PROPUESTA DE AULA PARA EL APRENDIZAJE DEL NÚMERO RACIONAL EN GRADO SEXTO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA A PARTIR DEL SIGNIFICADO DE LA FRACCIÓN COMO RAZÓN.

PROYECTO DE GRADO

ANGÉLICA MARÍA ORTEGA GÁLVEZ

Asesor de investigación

ARMANDO ZAMBRANO LEAL, Ph.D

UNIVERSIDAD ICESI

ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

SANTIAGO DE CALI

2015

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

Este trabajo presenta el diseño y sistematización de los resultados obtenidos al aplicar una secuencia didáctica para el aprendizaje del número racional en grado sexto de la educación básica a partir del significado de la fracción como razón; este trabajo es realizado como requisito para optar al título de Magister en Educación.

La secuencia didáctica diseñada tiene de base el constructo de la fracción como razón, porque se considera que la noción de razón conduce de manera natural al trabajo con proporciones y a la construcción de la relación de equivalencia que permite definir los números racionales.

La investigación se sustenta en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas desarrollada por Guy Brousseau, esta teoría proporciona elementos para comprender y modelar las interacciones entre los estudiantes, los docentes y los saberes matemáticos a partir de la puesta en acto de un medio, en este caso una situación problema.

Palabras claves: Aprendizaje número racional, fracción como razón, Teoría de la Situaciones Didácticas.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad se reconoce la necesidad de desarrollar competencias matemáticas, es decir, potenciar en los estudiantes el uso eficaz y flexible del conocimiento matemático en contextos diferentes de aquellos en los que se aprendió. Así entonces, se justifica una reflexión, transformación, e implementación de prácticas pedagógicas que mejoren el aprendizaje de los objetos matemáticos por parte de todos los estudiantes y que favorezca la puesta en acto del conocimiento matemático aprendido en la escuela en situaciones de la vida real.

El documento presentado a continuación corresponde al trabajo de investigación realizado para optar al título de Maestría en Educación de la Universidad Icesi. El objeto de estudio de esta investigación se centró en el aprendizaje del número racional en sexto grado de la Educación Básica, a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica. Este objeto de estudio tiene relevancia y validez puesto que se reconoce la necesidad de desarrollar competencias matemáticas en la escuela de tal forma que los niños y jóvenes adquieran la capacidad de manejar de forma apropiada, flexible y eficaz los números racionales.

Al respecto el Doctor Vasco plantea que “todos nuestros estudiantes necesitan ser competentes para modelar situaciones y procesos de la vida real en los que los sistemas de números racionales sean útiles y poderosos para resolver los problemas que se presenten” (Vasco, 2012, p.44). El desarrollo de la competencia del uso de los números racionales y en particular la representación fraccionaria es fundamental en la comprensión de diversas situaciones de la vida real. Entre las cuales se pueden mencionar: descuentos en los almacenes, tasa de inflación, interpretación de las facturas de servicios públicos, las encuestas, variación de la velocidad, probabilidad, mediciones, escalas, entre otros.

El desarrollo de este documento se realiza a partir de seis apartados, organizados de la siguiente manera: en el primero se presenta la construcción de la pregunta de investigación, los objetivos y la justificación; en el segundo se desarrolla los referentes teórico-conceptuales de la investigación; en el tercero se explicita la estrategia metodológica de la investigación; en el cuarto se realiza la fase del análisis preliminar a partir de la presentación de los referentes curriculares, el análisis matemático del número racional y la descripción de la prueba diagnóstica; en el quinto apartado se plantea el diseño de la secuencia didáctica a partir de la identificación del contenido matemático de cada situación y el análisis de los posibles desempeños de los estudiantes. Finalmente en el último apartado se presenta los resultados obtenidos en las situaciones diseñadas y las conclusiones de la investigación.

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado se presenta el planteamiento del problema, los objetivos y la hipótesis que guían el desarrollo de la investigación, también se realiza la justificación de la pertinencia del objeto de estudio elegido para llevar a cabo la investigación

.

