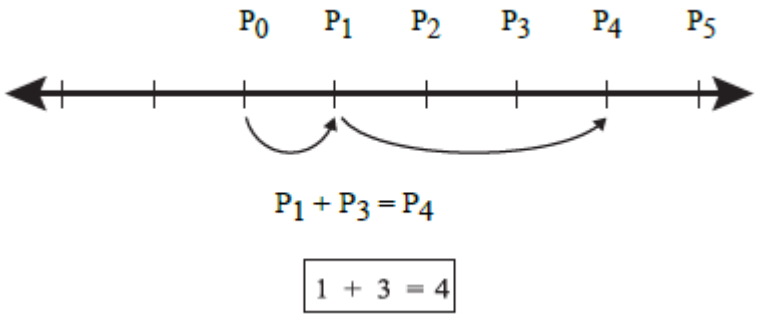
Usando la regla bicolor con una plastilina o una estrellita, seguimos con la suma de P1 + P2, partiendo siempre del **punto origen** contamos 1 punto **hacia la derecha,** estando en este punto sumo 2 puntos, nos trasladamos 2 lugares o puntos **más hacia la derecha**, de esta manera el punto ahora estará ubicado en el P3, hasta donde llegó luego de sumar P1 más P2.

P1 + P2 = P3 (decimos P1 más P2 es igual al P3)



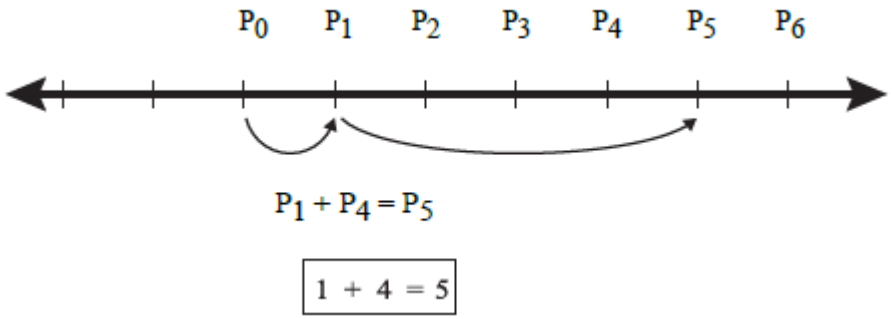
Usando la regla bicolor con una plastilina o una estrellita, seguimos con la suma de P1 + P3, partiendo siempre del **punto origen** contamos 1 punto **hacia la derecha,** estando en este punto sumo 3 puntos, nos trasladamos 3 lugares o puntos **más hacia la derecha**, de esta manera el punto ahora estará ubicado en el P4, hasta donde llegó luego de sumar P1 más P3.

P1 + P3 = P4 (decimos P1 más P3 es igual a P4)



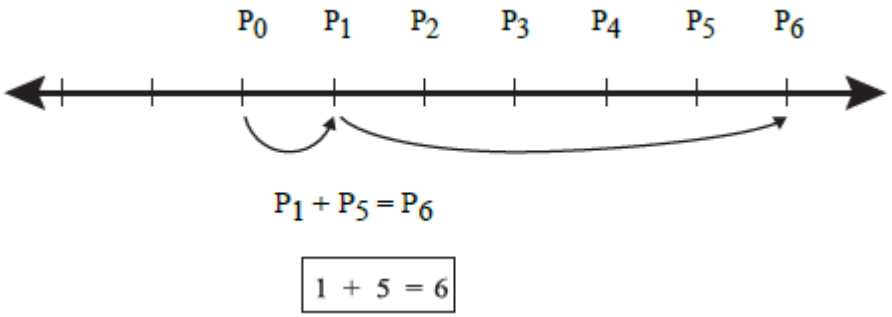
Usando la regla bicolor con una plastilina o una estrellita, seguimos con la suma de P1 + P4, partiendo siempre del **punto origen** contamos 1 punto **hacia la derecha,** estando en este punto sumo 4 puntos, nos trasladamos 4 lugares o puntos **más hacia la derecha**, de esta manera el punto ahora estará ubicado en el P5, hasta donde llegó luego de sumar P1 más P2.

P1 + P4 = P5 (decimos P1 más P4 es igual a P5)



Usando la regla bicolor con una plastilina o una estrellita, seguimos con la suma de P1+ P5, partiendo siempre del **punto origen 1 nos trasladamos hacia la derecha,** estando en este punto sumo 5 puntos, nos trasladamos 5 lugares o puntos **más hacia la derecha**, de esta manera el punto ahora estará ubicado en el P6, hasta donde llegó luego de sumar P1 más P5.

P1 + P5 = P6 (leemos P1 más P5 es igual a P6)

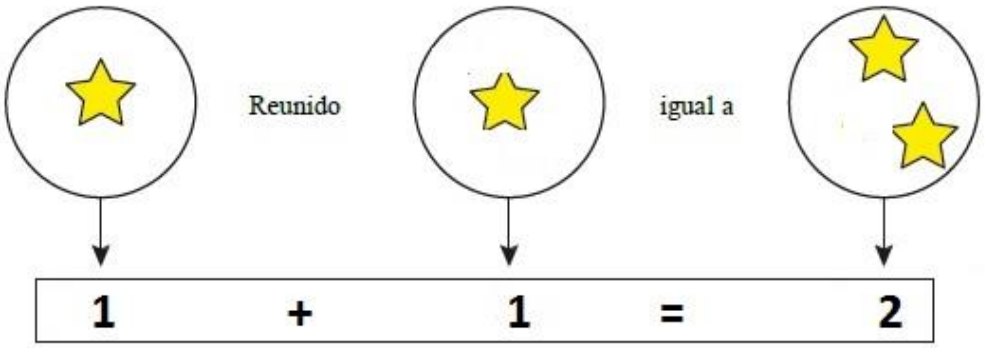


Con la suma de puntos elaboramos hasta la tabla de sumar del 9. De esta forma la metodología de Matemática Articulada construye las tablas de sumar, partiendo desde la geometría de los puntos articulándola con la aritmética.

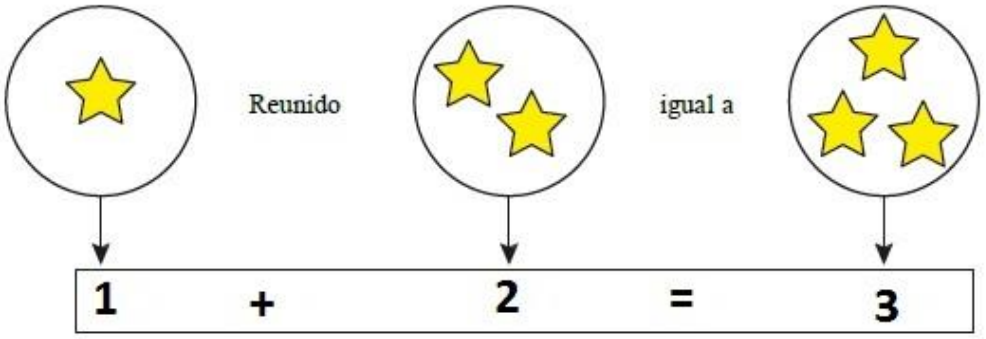
4.8 REUNIÓN O UNIÓN DE CONJUNTOS DISYUNTOS Y SUMA DE NÚMEROS NATURALES.

La reunión o unión de conjuntos disyuntos nos permite articular los conjuntos con la suma en la aritmética mediante la función cantidad (Escobar, 2012c). Desde aquí también construimos las tablas de sumar. Empecemos con las tablas de sumar del uno.

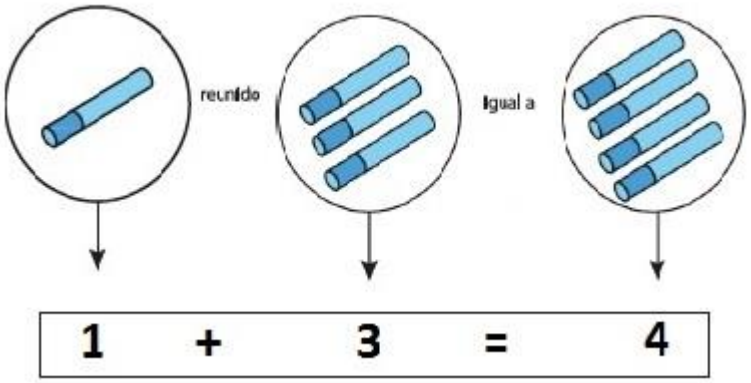
Cuando vamos a realizar unión o reunión de conjuntos, se construyen los dos conjuntos y luego realizan la unión obteniendo el conjunto unión, con esto vemos que la unión o reunión de conjuntos es también una operación binaria. Empecemos haciendo la unión entre 2 conjuntos y cada uno con un elemento. Así se inicia la construcción de las tablas de sumar.



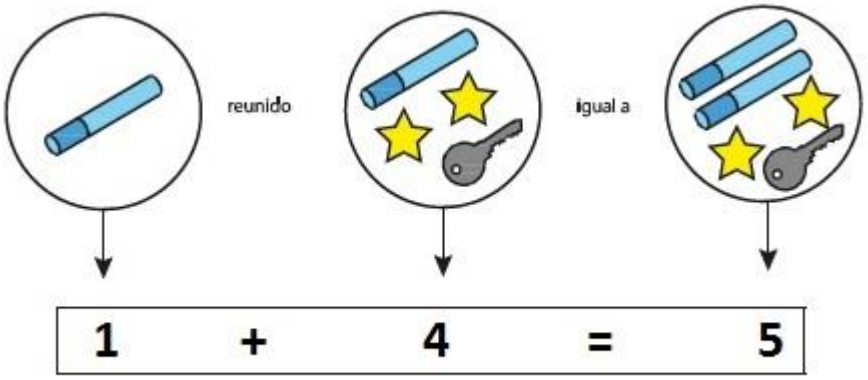
De la misma manera ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 2 elementos que nos da igual a un conjunto con 3 elementos.



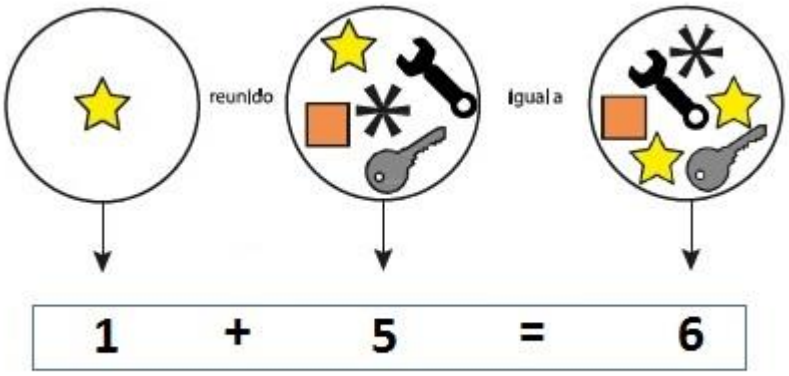
De la misma manera ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 3 elementos que nos da como resultado un conjunto con 3 elementos.



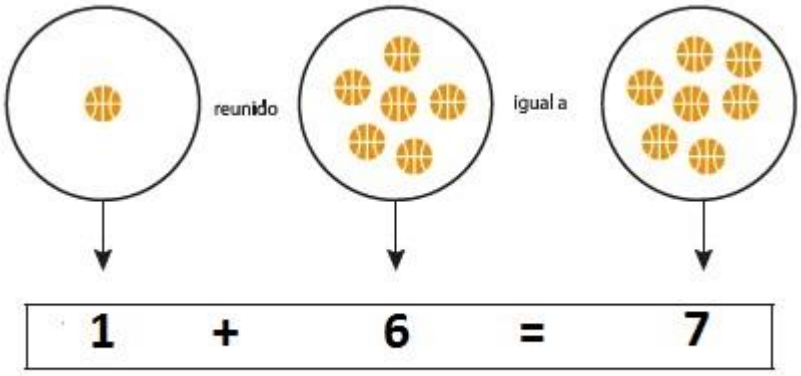
Sigamos construyendo la tabla de sumar del uno. Hagamos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 4 elementos que nos da como resultado un conjunto con 5 elementos.