1.1 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

La situación actual del aprendizaje de las matemáticas en Colombia es preocupante, dicha afirmación está sustentada en los resultados obtenidos en las evaluaciones externas censales o muéstrales realizadas en los últimos años. El informe de resultados de PISA 2012 presentó que el 74% de los estudiantes colombianos se ubicó por debajo del nivel 2 y el 18%, en el nivel 2. (Icfes, 2013, p. 8). En este sentido, se puede reconocer que solo dos de cada diez estudiantes logran resolver situaciones problema que requieren de una interpretación literal de la información y la aplicación de fórmulas, procedimientos y algoritmos elementales. El informe de resultados TIMSS 2007 presentó que el 69% de los estudiantes de cuarto grado y el 61% de los estudiantes de grado octavo se encuentran en un nivel inferior. El 22% de los estudiantes de grado cuarto y el 28% se ubican en el nivel bajo. (Icfes, 2010, p.12). Estos resultados ponen en evidencia que existe poca comprensión y dominio del conocimiento matemático básico para solucionar situaciones problema de tipo numérico, geométrico, variacional y aleatorio. El informe de las Prueba Saber 2009 presentó que el 44% de los estudiantes de grado quinto no alcanzan los desempeños mínimos establecidos en la evaluación de esta área al culminar la básica primaria. En cuanto a los estudiantes de grado noveno se encuentra que el 26% se encuentran en un nivel de desempeño insuficiente y el 52% alcanzan un nivel mínimo de desempeño (Icfes, 2010, p.14).

En general los resultados obtenidos en las diferentes evaluaciones (Pisa, Timss, Saber) evidencian que existe una notoria dificultad en el aprendizaje de los conocimientos matemáticos, puesto que los estudiantes en los diferentes ciclos de escolaridad no muestran un desarrollo de competencias matemáticas básicas para resolver situaciones problema en contextos de la vida cotidiana, de las matemáticas y de otras ciencias. De esta manera, los ciudadanos colombianos están en desventaja para participar de manera competente y efectiva en el mundo globalizado.

Al reflexionar sobre mi práctica pedagógica hay una situación que centra mi atención, y es la dificultad que se presenta en los estudiantes para la construcción de la estructura del conjunto numérico de los racionales y en particular la significación y apropiación del sistema de los números fraccionarios. En la mayoría de los estudiantes de la educación básica y media es muy notoria la falta de comprensión de los diversos significados de la fracción (medida, relación parte-todo, cociente, operador, razón, porcentaje), las relaciones de orden y equivalencia, las relaciones aditivas y multiplicativas entre las cantidades. Esta situación afecta el desarrollo del pensamiento matemático, puesto que la construcción del número racional específicamente la representación fraccionaria se constituyen en un instrumento fundamental para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, por ejemplo: la proporcionalidad, la función lineal, la derivada.

La construcción del número racional de manera formal se inicia en el segundo ciclo de escolaridad (4º-5º) y se consolida en el tercer ciclo (6º-7º). Sin embargo, a pesar que en el currículo de matemáticas se dispone de 4 años escolares para abordar el estudio y construcción de este conjunto numérico no se logra que los estudiantes usen comprensivamente las diferentes formas equivalentes de representación del número racional y la aplicación de sus propiedades y operaciones en la resolución de problemas. Es por ello, que mi interés para la realización de la investigación se centró en la conceptualización del número racional en representación fraccionaria y especialmente el significado de la fracción como razón.

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tradicionalmente se ha centrado en un carácter mecánico de los conceptos, por fuera de la utilización de contextos que los doten de sentido y significado. La práctica más generalizada ha sido la presentación expositiva del tema por parte del profesor a partir de definiciones de acuerdo a la estructura matemática del concepto y luego el desarrollo de ejemplos, por último el profesor plantea ejercicios que requieren la repetición de un modelo determinado, por tanto se reduce a ejercicios de mecanización.

En particular, la enseñanza del número fraccionario puede ser caracterizado de la siguiente manera: introducción de la notación simbólica $\frac{a}{b}$ asociada a la cantidad coloreada en una figura dividida en un número de partes iguales, las figuras utilizadas generalmente son rectángulos y círculos, puesto que estas son de fácil división. Luego se explica cómo establecer relaciones de orden para finalmente trabajar los algoritmos de suma y resta con igual y diferente denominador y los algoritmos de multiplicación y división, enseñados por fuera de situaciones problema.

La práctica descrita centra la atención en la utilización de un solo registro de representación, el cual puede ser un registro verbal, numérico o gráfico. Desconociendo así que la naturaleza del conocimiento matemático nos es accesible de manera natural, sino que requiere de procesos de abstracción y simbolización mediado por el uso de diferentes registros de representación: tablas, gráficos, lenguaje natural, lenguaje algebraico.

Por lo anterior es necesario transformar las prácticas pedagógicas para que se logre la aprehensión de los conceptos matemáticos a través del diseño e implementación de situaciones de aprendizaje en contextos significativos que utilicen variedad de registros de representación y que posibiliten el desarrollo de procesos argumentativos y de razonamiento matemático.