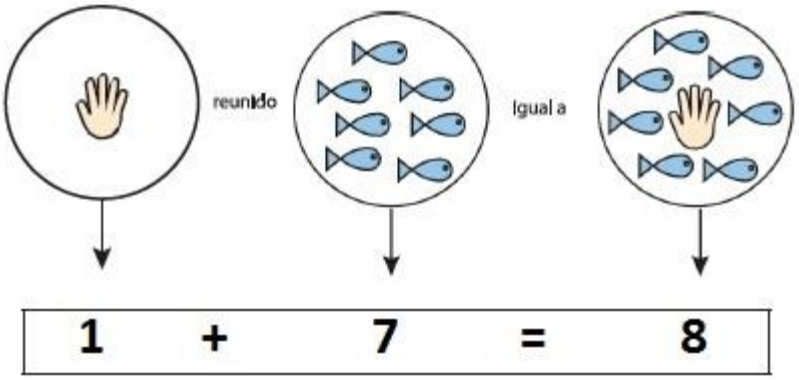
De la misma manera ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 5 elementos que nos da como resultado un conjunto con 6 elementos.



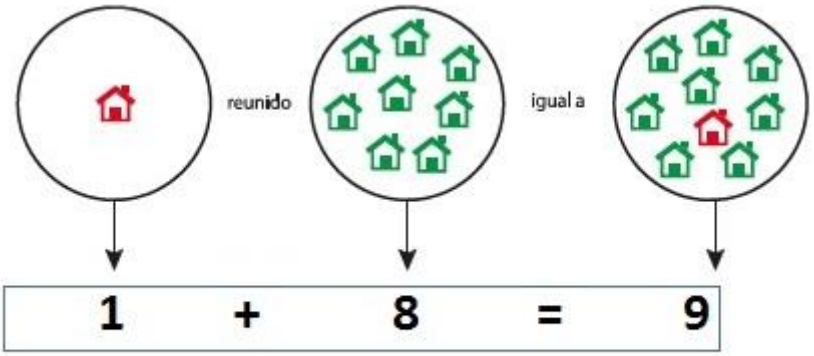
De la misma manera ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 6 elementos que nos da como resultado un conjunto con 8 elementos.



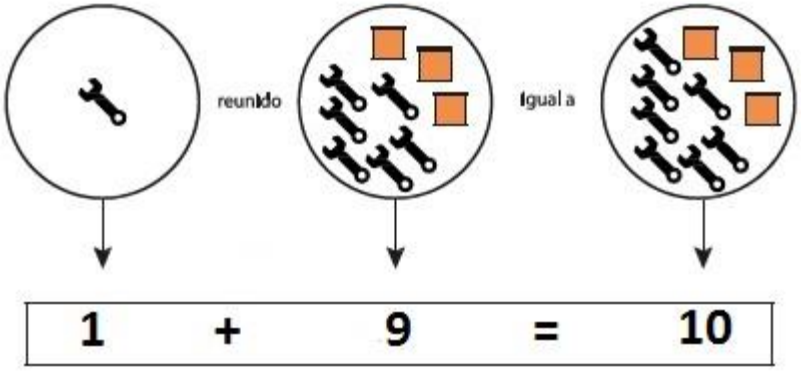
Ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 7 elementos que nos da como resultado un conjunto con 8 elementos.



De la misma manera ahora seguimos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 8 elementos que nos da como resultado un conjunto con 9 elementos.



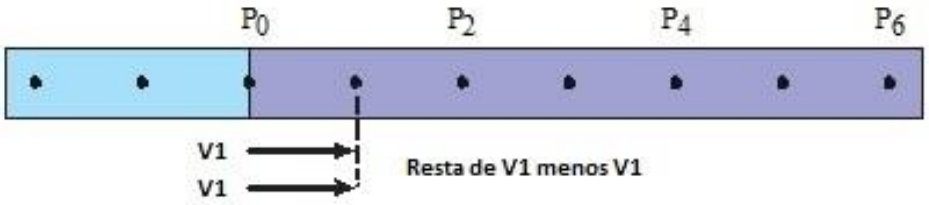
Continuemos construyendo la tabla de sumar del uno. Hacemos la unión de un conjunto con 1 elemento y otro con 8 elementos que nos da como resultado un conjunto con 9 elementos.

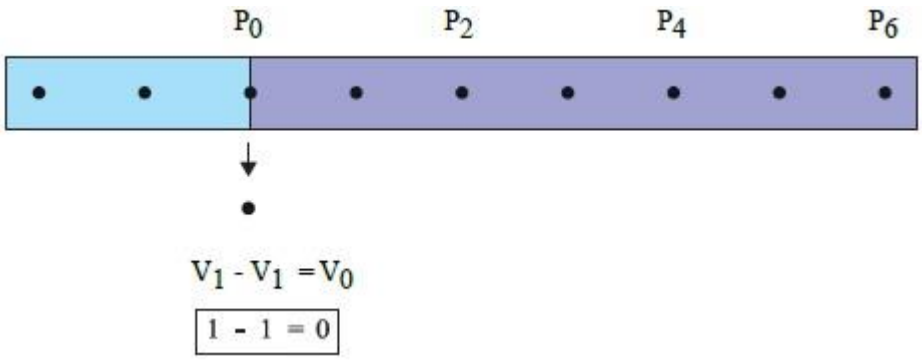


Hemos construido las tablas de sumar de los números naturales usando los segmentos, los vectores, los puntos, los números y la reunión de conjuntos. Las tablas de sumar de cuatro formas diferentes desde la geometría hasta llegar a la aritmética.

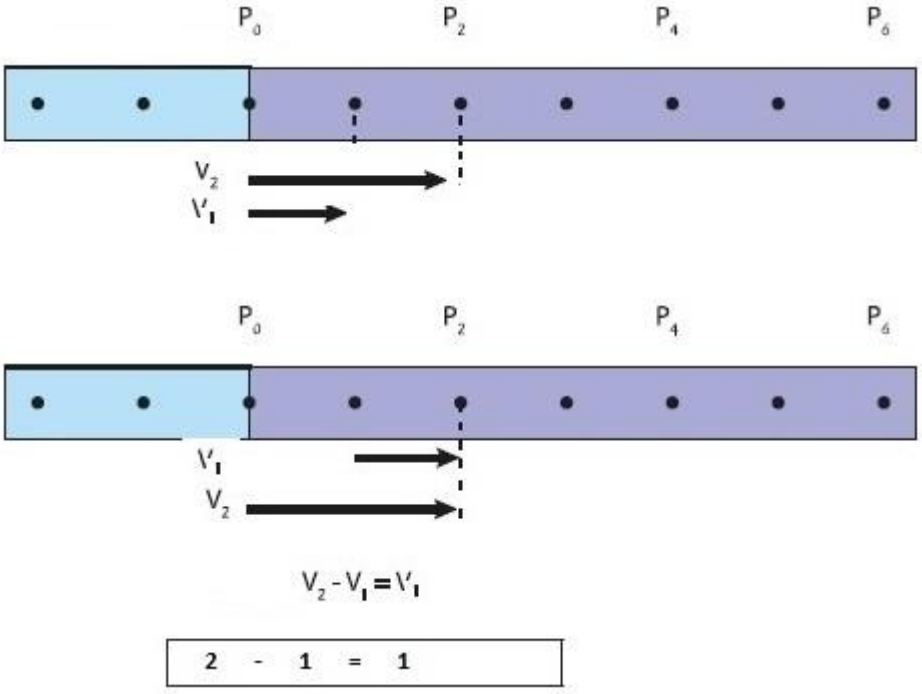
4.9 RESTA DE SEGMENTOS Y VECTORES NATURALES

Para sumar vectores (vectores y segmentos tienen igual manejo al usar la traslación en la recta) hicimos uso de la traslación hacia la derecha, para restar vectores también usamos la traslación. Para restar por ejemplo (V1 – V1) recordemos que los vectores inician en el P0, luego trasladando el segundo vector (vector sustraendo) hasta donde termina el primer vector (minuendo) haciendo que coincidan el punto final del primer vector (minuendo) y elpunto final del segundo vector (sustraendo). El resultado de la resta (diferencia) de vectores es la parte del minuendo que no queda cubierto con el segundo vector o sustraendo. De esta manera V1 – V1 = V0.



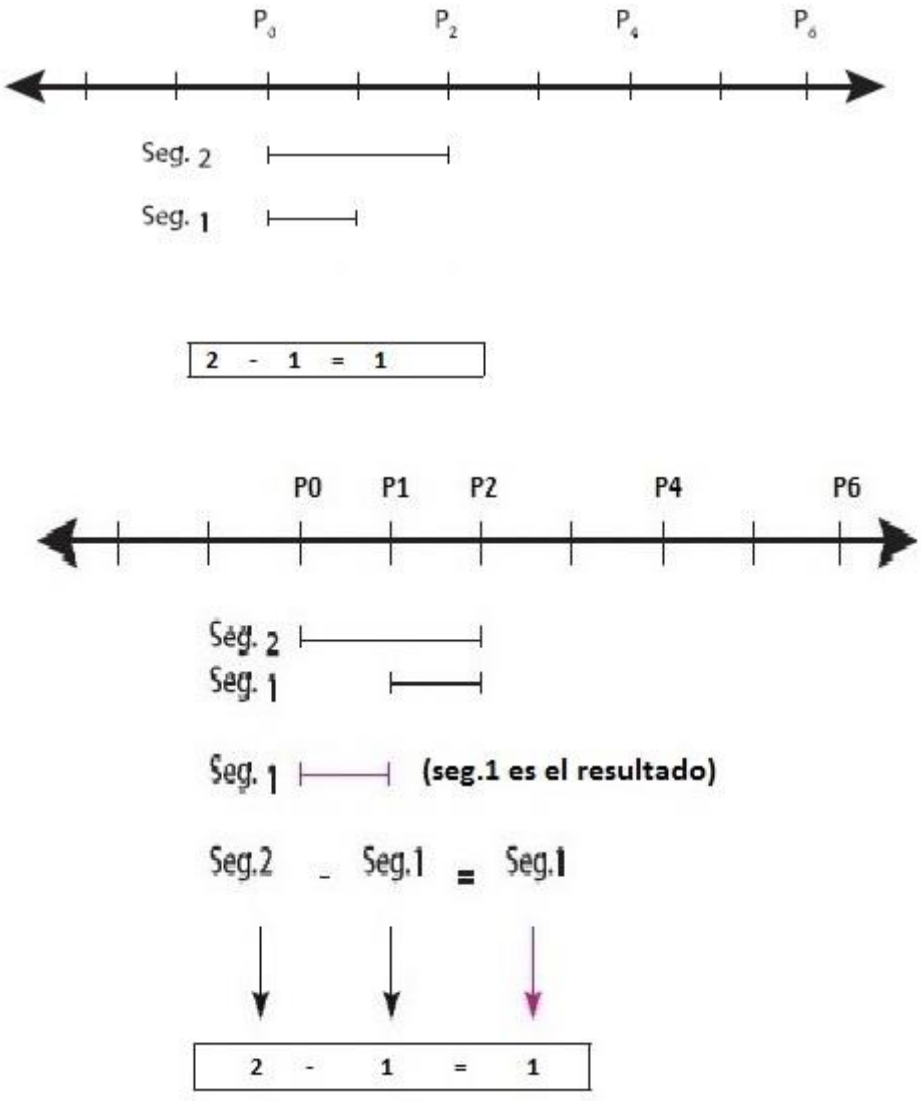


También de igual forma podemos realizar la resta de V2 – V1 trasladando el segundo vector hasta donde termina el primer vector haciendo que coincidan el punto final del primer vector (minuendo) y el punto final del segundo vector (sustraendo). El resultado de la resta (diferencia) de vectores es la parte del minuendo que no queda cubierto con el segundo vector o sustraendo. De esta manera V2 – V1 = V1. Tenemos que V2 es minuendo. V1 sustraendo y V1 la diferencia.



Procedemos de forma similar a elaborar las demás **restas de vectores naturales** hasta construir las tablas de restar usando la función longitud.

La resta de segmentos se realiza de igual forma trasladando el segundo segmento (sustraendo) hasta donde termina el primer segmento (minuendo) y la parte del segmento (minuendo) que no queda cubierto es el resultado (diferencia). Por ejemplo seg 2 – seg1 = seg1.

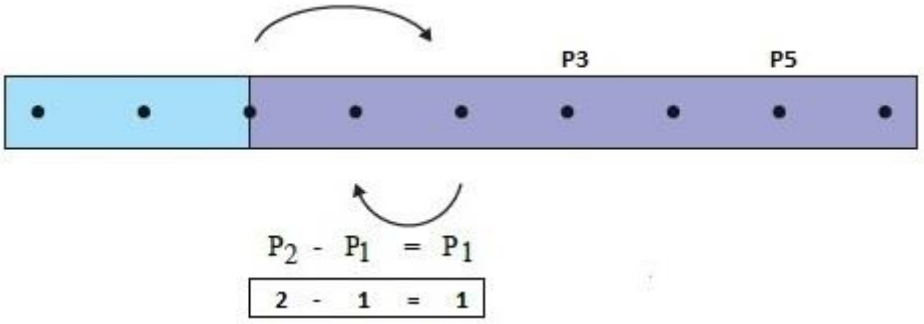


Con los vectores y segmentos se construyen las tablas de restar generalmente hasta el número 9. Aquí usamos la función cantidad para elaborar las tablas de restar desde la geometría hacia la aritmética.

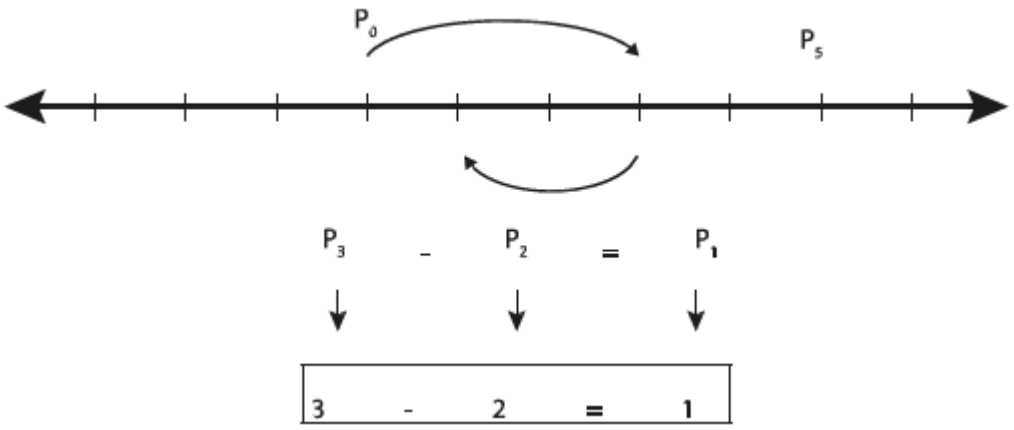
4.10 RESTA DE PUNTOS NATURALES

La resta de puntos se realiza usando la función posición y usando la traslación a la izquierda. Como material de apoyo pedagógico se usa la regla bicolor y la cinta de modistería. Podemos construir las tablas de restar con puntos. Por ejemplo, empezando con P2 – P1

Se traslada desde el P0 dos unidades hacia la derecha y se ubica en el P2 (minuendo), luego, estando allí se traslada hacia la izquierda un punto (se resta un punto. Sustraendo) ubicándose en el P1, el cual es el resultado (diferencia). Podemos concluir que P2 – P1 = P1



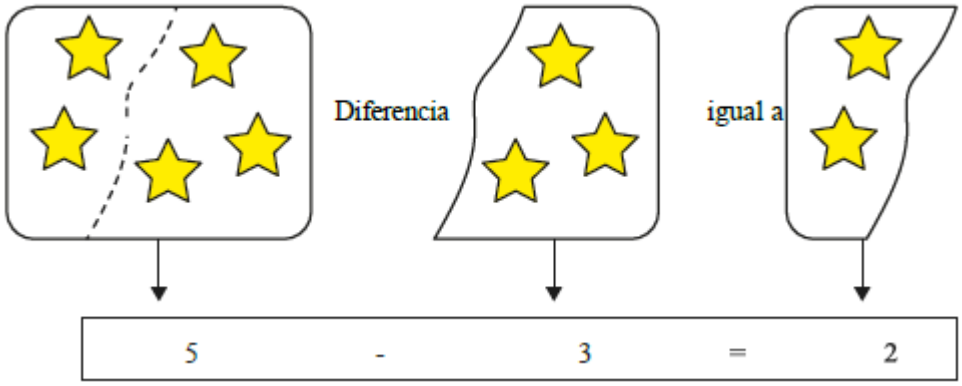
Se realiza de forma similar otras restas de puntos como P3 – P2. Se traslada desde el P0 tres puntos hacia la derecha y se ubica en el P3 (minuendo), luego, estando allí, se traslada hacia la izquierda dos puntos (se resta dos puntos. Sustraendo) ubicándose en el P1, el cual es el resultado (diferencia). Podemos concluir que P3 – P2 = P1.



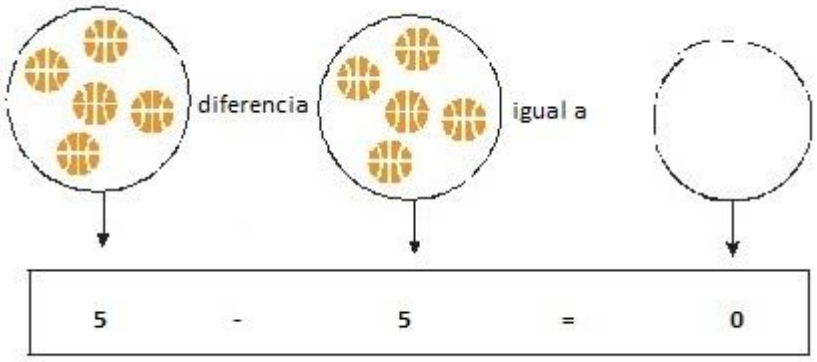
De la misma forma se realizan las demás restas de puntos para completar las tablas de restar. Generalmente las realizamos hasta la tabla del 9.

4.11 DIFERENCIA DE CONJUNTOS

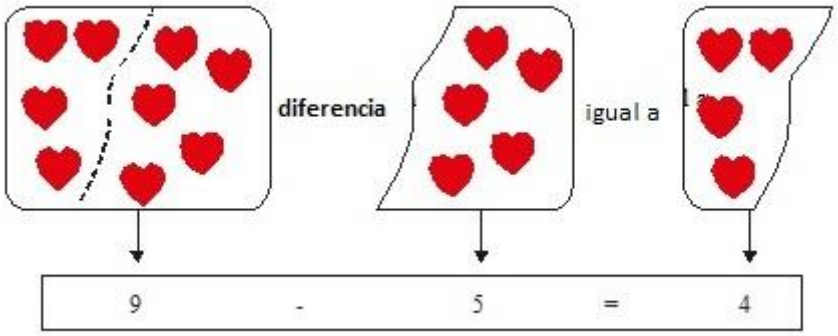
La operación diferencia de conjuntos aquí se realiza entre un conjunto y un subconjunto de él. Es decir a un conjunto le quitamos un pedazo de él. Esta operación la articulamos a la resta de números naturales. Realicemos la diferencia entre el conjunto con 5 elementos y un subconjunto de 3 elementos. Luego la articulamos con la resta de números.



Realicemos la diferencia de conjuntos entre un conjunto de 5 elementos y su subconjunto de 5 elementos cuya diferencia es igual a cero (0).



Otra diferencia de conjuntos puede ser por ejemplo entre un conjunto de 9 elementos y un subconjunto con 5 elementos, dando como resultado un conjunto de 4 elementos.

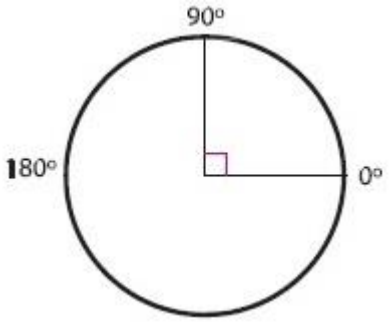


Usando la misma forma de diferencia de conjuntos se construyen las tablas de restar en los Naturales.

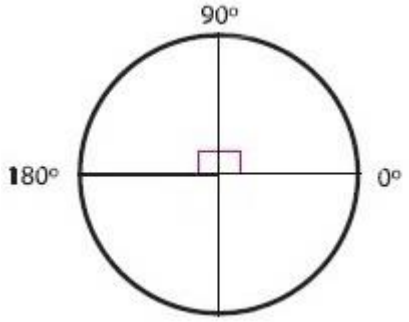
4.12 EL CONJUNTO DE LOS ENTEROS

Construido los conjuntos de los Naturales (vectores naturales, segmentos naturales, puntos naturales, cantidades y números naturales) se da inicio a la construcción de los **conjuntos de los números enteros** y las operaciones suma y resta.

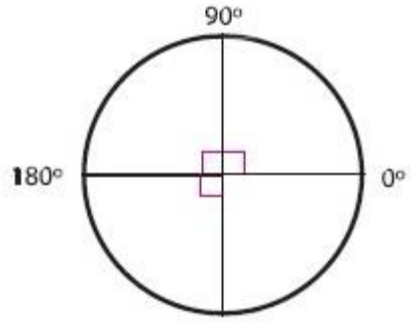
El círculo se forma por el barrido que hace un segmento o un vector, con un punto fijo o centro de rotación. El giro completo de rotación tiene un valor de 360°. El **ángulo recto** tiene un valor de 90°. El ángulo formado por 2 ángulos rectos mide 180°, el ángulo formado por 3 ángulos rectos mide 270° y el ángulo formado por 4 ángulos rectos mide 360°. Gráficamente los representamos así:



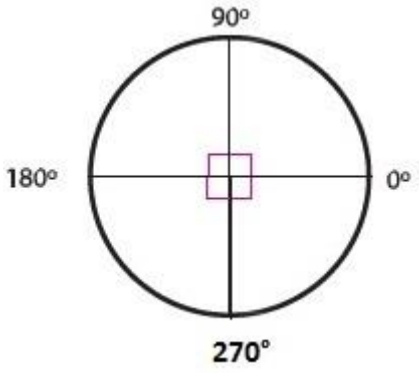
En la anterior gráfica se muestra un ángulo recto inscrito formando un ángulo de 90°.



El anterior gráfico representa un ángulo de 180° que está compuesto por 2 ángulos rectos.



En el gráfico anterior se muestra tres ángulos rectos inscritos, los 3 forman un ángulo de 270°.



Se muestra en el gráfico anterior cuatro ángulos rectos que forman una vuelta o giro completo de 360°. El círculo consta de 4 ángulos rectos.

4.13 LA FUNCIÓN ROTACIÓN

Un diámetro de la circunferencia es por ejemplo el segmento que une el punto que indica 0° con el punto que indica 180°, pasando por el centro de la circunferencia y este es coincidente con el **eje X** (recta horizontal), pero también el punto origen (P0) de este eje X coincide con el centro de la circunferencia, permitiendo que de esta manera la circunferencia sirva de referente y punto de rotación, de este modo podemos rotar vectores 180° o media vuelta y rotar vectores 360° o una vuelta completa. Cuando un vector o segmento se rota media vuelta iniciando el giro desde cero grados, el vector cambia de sentido, pasando de sentido derecho, hacia sentido izquierdo. También si la recta es vertical cuando damos 1/2 vuelta el vector de sentido hacia arriba cambiará el sentido hacia abajo. Por ejemplo rotemos el V2 ½ vuelta, matemáticamente se escribe así: R ½ (V2) = V–2 = –V2. El signo (–) significa con sentido izquierdo.

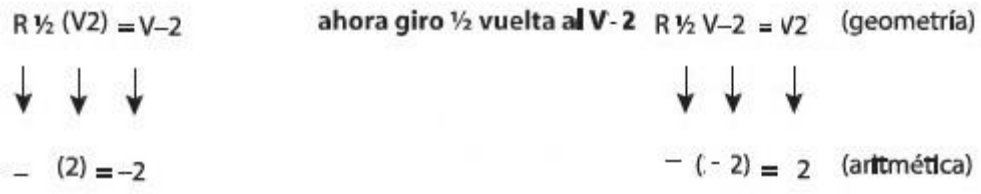
$$R\tfrac{1}{2}(V2) = V{-}2 \quad \text{(geometría)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$-(2) = -2 \quad \text{(aritmética)}$$

El conjunto de vectores y segmentos enteros se forman mediante la rotación de media vuelta (función rotación ½ vuelta). Pero también podemos rotar una vuelta completa al V2 así:

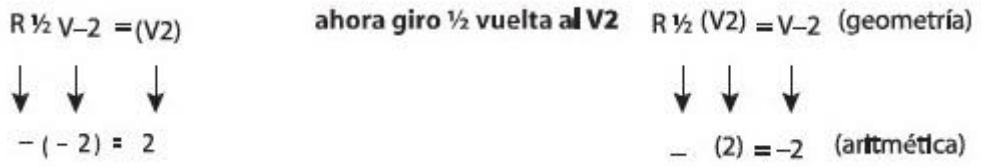
R ½ (V2) = V–2 Primero ½ vuelta al V2 y luego la otra ½ vuelta al resultado que es V-2, R ½ (V–2) = V2.