La investigación propuesta a continuación se desarrolló a partir de la siguiente cuestión: ¿En qué medida el significado de la fracción como razón favorece el aprendizaje del número racional en niños y niñas de sexto grado de la Educación Básica?

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.2.1 OBJETIVO GENERAL: Medir el alcance del significado de la fracción como razón en una situación didáctica y su efecto en el aprendizaje del número racional en estudiantes de sexto grado de la Educación Básica de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS:

1. Diseñar una situación didáctica a partir del significado de la fracción como razón.
2. Implementar la situación didáctica y observar su efecto en el aprendizaje del número racional.
3. Contrastar el comportamiento de la situación didáctica en el aprendizaje del número racional.
4. Sistematizar los resultados obtenidos al aplicar la situación didáctica.

1.3 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

El desarrollo de esta investigación tiene como hipótesis que el significado de la fracción como razón favorece el aprendizaje del número racional en los niños y niñas de sexto grado de la Educación Básica especialmente si están expuestos a una situación didáctica.

La secuencia didáctica diseñada en el marco de esta investigación tiene de base el constructo de la fracción como razón puesto que se considera que este favorece la comprensión del número racional. En particular, se asume que la noción de razón es precursora de la fracción, porque conduce de manera natural al trabajo con proporciones y a la construcción de la relación de equivalencia que permite definir los números racionales.

Si se analiza la génesis de la construcción del número racional es posible identificar que desde los griegos se tenía la noción de fracción asociada a la noción de razón entre dos números que expresaban una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo. En este sentido, la fracción emerge en un contexto de medición y comparación entre segmentos conmensurables. Este contexto permite comprender el número racional como una expresión cuantitativa de una medida, como una relación cuantitativa entre dos magnitudes y no como la parte sombreada o coloreada de una unidad particionada en partes iguales.

Marshall (citado por Gairin, 1998) plantea que el significado de la fracción como razón lo que refleja es la relación existente entre dos cantidades, o la comparación entre algún número de un objeto y algún número de segundo objeto; no se quiere representar la partición de ningún objeto o cantidad. (p.50). Esta relación tiene múltiples ventajas en la comprensión del número racional, entre las que se pueden mencionar las siguientes:

1. Las representaciones gráficas no son esenciales para significar la fracción, sino que se puede trabajar con representaciones mentales.
2. La fracción es usada como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud, por tanto no existe de forma natural una unidad que se deba dividir.
3. La fracción adquiere sentido como expresión de medidas y como expresión de operadores multiplicativos.
4. La comparación se puede establecer de forma bidireccional, a partir del orden en que se establezcan las relaciones entre las cantidades de cada conjunto.
5. La fracción emerge como la expresión de una razón constante. De esta manera se considera la equivalencia de fracciones como invariante de la relación entre las cantidades.
6. Se inicia el desarrollo del razonamiento proporcional.

1.4 JUSTIFICACIÓN

La construcción del concepto de número racional es uno de los conceptos matemáticos que presenta mayor dificultad en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esto se puede plantear con base en las investigaciones que se han desarrollado en el campo de la educación matemática en países como Francia, España, Estados Unidos, entre otros. Estas investigaciones han permitido comprender que la dificultad del aprendizaje y significación del número racional se debe a dos aspectos: el primero corresponde a su naturaleza y complejidad, puesto que el número racional está relacionado con diferentes situaciones y contextos que lo dotan de un significado particular. Por ejemplo: situaciones de medida, con el significado de parte de un todo o como parte de un conjunto de objetos; situaciones de reparto utilizadas como cociente; situaciones de índice de comparación usadas como razón; y situaciones de operador. (Llinares, 2003, p.188). El segundo aspecto corresponde a las diferentes representaciones que pueden ser utilizadas para simbolizar el número racional, entre las que se encuentran: la fracción, la expresión decimal, la fracción decimal, el porcentaje. Por ejemplo $\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$

El dominio de los racionales es un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere de la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones simbólicas que están en estrecha conexión. (Llinares, 2003, p.189). Teniendo en cuenta la naturaleza y complejidad del número racional es necesario que en los procesos de enseñanza se posibilite su significación y comprensión desde el planteamiento de situaciones que involucren sus diferentes interpretaciones y representaciones. Además se requiere la explicitación de las relaciones entre estas.

Por otro lado, las evaluaciones censales realizadas por el Ministerio de Educación Nacional a través del ICFES: Pruebas Saber 3º, 5º, 9º ,11º han arrojado resultados que permiten concluir que existe dificultad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En particular, no se alcanzan los niveles de desempeño esperados (desempeño básico), identificando así que existe una mínima comprensión y significación de los conceptos matemáticos en los estudiantes de la educación básica y media. Específicamente en el pensamiento numérico se han identificado problemas relacionados con la comprensión del concepto de número, la operatividad con distintos sistemas numéricos como: naturales, enteros, racionales y las propiedades de las operaciones.

La situación descrita lleva a reconocer la necesidad de redimensionar los procesos de enseñanza y aprendizaje en las instituciones educativas; una forma de lograr esto es a través del diseño e implementación de secuencia didácticas[1] puesto que estas privilegian la conceptualización de los objetos matemáticos abordados desde diversos contextos que le dan sentido a las matemáticas y favorecen el desarrollo de procesos generales como el razonamiento, la comunicación, la modelación, la resolución de problemas y la ejercitación de procedimientos.

En el marco de esta investigación se propone el diseño de una secuencia didáctica cuyo propósito es el aprendizaje del número racional desde el significado de fracción como razón. Este significado se elige porque se considera que en el ciclo de escolaridad de 6º y 7º el estudio de la fracción se debe realizar desde situaciones que favorezcan la comprensión del número racional como una expresión cuantitativa de una medida y como una relación cuantitativa entre dos magnitudes. Además, se reconoce que la noción de razón es una herramienta fundamental y potente para iniciar a los estudiantes en el razonamiento proporcional. Este razonamiento se refiere a la comprensión de las relaciones entre las variables y el reconocimiento de los procesos de variación y covariación.

La razón y la proporción son un constructo del número racional que permite la modelización y organización de situaciones en diversos contextos como las ciencias naturales, las ciencias sociales, las mismas matemáticas y la vida cotidiana. De manera particular, es posible señalar que en las ciencias naturales el concepto de razón se explícita en fenómenos de la física donde se requiere interpretar velocidades, aceleraciones, fuerzas de elongación, entre otros; en la química se hace presente en las situaciones de mezclas y aleaciones. En las ciencias sociales el concepto de razón cobra sentido en la utilización de escalas en mapas, planos y fotografías. En la vida cotidiana la razón se presenta en situaciones de rebajas como “pague dos lleve tres” (2:3), porcentajes, recetas de

[1]Entendiendo por secuencia didáctica un conjunto de actividades sistemáticas en estrecha interrelación con fines de movilización y conceptualización de un objeto matemático

cocina. Finalmente, en las matemáticas el concepto de razón se explicita en la proporción, proporcionalidad, el teorema de Thales, la homotecia, la semejanza de figuras, la función lineal y la derivada.

Teniendo en cuenta las múltiples situaciones en las que la razón como constructo del número racional se convierte en un medio de organización y generalización se hace necesario que en el aula de clase se aborde su estudio y comprensión desde el planteamiento de situaciones problema que favorezcan su significación y apropiación. De manera especial en el aula de clase se deben privilegiar el desarrollo de situaciones donde la fracción como razón se trabaje como: una relación ordenada entre dos cantidades de magnitud (en un contexto aritmético); como una comparación entre dos magnitudes del mismo tipo (probabilidad, porcentajes); como una comparación entre dos magnitudes de diferente tipo (tasas); como el cociente constante entre dos variables (contexto funcional). Solo así se posibilitará la construcción del número racional en los estudiantes y por tanto el desarrollo de competencias básicas para afrontar con éxito las exigencias del mundo actual.

2. REFERENTES TEÓRICO– CONCEPTUALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se desarrolla el marco teórico que sustenta el diseño e implementación de la secuencia didáctica para la conceptualización del número racional en estudiantes de sexto grado a partir del significado de la fracción como razón. El marco teórico se construye a partir de dos elementos: la teoría de las situaciones didácticas y el estado del arte en relación a las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de los números racionales.

2.1 TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

La teoría de las situaciones didácticas (TSD) es desarrollada por Guy Brousseau en el marco de las investigaciones en didáctica de las matemáticas realizada en Francia durante los años 80. Esta teoría propone un enfoque para comprender las interacciones sociales entre los estudiantes, los docentes y los saberes matemáticos que se dan en el aula de clase y que determina en gran medida lo que los estudiantes aprenden y la forma cómo lo aprenden.