Como puede observarse al realizar la operación de una **vuelta completa** el V2 no cambia el sentido derecho, lo conserva.

Ahora donde terminan los vectores de sentido izquierdo se ubican los puntos enteros (lado izquierdo del P0) como es P–1, P–2, P–3 etc. Ahora tenemos un conjunto de puntos a la izquierda del punto cero (P0) o punto origen, la unión de los puntos de la izquierda del P0, con los puntos naturales, unidos con el punto cero forman el **conjunto de puntos enteros**.

La rotación de una vuelta completa a un vector que tenga sentido izquierdo, hace que este vector conserve su sentido izquierdo. Por ejemplo rotemos el vector V–2, ½ vuelta.

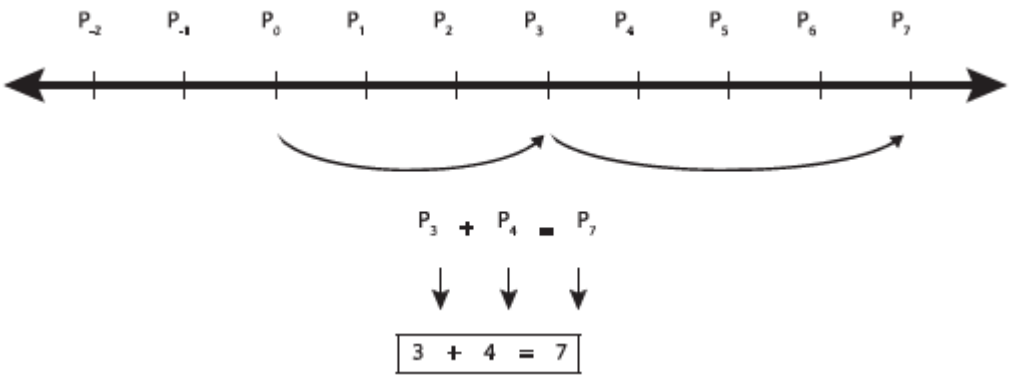


Las cantidades negativas no existen en matemática, puesto que los Enteros negativos no son imágenes de conjuntos, sino de objetos geométricos como los vectores, los segmentos y los puntos. Por lo tanto, los Enteros solo existen como imágenes de conjuntos de vectores enteros, de segmentos enteros, y de puntos enteros.

4.14 SUMA DE PUNTOS ENTEROS

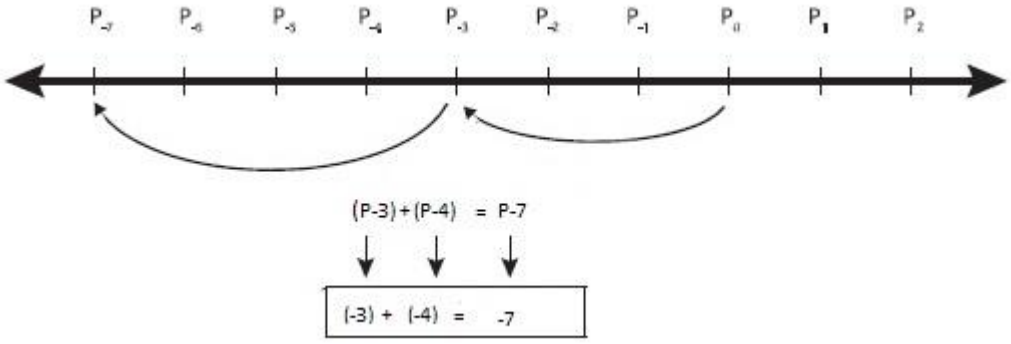
Realicemos los siguientes ejemplos, con suma de puntos enteros.

La suma de dos puntos enteros ubicados hacia la derecha del P0, de los cuales diremos en adelante que si **cualquier punto está a la derecha del P0 es un punto positivo, entonces sumemos P3+ P4 (**Escobar, 2012c, p. 126-127)



Para sumar P3 + P4 hago primero la traslación desde el P0 hasta el P3, luego desde ese punto me traslado cuatro puntos más a la derecha, hacia la derecha de este punto (P3); reitero hacia la derecha en la recta geométrica (color verde de la regla bicolor), el resultado se obtiene al contar desde el P0 hasta el P7, contando 7 puntos. El P7 es un punto entero. El resultado es un punto entero ubicado a la derecha del P0. Ahora refiriéndonos a la suma de números enteros decimos que **al sumar dos números enteros positivos el resultado será otro número entero positivo.**

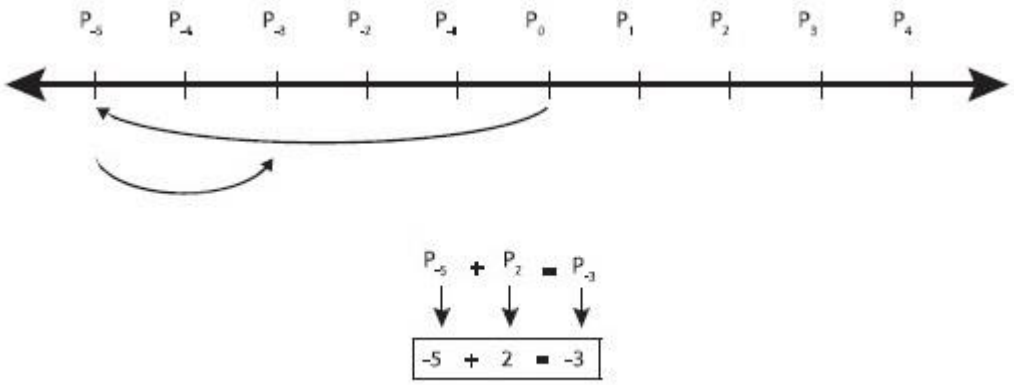
Sumemos ahora dos puntos enteros que estén a la izquierda del P0, de los cuales diremos de ahora en adelante que **son puntos negativos por estar a la izquierda de P0 en la recta geométrica (color rojo de la regla bicolor)**. Los siguientes puntos son negativos y realizaré una suma con ellos. (**P–3) + (P–4)**



Al sumar el **P–3 = –P3**, damos inicio al trasladar desde el punto origen hacia la izquierda 3 unidades y estando allí nos trasladamos 4 unidades más hacia la izquierda, quedando ubicados en el P7, a la izquierda del P0 o P–7, siendo este el resultado. Ahora haciendo uso de la función posición, esta se relaciona con **la suma de números enteros y podemos concluir que cuando se suman dos números negativos** el resultado será un número entero negativo.

Sumemos un punto entero negativo y otro punto entero positivo. Ejemplo P–5 + P2. Desde

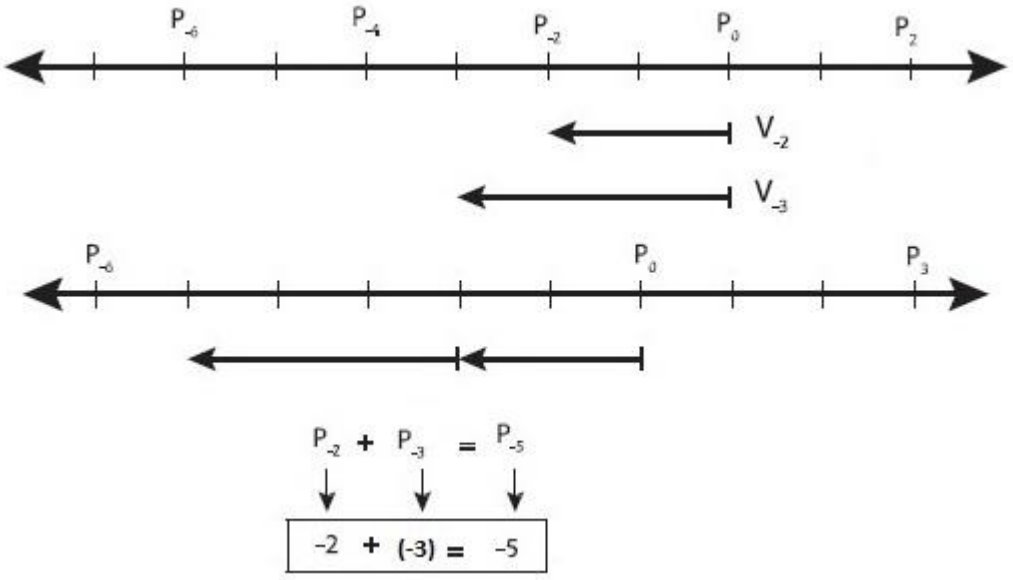
el P0 nos trasladamos hacia la izquierda 5 unidades y estando allí nos trasladamos 2 unidades a la derecha, quedando finalmente ubicado en el P3 a la izquierda de P0. Entonces decimos que el resultado es P–3. Al relacionar a través de la función posición la suma de puntos enteros con la suma de números enteros concluimos que (–5) + (2) = –3.



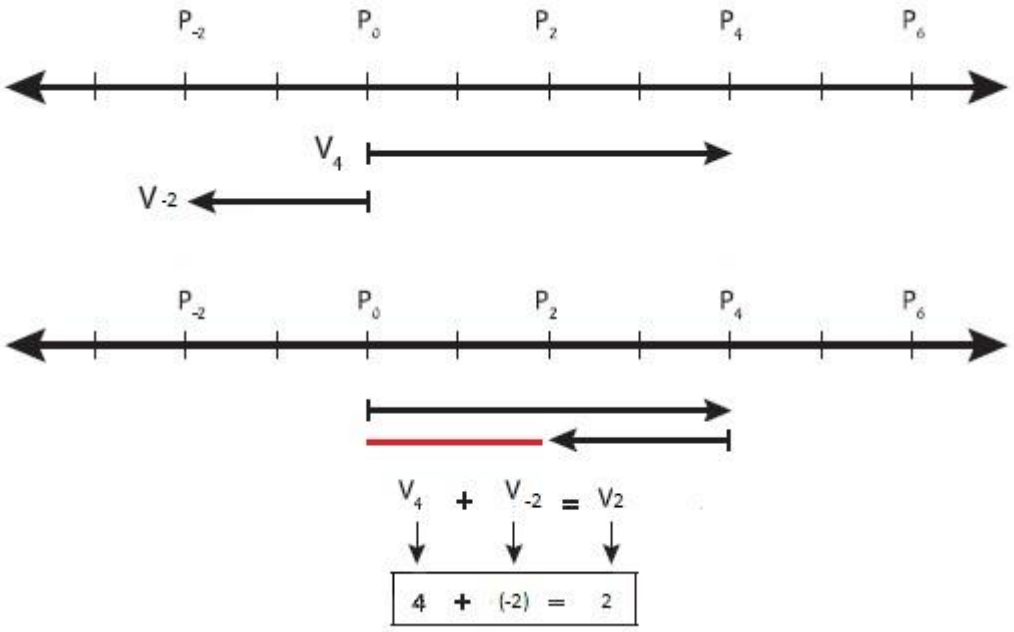
4.15 SUMA DE VECTORES ENTEROS

Realicemos la suma de V–2 y V–3 **(V-2 + V-3).** Todos los vectores geométricos inician en el P0, ubicamos el V–2 con sentido izquierdo y también el V–3. Siempre se traslada el segundo vector, en este caso se traslada el V–3 hasta donde termina el V–2, allí empezará el V–3.