El planteamiento de la TSD se realiza sobre la base que las matemáticas son una práctica social que posibilita el desarrollo de la racionalidad en los sujetos, por tanto es necesaria ser enseñada en la escuela. “*La matemática constituye el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales”* (Brousseau, 2007, p.11).

La enseñanza de la matemática en la escuela según Brousseau corresponde a un proceso de enculturación y a otro de adaptación independiente, por tal razón se considera fundamental estudiar cuales son las condiciones necesarias para que se produzca el aprendizaje de los saberes matemáticos en la escuela. En particular, existe un interés por comprender y modelar los comportamientos de los estudiantes cuando se presenta un medio, en este caso un problema. *"Un problema debe considerarse como un dispositivo, como un medio que responde a un sujeto siguiendo algunas reglas"* (Brousseau, 2007, p.15). Teniendo en cuenta que el medio se convierte en un sistema autónomo que determina la adquisición del conocimiento (el aprendizaje), Brousseau desarrolla un modelo de interacción de un sujeto con cierto medio, al cual denomina "situación".

La concepción de aprendizaje que se asume en la TSD puede inscribirse dentro de una teoría constructivista, puesto que se considera que el sujeto aprende como resultado del proceso de adaptación al medio creado por la situación. En este sentido, puede decirse que la adquisición y construcción del conocimiento está medida por los intercambios que se dan a partir de la búsqueda de relaciones y los procesos de reorganización y reformulación de los conocimientos que generan las situaciones planteadas en el aula de clase.

"El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje" (Brousseau, 2007, p.30). Teniendo en cuenta, que el conocimiento corresponde a una adaptación de la humanidad para enfrentar y dar respuesta a situaciones problema, se hace necesario entonces que en la escuela y de manera particular en la clase de matemáticas el docente diseñe e implemente un conjunto de situaciones didácticas que posibilite al estudiante establecer interrelaciones con los saberes para que se produzca un determinado aprendizaje.

De manera sintética puede definirse que la teoría de las situaciones didácticas surge con la finalidad de estudiar y modelar los fenómenos didácticos que ocurren cuando se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos en el contexto escolar. En particular, describe un modelo de producción de los conocimientos matemáticos a partir de dos tipos de interacciones: la interacción del estudiante con una situación problema que pone en juego determinados saberes y la interacción entre el docente y el estudiante mediada por la puesta en acto de la situación problema.

En el marco del desarrollo de la teoría de las situaciones didácticas se definen los siguientes conceptos: situación didáctica, situación adidáctica, situación fundamental, objetivo-obstáculo, transposición didáctica, contrato didáctico. A continuación se desarrolla cada uno de los conceptos.

2.1.1 Situación Didáctica

Uno de los elementos que propicia la interacción entre el maestro, el estudiante y el saber, es la situación didáctica. Por tal razón, puede ser definida como una situación[2] que el maestro crea de forma intencional para que se produzca el aprendizaje de un saber matemático. La interacción que se plantea está enmarcada en un contexto didáctico, puesto que *"uno de los sujetos exhibe la intención de modificar el sistema de conocimiento de otro (los medios de decisión, el vocabulario, los modos de argumentación, las referencias culturales)"* (Brousseau, 2007, p.49).

---

[2] Recordemos que el término situación en el marco de teoría de planteada por Brousseau es "un entorno del estudiante diseñado y manipulado por el docente, que la considera como una herramienta" (Brousseau, 2007, p.17)

El maestro crea la situación teniendo en cuenta varios aspectos, el primero es la identificación del estado cognitivo de los sujetos en relación al estado inicial y el conjunto de los diversos estados posibles, entre los que se encuentra el estado final que corresponde a la solución de la situación. El segundo corresponde a la transformación que realiza del conocimiento construido en la comunidad matemática para que se convierta en saber que pueda ser enseñado y aprendido. El tercer aspecto considera que cada conocimiento matemático tiene al menos una situación que los caracteriza y lo diferencia de los demás. El cuarto involucra la explicitación y control de las variables didácticas que son determinantes para que se dé la aparición del conocimiento matemático que se quiere movilizar con la situación, dichas variables son denominadas variables de comando[3]. El último elemento corresponde al análisis a priori de las posibles decisiones y estrategias que el estudiante puede utilizar para llegar a la solución de la situación.

La situación didáctica propuesta en el aula necesita ser desarrollada a partir de una secuencia de situaciones denominadas situación de acción, situación de formulación, situación de validación, situación de institucionalización.