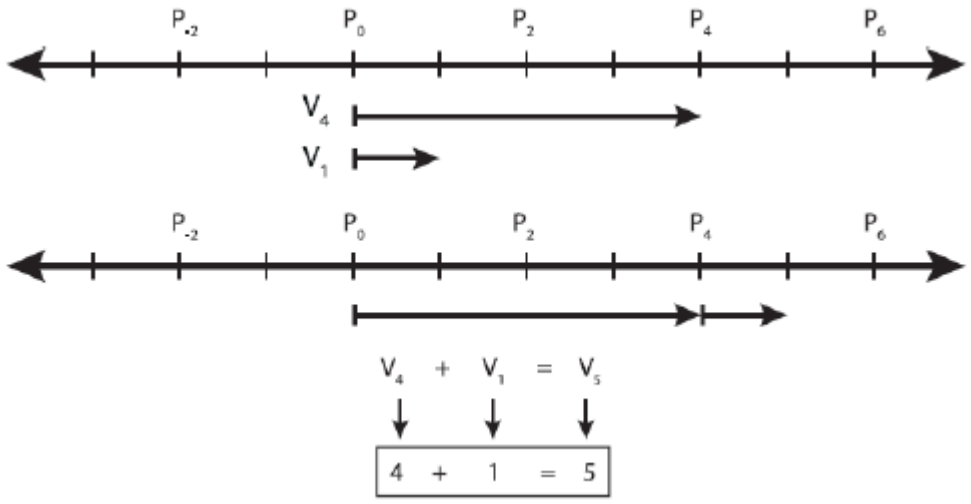
El resultado es un nuevo vector que empieza en P0 y termina en P–5 o 5 unidades a la izquierda. Articulando la suma de vectores con la aritmética por medio de la función longitud–sentido, podemos decir:



Ahora sumemos los vectores V4 + (V–2). Todos los vectores geométricos inician en P0. Trasladamos el segundo vector en este caso el V–6 hasta donde termina el V4, allí empezará el V–6. La parte del vector de mayor longitud en este caso V–2 cubrirá al V4 sobraran 2 unidades con dirección izquierda, el cual es el resultado de la suma de los dos vectores con sentidos contrarios.



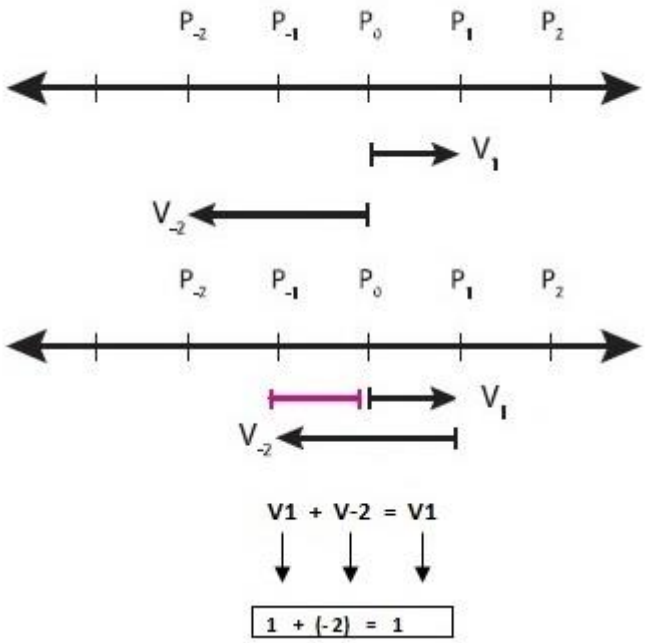
Tomemos otro ejemplo, también podemos sumar V4 con V1. Los dos vectores tienen sentido positivo, van hacia la derecha del P0. Trasladamos el segundo vector V1, hasta donde termina el primer vector V4 formando un nuevo vector que empieza en P0 y termina en P5.Mediante la función longitud relacionamos los vectores con la aritmética.



=

En este caso de V4 + V1 estamos sumando ambos vectores de sentido derecho, los cuales son vectores naturales, lo cual ya lo habíamos realizado.

Realicemos otro ejemplo: Sumar el V1 + (V-2). Dejamos al lector su interpretación.



Los segmentos naturales los pensamos ahora como vectores entonces con sentido derecho, por eso seg3 = seg+3, seg0 = seg+0 y así sucesivamente.

En los Enteros, se ha sumado puntos enteros, vectores enteros, segmentos enteros, y números enteros. También realizamos la unión de conjuntos y diferencia de conjuntos articulándolos con la suma y la resta de enteros. Recordando que cantidades negativas no existen en matemática.

CAPITULO V. MÉTODO

En la mayoría de las ciencias una generación destruye lo que otra ha construido y lo que una ha establecido otra lo deshace. Sólo en matemáticas cada generación añade un piso nuevo a la antigua estructura. Hermann Henkel

5.1 TIPO DE ESTUDIO

Este trabajo de investigación se desarrolló con un enfoque cualitativo y un diseño no experimental, en la investigación observé los fenómenos tal como se dieron en su contexto natural, sin manipularse y se obtienen luego de sucedidos los hechos, recolectando información y luego realizando su análisis cuantitativo con el uso de encuestas. La investigación se inscribe en una de tipo transeccional porque en ella recolecté los datos en un único momento. La investigación siendo transeccional es de tipo correlacional debido a que se describen relaciones causales entre las variables. Con método correlacional, el *propósito* es medir el grado de relación que exista entre los conceptos o variables de los números enteros y las operaciones suma y resta, el cual puede ser positiva o negativa. También los estudios correlacionales se distinguen de los descriptivos principalmente en que, mientras éstos se centran en medir con precisión las variables individuales.

Esta es una investigación de tipo cualitativa y su metodología intenta acercarse al conocimiento de la realidad sobre la enseñanza de la suma y la resta en los enteros a través de la observación y análisis hechos por los valores obtenidos en encuestas realizadas. El objetivo no es centrarse únicamente en el acto de conocer de los obstáculos sobre la enseñanza de la suma y la resta sino que el centro de interés se desplaza con esta metodología a transformar e intervenir para buscar una nueva realidad. Otra de las connotaciones de la investigación cualitativa es que posee una concepción y una dinámica que admite la subjetividad del investigador y esta subjetividad tiene un papel fundamental en los resultados y conclusiones, la investigación cualitativa tiene su énfasis en la construcción y en el modelo de aplicación de la metodología, el contexto y la cultura son parte fundamental de los resultados.

5.2 METODOLOGÍA

La investigación se realizó en dos conjuntos, uno el de maestros y otro de estudiantes. El conjunto de maestros contenía dos subgrupos, uno con maestros de primaria ubicado en el municipio de Palmira en la institución educativa Antonio Lizarazo del barrio Coronado de estrato 1 y 2. La institución tiene hombres y mujeres en jornadas de mañana y tarde. La fundación Manuelita como parte del ingenio azucarero y que se encuentra en el área de influencia de la institución junto a la alcaldía de Palmira vienen realizando un acompañamiento a la institución educativa de apoyo en la remodelación de la planta física y de apoyo a las áreas académicas por el mejoramiento cualitativo de los procesos educativos. Desde ese eje desarrollamos como red de Matemática Articulada un acompañamiento para implementar la metodología en los procesos de enseñanza en la institución. Se trabaja con los maestros de primaria en un primer momento por espacio de 40 horas de conceptualización y conocimiento de la metodología y 40 horas de acompañamiento en el aula. Este taller tuvo dos momentos, el primero se da con los 3 textos de Matemática Articulada que abarcan primaria y un segundo momento para los licenciados que abarca 6 textos. Realizo una encuesta para quienes habían participado el taller con los tres textos iniciales al final del primer momento de los talleres. Se encuestaron un total de 24 maestros.

El segundo subgrupo de maestros se ubica en el colegio Marino Rengifo Salcedo del corregimiento de El Cabuyal, en el municipio de Candelaria. Estrato 1 y 2. Hay niños de ambos sexos y las jornadas son de mañana y tarde. La institución se encuentra en el área de influencia del ingenio Mayagüez y es su fundación la que apoya la actualización de los maestros con talleres que propenden por mejoras cualitativas de los procesos de enseñanza. Los talleres incluyen reconstrucción de conceptos, nuevos diseños curriculares y acompañamiento en el aula para implementar los nuevos procesos didácticos y pedagógicos. Con ellos se realiza el taller con solo los tres primeros textos de Matemática Articulada y al final del mismo se realiza la encuesta. En ambos casos los maestros se enteraban que la encuesta tenía el objetivo de servir como parte de mi trabajo de grado. El total de encuestados es de 20 maestros.

El segundo conjunto corresponde a los estudiantes de la institución educativa José Holguín Garcés del barrio terrón Colorado de estrato 1 y 2. Los estudiantes inician el proceso de matemática Articulada desde grado primero y en la actualidad cursan noveno grado. Ellos recibieron y trabajaron los procesos de aprestamiento de matemática Articulada para la enseñanza de la suma y resta de enteros. Los encuestados han terminado el proceso de suma y resta de enteros. El total de encuestados es de 22. La investigación se aprobó por parte del consejo directivo de la institución. Otra de las características de la investigación es que las tres instituciones son públicas.

5.3 PLAN DE AULA

El plan de aula consta de las siguientes partes. Debe tenerse en cuenta que con el uso de guías metodológicas y la educación incluyente en el proceso de aula cada estudiante avanza a su propio ritmo.

A) Datos: Área. Asignatura. Materia – Profesor a cargo – tema y fecha de la clase

B) Estándar.

C) Objetivos de clase.

D) Competencias asociadas a saberes. Saber hacer. Saber ser. Saber conocer.

E) Contenidos que se trabajados en clase:

1) Contenidos conceptuales:

2) Contenidos procedimentales:

3) Contenidos actitudinales:

F) Estrategias didácticas: La lectura en clase es en grupo o individual y se realiza para hacer las actividades diarias. Se observan videos regularmente para analizar conceptos previos o Sirvan de guías para un ejercicio a desarrollar.

G) Actividades: 1) Actividades externas cómo fotografías a El puente Ortiz, La catedral de Cali y el Palacio nacional. 2) actividades en sitios del colegio tomando fotografías y realizando de áreas, volúmenes, ángulos de elevación e inclinación etc.

H) Recursos: Es el listado de materiales que se precisarán para la implementación de las estrategias didácticas y las actividades programadas en el aula de clase y se usan generalmente cartulina, piolas, fomi, madera etc.

N) Estimación del tiempo:

J) Evaluación. La estrategia es revisar continuamente en clase que realiza cada grupo con su texto guía y resolver sus inquietudes. Tarea desarrollada es proceso evaluado por sus competencias que debió realizar y yo observé.

K) Bibliografía utilizada para preparar la clase.

L) Bibliografía y recomendada al alumno.

M) Tareas preparatorias para la próxima clase.

N) Reflexión.

5.4 ESTRATEGIAS Y RECURSOS

La institución educativa José Holguín Garcés desde el año 2006 decidió apoyar el proceso de Matemática articulada, para ello los niños de 2 grupos primero de primaria inician el proceso. El otro proceso de la institución se realizó desde grado 6 con 4 cursos. Los del bachillerato ya terminaron sus estudios y están alrededor de unos 40, de un universo de unos 130 estudiantes, en las universidades de la ciudad. El otro proceso de primaria es el que hoy está en grado 9. A ese proceso han llegado unos y han salido otros. En el momento el proceso tiene 35 estudiantes con más de tres años en el proceso de Matemática Articulada.

La institución para desarrollar el proyecto adquirió un texto por cada estudiante y lo ha hecho durante 5 ocasiones que es el nivel de Matemática Articulada donde hoy se encuentran ubicados los estudiantes. Otros recursos que aportó la institución ha sido regla bicolor y segmentos para cada estudiante y un kit que consta de ábaco, 2 planos cartesianos en triplex perforada y figuras geométricas madera.

El área de matemática se le asigna como carga académica cada año al mismo maestro que se encarga de trabajar con ellos durante los 6 años del bachillerato.

5.5 ENCUESTA APLICADA A MAESTROS

Los maestros que participan en los talleres de matemática Articulada en las instituciones educativas Marino Renjifo Salcedo y Antonio Lizarazo, dieron respuesta a una encuesta aplicada para y conocer aspectos sobre los saberes transmitidos en ellos.

La encuesta se hizo en el mes de marzo de 2015. El taller de Matemática Articulada tiene una duración de 40 horas presenciales dirigida a maestros de educación básica primaria. En el momento de la encuesta se había desarrollado más del 80% del desarrollo de las actividades de actualización docente.

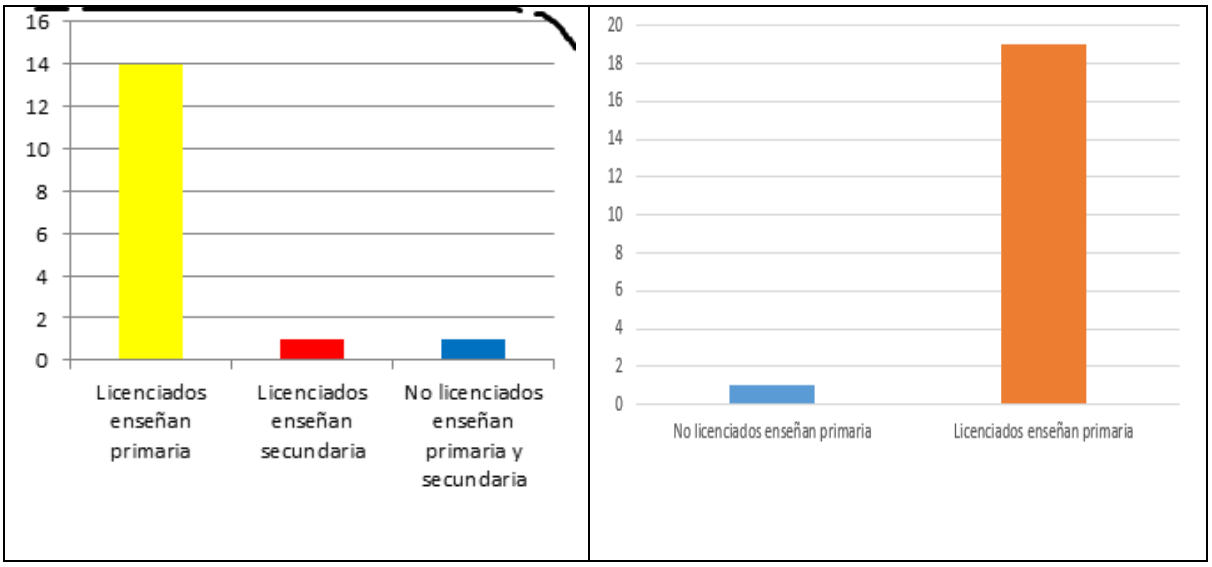
El número de maestros encuestados en Marino Renjifo fue de 20.

El número de maestros encuestados en Antonio Lizarazo fue de 24

5.5.1 Gráficas de resultados institución Antonio Lizarazo vs. Marino Renjifo Salcedo

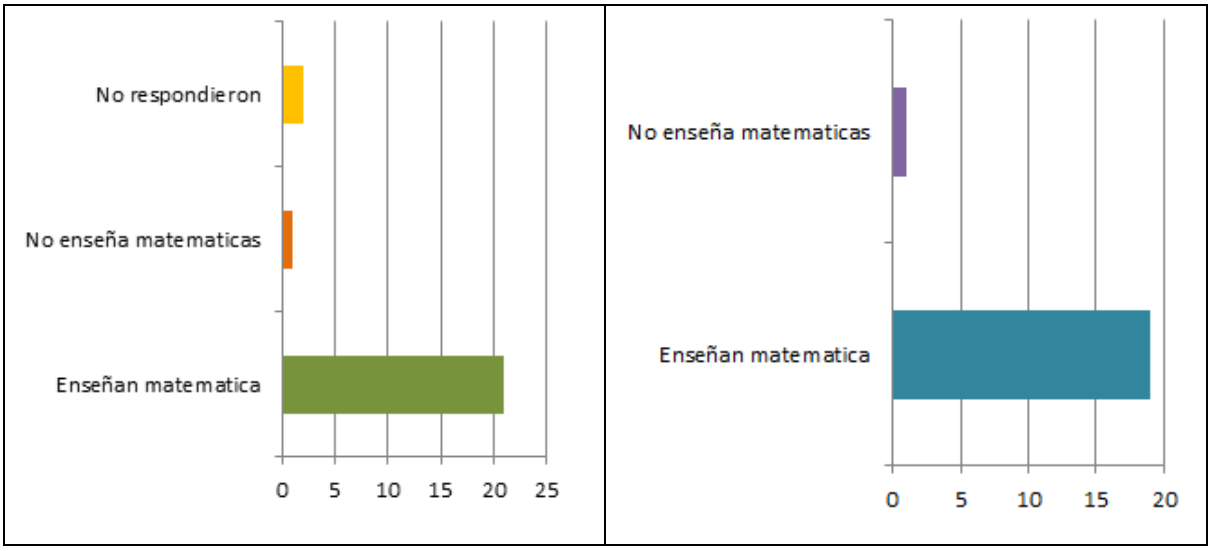
El número del gráfico coincide con el número de la pregunta en la encuesta.

Gráfico 14. Enseña en Primaria Secundaria



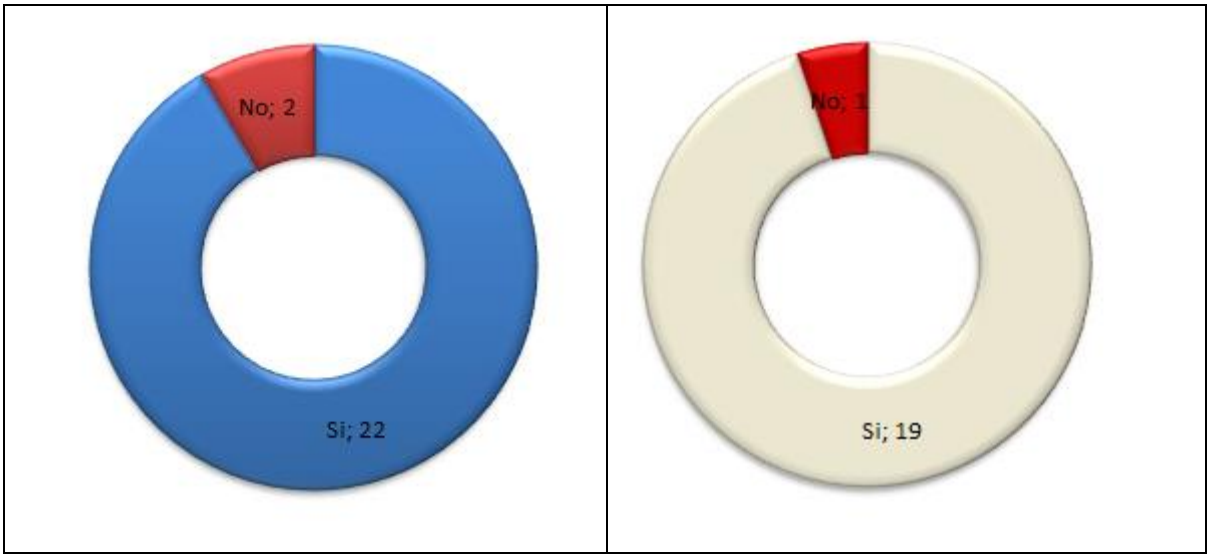
El porcentaje de licenciados enseñando en primaria es muy Bueno, con más de un 80%. Un aspecto positivo.

Gráfico 15. Enseña matemática Si/No



El porcentaje de maestros que enseña en primaria es alto, más del 90%. Lo cual es un aspecto positivo.

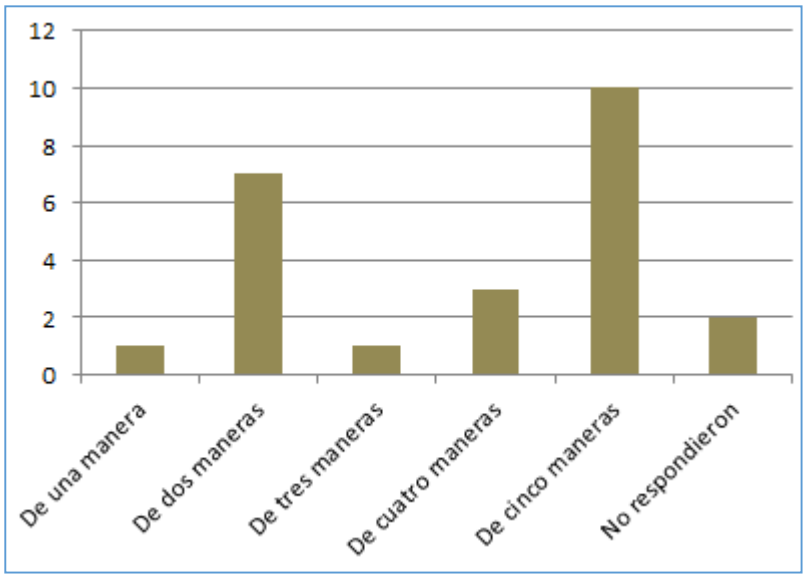
Gráfico 16. Disfrutabas enseñar matemática SI/NO



Los maestros disfrutan enseñar matemática en un porcentaje de más del 95%. Aspecto positivo.

5.5.2 Graficas de la institución Antonio Lizarazo

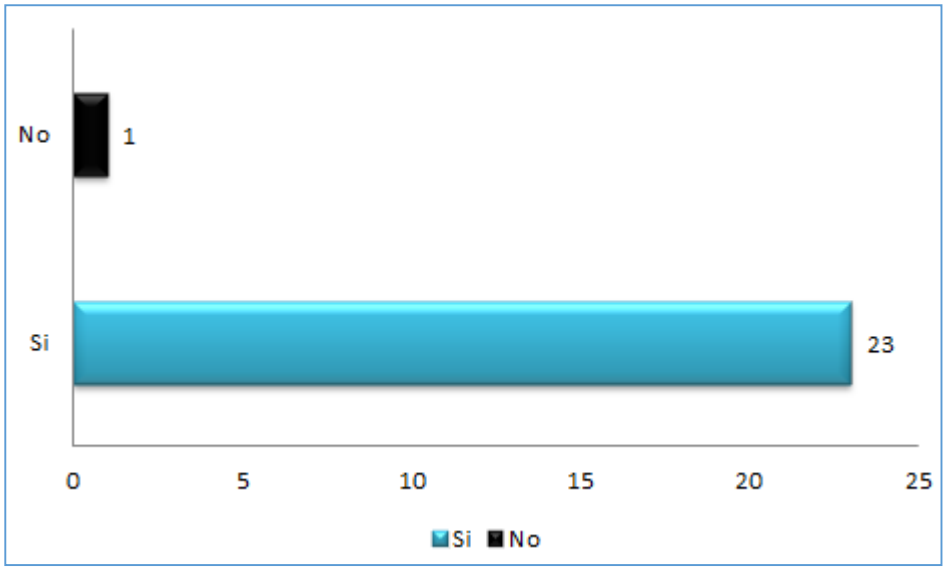
Gráfico 17. De cuántas maneras sumas con matemática Articulada: 1 2 3 4 5



El 40% de los maestros suman de cinco maneras diferentes. Más del 10% suma de cuatro maneras. Es importante porque siempre se ha sumado de una manera.

Gráfico 18. Estás en capacidad de iniciar a sumar por las centenas:

- SI _____ NO___



Esto indica que iniciar a sumar por las unidades se está superando en forma casi en el 100%.

5.5.3 Graficas para la institución Marino Renjifo

Gráfico 19. De cuántas maneras sumas con matemática tradicional: 1 2 3 4 5

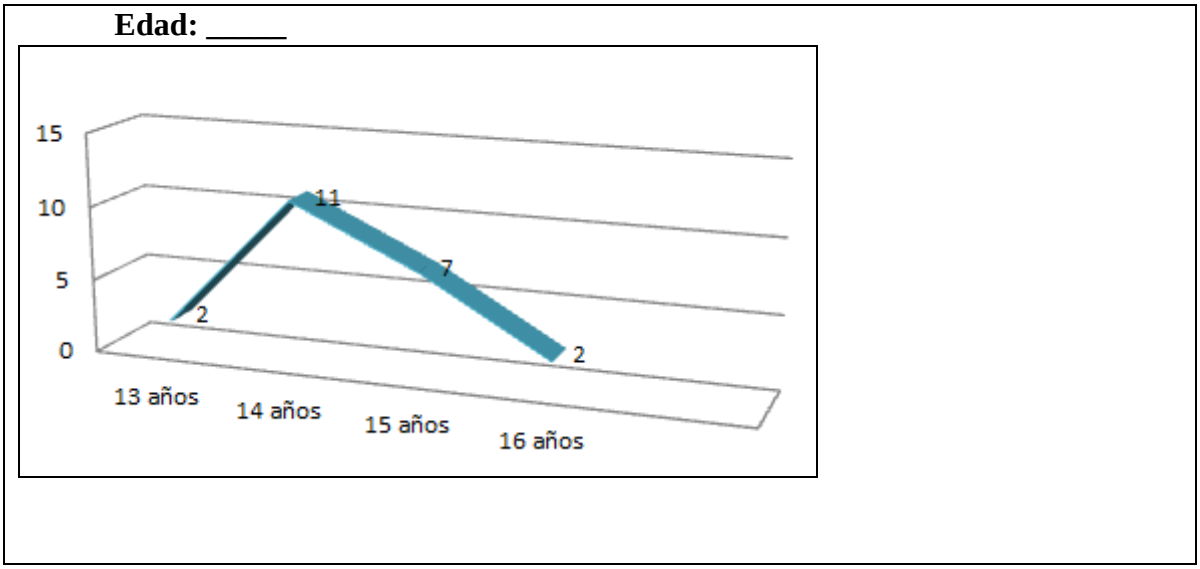
El realizar sumas con matemática tradicional muestra en las respuestas que la dispersión es grande. Más del 50% suma de solo dos maneras.

Gráfico 20. De cuántas maneras sumas con matemática Articulada: 1 2 3 4 5

El 50% está sumando de más de cuatro maneras con Matemática Articulada.

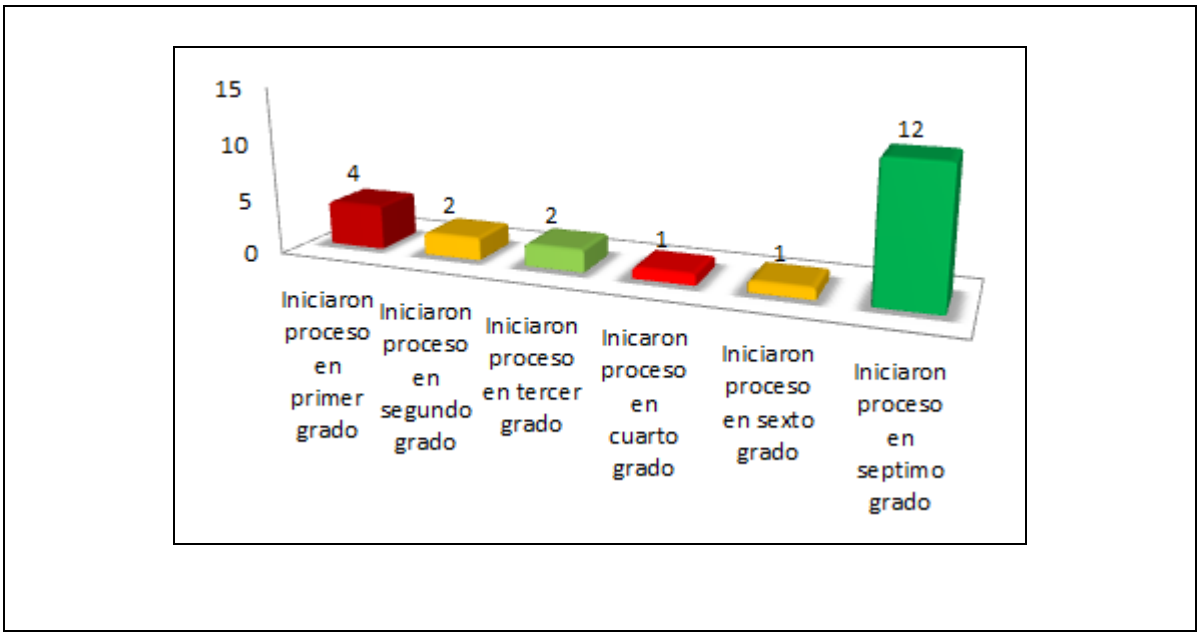
5.6 RESULTADOS ENCUESTA A ESTUDIANTES INSTITUCIÓN JOSÉ HOLGUÍN GARCÉS

Gráfico 21. Resultados de encuestas a estudiantes. Edad



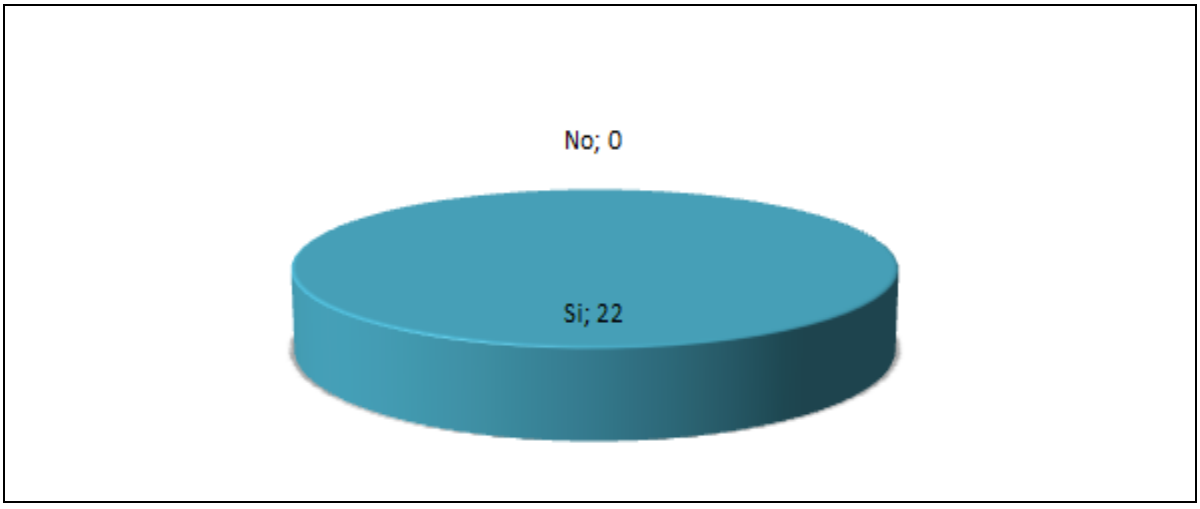
El mayor número de estudiantes se encuentra con edades de 14 y 15 años.

Gráfico 22. En cuál grado iniciaste a estudiar matemática articulada



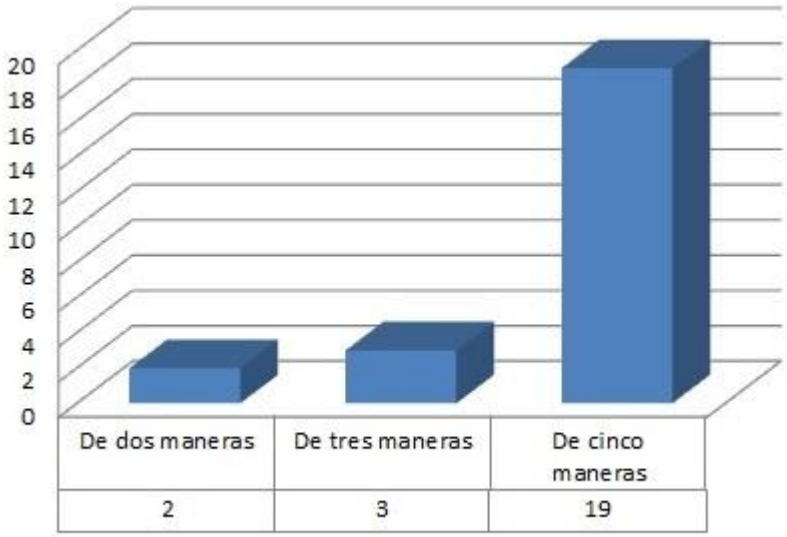
Más del 50% inició el proceso en grado séptimo.

Gráfico 23. Disfrutas estudiar matemática



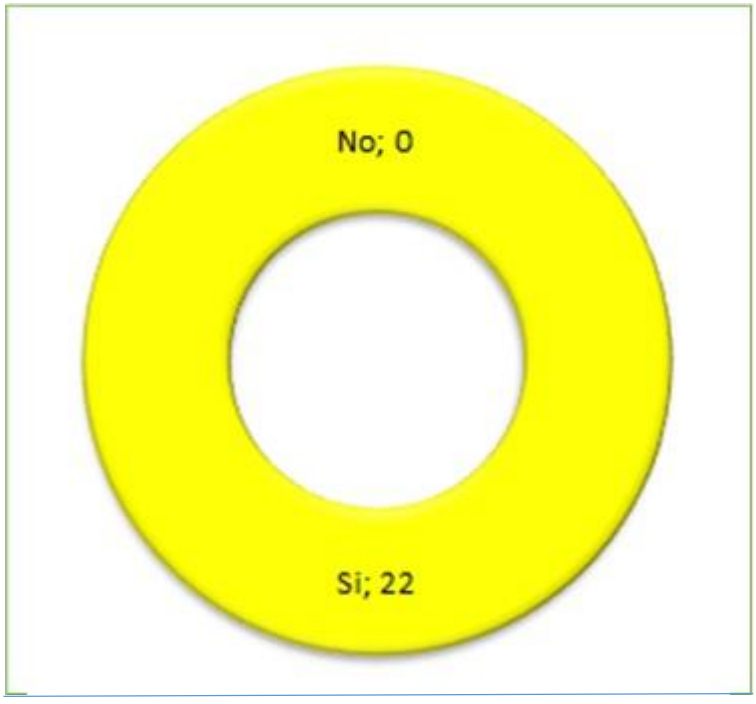
El 100% disfruta estudiar matemática.

Gráfico 24. De cuántas maneras sumas con matemática articulada: 1 2 3 4 5



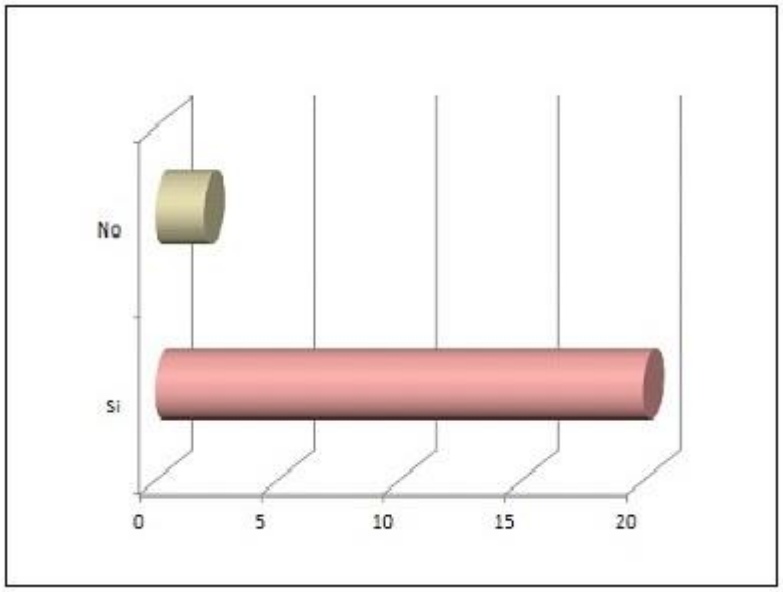
El 90% de los estudiantes suma de cinco maneras.

Gráfico 25. Saber restar con el ábaco



El 100% sabe restar con el ábaco

Gráfico 26. Es la resta una operación contraria a la suma porque una se traslada a la izquierda y otra a la derecha en la recta.



Más del 90% sabe cómo desplazarse en la recta para sumar y restar.

5.7 ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS ENCUESTAS

En los talleres que se trabajan con los maestros se realiza una encuesta para conocer la forma en que se están adquiriendo estos saberes y dónde están las fortalezas y debilidades. Con los jóvenes de la institución José Holguín Garcés elaboré una encuesta para conocer su nivel de apropiación de saberes adquiridos desde la escuela hasta hoy, para permitir identificar cuales saberes se deben retomar para corregirlos y mejorarlos.

Con los maestros y estudiantes al ser dos tipos de grupos diferentes se realizan las encuestas de forma diferenciada. Los maestros de primaria reciben en promedio 40 horas de información y unas 20 horas de acompañamiento en su trabajo de aula. Los estudiantes en su proceso como mínimo de 5 años y con un promedio de 16 horas clase mes. El análisis comprendelos datos obtenidos con los maestros y el obtenido con los estudiantes. A continuación presento primero las encuestas y los porcentajes obtenidos de ellos, y a continuación los comentarios sobre ellos. He relacionado algunos gráficos con datos sobresalientes de la encuesta de cada uno de los grupos encuestados.

En los jóvenes se puede observar que ellos podrán usar los saberes adquiridos en sus estudios de profesionalización. Con los resultados obtenidos en la encuesta me permitió reforzar aspectos donde detecte había debilidades o su concepto estaba errado. En los maestros el resultado más esperado es el que haya una reflexión sobre la transmisión de saberes en las aulas de clase en nuestro país, el paso esperado en los maestros es que utilicen los elementos presentados de la geometría, los conjuntos y la aritmética, que permita fortalecer su quehacer pedagógico.

CONCLUSIONES

El proceso de enseñanza-aprendizaje de la suma y la resta en los enteros puede enriquecerse con una más amplia cantidad de elementos matemáticos como los puntos, los vectores, los segmentos, los conjuntos, las funciones, las rotaciones y las traslaciones. Estas dos operaciones básicas en nuestra enseñanza se han abordado únicamente desde los conjuntos y su función cantidad.

Ese abordaje de estos saberes disciplinares presentados en la enseñanza de la suma y resta en los enteros se potencializa cuando estos en un perfecto asocio se entrelazan con elementos pedagógicosy didácticos. Cuando el abordaje se hace asociado con los saberes didácticos como las transposiciones y situaciones didácticas o los aportes del constructivismo, o de la pedagogía activa, que permiten la construcción del aprendizaje y de los saberes de las operaciones suma y resta de los enteros sin hacer uso excesivo de la memoria.

Abordar la enseñanza de la suma con vectores nos permite entender como algunos hombres de ciencia como es el caso de Blas Pascal que usando ese saber lo aplicó para hacer ciencia y en su caso al construir con vectores la Pascalina que es una máquina mecánica la cual realiza sumas y restas en los Naturales. Aspectos como el anterior se pueden trabajar en el aula paramostrar a los estudiantes el uso de esos saberes de una forma fácil que ayudan eficazmente al hombre en el desarrollo de sus tareas.

Estos saberes de la matemática enseñados en la suma y resta de los Enteros que benefician al hombre para su desarrollo se observan en otros instrumentos de uso diario como los puntosen cámaras de fotografía cuando los puntos se les llaman pixeles o el ratón del computador nos muestra un puntero y este tiene forma de vector. Todos estos saberes en nuestra educación matemática han estado alejados del aula de clase lo que nos ha impedido hacer más ciencia y desarrollar tecnología.

Esta propuesta basada en Matemática Articulada aporta desde una visión que contempla una fuerte unión entre lo disciplinar y lo pedagógico, con una más amplia cantidad de elementos geométricos y matemáticos los cuales propenden para que a estos saberes les seandados usos en la ciencia y en la tecnología. Estos aprendizajes son parte de un proceso el cual se verá reflejado en la enseñanza aprendizaje de la suma en los números racionales y en los polinomios.

La enseñanza de la suma y la resta en los Enteros abordada desde la visión de matemática Articulada está en algunas aulas de clase. Las encuestas a jóvenes estudiantes y maestros en 2 lugares del Valle del Cauca reflejan que estos saberes ya están siendo utilizados. La forma en que

trabajan mis estudiantes, sus respuestas a la asistencia al salón de clase y su trabajo son la mejor respuesta que puede esperar un maestro. Pero más allá el ver que cuando van a la universidad sus éxitos son evidentes. Es la mayor sensación de que las expectativas se están cumpliendo.

Al comparar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las operaciones mencionadas en los Enteros se puede observar que en la matemática tradicional abordaba su enseñanza desde la función cantidad haciendo uso de los conjuntos. Las respuestas obtenidas en las tres encuestas dejan mostrar que los estudiantes asumen de forma natural su aprendizaje y su uso. Un buen porcentaje de los maestros de igual manera aprecian que se puede enriquecer la enseñanza de estas operaciones incluyendo en el proceso nuevos elementos matemáticos que permitan al estudiante realizar un aprendizaje que se construya usando factores articuladores de la vida real y de la matemática, para que sean más significativos, más pertinentes. Se aprecia en las respuestas que es posible enriquecer los saberes de estas dos operaciones permitiendo que ellas sean abordadas de formas distintas a la que se han usado tradicionalmente en nuestros procesos de educación matemática, podemos por ejemplo aprender matemática sin hacer uso excesivo de la memoria. Que es posible mostrar como alguna tecnología se ha construido usando los conceptos básicos de estas operaciones y que solo fue posible porque sus conceptos habían sido construidos de forma correcta y más amplia que la nuestra en su proceso de enseñanza.

REFERENCIAS

Anderson y Sampson. (1996). *Learning contracts . A practical guide.* .

Arendt, H. (2011). *Entre el ser y la vida: El concepto de natalidad en Hannah Arendt y la posibilidad de una ontología política.*

Ausubel, D. (1963). *Teoría del aprendizaje significativo.*

Bárcena y Melich. (2001). *La educación como acontecimiento ético. Natalidad, narración y hospitalidad*

Barrios y Valdivia. (2012). *Estrategias en la enseñanza de número entero en la escuela secundaria.*

Borja, D. (2009). *El aprendizaje de los números enteros una experiencia significativa en estudiantes de 7° de la Escuela Nacional de Música.*

Bruno y Martiñón. (1997). *La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación.*

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las matemáticas.*

Chavellard, Y. (1985). Alguna representación con respecto al concepto de representación. *II Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Historia y Geografía.*

Chevallard, Y. (1996). *Conceptos fundamentales de la didáctica.*

Chevellard, Y. (1992). *La transposición didáctica.*

Cid, E. (2003). *La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión.*

Colombia. (1994). *Ley 115 de 1994, Ley General de Educación* . Bogotá.

Correa, J. (10 de diciembre de 2012). Programa de radio. Emisora Blue Radio. Bogotá.

De Guzmán, M. (1995). *Tendencias e innovaciones en educación matemática.* Bogotá: OEI.

Editorial. (diciembre de 2013). *El Espectador*.

Escobar, F. (2000). *Matemática Articulada.* Popayán: Feriva.

Escobar, F. (2006). La deducción .

Escobar, F. (2007). Félix Klein.

Escobar, F. (2012a). *La educación matemática en Colombia, un engaño de 500 años.*

Escobar, F. (2012b). *Cómo debería ser la educación matemática en Colombia.*

Escobar, F. (2012c). *Matemática Articulada 3.*

Gallardo, A. (1994). *Emergencia de los números enteros.*

Joshua y Dupin. (1993). *Introducción a la enseñanza de la ciencia y la matemática.* .

López, J. (2009). *La importancia de los conocimientos previos.*

Marturana, H. (1997). *El sentido de lo humano.*

Ministerio de Educación Nacional . (2002). *Estándares Básicos de Competencias Matemáticas.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional - MEN. (2008). *Al Tablero.*

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá: MEN.

Moise, D. (1996). *Geometría moderna. Editorial Iberoamericana.*

Navia y Orozco. (2013). *Introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la educación básica.*

Pareja, D. (2006). *Conferencia Humanismo y Matemática.* Universidad del Quindío.

Pareja, D. (2007). Artículo: De Félix Klein a Hyman Bass.

Pareja, D. (2010). *Renovar e innovar en educación.* Universidad del Quindío.

Perkins, D. (1997). *La escuela inteligente.*

Revista Academica. (2013). *Revista Académica.com 16 dic 2013.*
Rojas, M. (1982). *Analis de una experiencia: La Misión Pedagógica Alemana.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Rúa, G. (2013). *Implementación de una estrategia de enseñanza mediada por la plataforma Moodle para el aprendizaje significativo de la suma de números enteros en el grado sexto de la Institución educativa Cisneros. Trabajo de grado.*
Sánchez, O. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de (Z, +, *) a estudiantes de séptimo grado.* .
Sarmiento, E. (13 de diciembre de 2013). *El Espectador*.
UNESCO. (2009). *Directrices sobre políticas de inclusión en la educación.*
Uri, B. (2011). *Didáctica de la lengua castellana y la literatura.*
Verret, M. (1985). *Transposición didáctica.*
Zabala, J. (2010). *El desarrollo de la competencia matemática.*

ANEXOS

Anexo A. Formato de encuesta aplicada a los docentes de las Instituciones Educativas Antonio Lizarazo y Marino Renjifo

1. Género: M_____ F_____
2. Licenciado: SI _____ NO: _____
3. Licenciado en matemática: SI _____ NO _____
4. Enseña en: Primaria _____ Secundaria _____
5. Enseña matemática: SI_____ NO_____
6. Disfrutabas enseñar matemática: SI _____ NO _____
1. Matemática Articulada basa su aprendizaje en la memorización: SI ____ NO ___
2. De cuántas maneras sumas con matemática tradicional: 1 2 3 4 5
3. De cuántas maneras sumas con matemática Articulada: 1 2 3 4 5

4. Antes de matemática Articulada, en clase de primaria sumabas vectores: SI _____ NO _____
5. Antes de matemática Articulada sumabas puntos: SI _____ NO _____
6. Sabias antes de matemática Articulada que sólo se deben sumar dos sumandos: SI _____ NO _____
7. Tienes hoy más elementos matemáticos para enseñar la suma: SI _____ NO ___
8. Sabías usar el ábaco para sumar: SI _____ NO _____
9. Estás en capacidad de iniciar a sumar por las centenas: SI _____ NO___
10. En la enseñanza de la suma la harías llevando: SI _____ NO _____
11. Se pueden sumar conjuntos: SI ____ NO _____
12. Se pueden sumar conjuntos: SI ____ NO _____

13. Enseñarías hoy a sumar con matemática Articulada:
SI _____ NO _____

14. Enseñarías hoy a sumar con matemática tradicional:
SI _____ NO _____

15. Marque con una X los elementos matemáticos que conociste su significado y su uso con el taller de matemática Articulada.

Vector _____ segmento _____ Punto _____ Traslación _____ Unión _____ Función _____

16. Se puede restar en el ábaco.
SI _____ NO _____

17. Has restado en un ábaco.
SI _____ NO _____

18. Es la resta una operación contraria a la suma porque una se traslada a la izquierda y otra a la derecha.
SI _____ NO _____

19. Cuando restas en la recta te mueves hacia la derecha
SI _____ NO ___

20. Se puede enseñar a restar haciendo unión de conjuntos.
SI ___ NO ___

21. Marca con una X el porcentaje en el cuál usarías hoy lectura en tu clase de matemática.

0% _____ 10% _____ 20% _____ 40% _____ 60% _____

80% _____ 100% _____

22. Marca con una X el porcentaje con el cuál crees que matemática Articulada cambiará tu manera de enseñar esta área.

0% _____ 10% _____ 20% _____ 40% _____ 60% _____ 80% _____ 100% _____

Anexo B. Formato de encuesta aplicada a los estudiantes de las Instituciones Educativas Antonio Lizarazo y Marino Renjifo

Curso actual: 9-3

	Nombre del estudiante: _____
	1. Edad: _____
	2. En cual grado iniciaste a estudiar matemática Articulada:
	3. Cuántos años llevas estudiando con matemática Articulada:
1	**Disfrutas estudiar matemática:** **SI _____ NO _____**
2	**Marque con una X los elementos matemáticos que conoces su significado y su uso.** **Vector _____ segmento _____ Punto _____ Traslación _____ Unión _____ Función _____**

3	**De cuántas maneras sumas con matemática Articulada:** **1 2 3 4 5**
4	**Sumas vectores en la regla bicolor:** **SI _____ NO _____**
5	**Realizas sumas con puntos matemáticos:** **SI _____ NO _____**
6	**Al mismo tiempo puedes sumar tres vectores:** **SI _____ NO _____**
7	**Si sumas 2 vectores el resultado es un número:** **SI _____ NO _____**
8	**Si sumas 2 puntos el resultado es un número:** **SI _____ NO _____**

9	**Si sumas 2 puntos el resultado es un vector:** **SI _____ NO _____**
10	**El ábaco te sirve para sumar:** **SI _____ NO _____**
11	**Eres capaz de iniciar las sumas por las centenas:** **SI _____ NO___**
12	**Tu sumas conjuntos:** **SI _____ NO _____**
13	**Reunir conjuntos es lo mismo que sumar:** **SI ____ NO _____**
14	**Decir resta de conjuntos es igual a decir diferencia de conjuntos:** **SI _____ NO _____**

15	**Sabes restar con el ábaco:** **SI _____ NO _____**
16	**Has restado en un ábaco:** **SI _____ NO _____**
17	**Es la resta una operación contraria a la suma porque una se traslada a la izquierda y otra a la derecha en la recta:** **SI _____ NO _____**
18	**Cuando restas en la recta te mueves hacia la derecha:** **SI _____ NO _____**
19	**Cuando haces unión de conjuntos estás restando:** **SI _____ NO _____**
20	**Marca con una X. Generalmente en las 4 horas de clase de matemática cuántas veces haces lectura:** **0 veces _____ 1 vez _____ 2 veces _____ 3 veces _____** **4 veces _____ Nunca lees en clase _____**