En la **situación de acción** se favorece el proceso de interacción entre el estudiante y el medio físico. A partir de la toma de las decisiones que se materializan en las diferentes estrategias y conocimientos previos a utilizar en la resolución del problema planteado. *"Una estrategia nueva se somete a la experiencia y puede ser aceptada o rechazada según su eficacia. La sucesión de situaciones de acción constituye el proceso por el cual el alumno va a "aprenderse" un método de resolución de su problema"* (Brousseau, 2007, p.21).

[3] Variables que pueden ser manipuladas por el maestro para hacer evolucionar los comportamientos de los estudiantes.

La **situación de formulación** tiene como objetivo la comunicación de la estrategia y conocimientos que propone cada sujeto para actuar sobre la situación. En dicha comunicación es necesario un proceso de retroalimentación por parte de los otros participantes de la situación y por parte del medio. Es decir, se necesita que exista la comprensión de la estrategia utilizada y que produzca un resultado satisfactorio en la solución de la situación. *"La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico)*" (Brousseau, 2007, p.25).

La **situación de validación** hace referencia a la elaboración y presentación de argumentos y demostraciones para convencer a los otros de la validez y pertinencia de las estrategias utilizadas para resolver la situación a partir de los conocimientos construidos. *"El alumno no solo tiene que comunicar una información sino que también tiene que afirmar que lo que dice es verdadero en un sistema determinado, sostener su opinión o presentar una demostración"* (Brousseau, 2007, p.23).

La **situación de institucionalización** está a cargo del maestro y tiene como finalidad dar el estatus teórico a los conocimientos válidos construidos por los estudiantes a través de las situaciones de acción, formulación y validación. Es decir, realiza el reconocimiento social y cultural del conocimiento puesto en acto en la situación. *"La institucionalización, define las relaciones que pueden tener los conocimientos o las producciones "libres" del alumno con el saber cultural o científico y con el proyecto didáctico: da una lectura de esas actividades y les da un estatuto"* (Brousseau, 1986, p.37).

2.1.2 Situación Adidáctica

Es una situación que el maestro crea teniendo en cuenta el estado cognitivo de los estudiantes y que involucra un conocimiento especifico, se presenta cuando el maestro logra que el estudiante acepte la responsabilidad de buscar de manera autónoma la solución del problema propuesto en la clase sin necesidad de ser guiado por lo que pudiera suponer que el maestro espera que aprenda:

> Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presente razones didácticas. No solo puede, sino que también debe, porque no habrá adquirido verdaderamente este conocimiento hasta no ser capaz de utilizarlo en situaciones que encuentre fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. (Brousseau, 2007, p.31).

Para que una situación sea considerada como adidáctica es necesario que pueda ser abordada sin disponer aún del conocimiento especifico que se intenta movilizar, puesto que de lo contrario no se trata de una situación de aprendizaje sino de evaluación o aplicación.

El estudiante construye el conocimiento a partir de la aplicación de diferentes estrategias de solución que son discutidas con sus pares y que son reelaboradas teniendo en cuenta el grado de éxito o de error sin necesidad de la intervención del maestro.

Fandiño (2009) plantea que el maestro en la situación adidáctica no tiene la función de mediador sino que se limita a vigilar y a orientar. Cuando identifica que algún estudiante llegó a la construcción del conocimiento implicado motiva al estudiante a comunicar y validar la solución encontrada, luego el maestro realiza el proceso de institucionalización, es decir, la formalización de los conocimientos desde un estatus teórico.

2.1.3 Situación Fundamental

Este concepto remite a que cada conocimiento matemático se caracteriza por tener asociado a un conjunto de problemas o de situaciones adidácticas, en las que dicho conocimiento se constituye en una recurso de resolución.

Las situaciones fundamentales se convierten en el medio para determinar la interacción entre el estudiante y el conocimiento, por tal razón es necesario que el maestro identifique las diferentes variables que pueden ser utilizadas para que estas situaciones se conviertan en una oportunidad de un aprendizaje significativo.

2.1.4 Objetivo – Obstáculo

El concepto de Objetivo-Obstáculo se refiere a que el proceso de conocimiento en los sujetos lleva implícitamente la necesidad de reconocer al objeto de conocimiento como un obstáculo que debe ser superado a través de acciones mentales para lograr su comprensión y apropiación. Por esto, la TSD plantea que las situaciones de aprendizaje de los saberes en el aula deben ser organizadas a partir del reconocimiento de los problemas que puede darse entre el objeto y su representación. En este aspecto vale la pena aclarar que la representación que logra un sujeto está dada inicialmente por la noción que tiene del objeto a partir de las experiencias e informaciones a través de la interacción con el medio. La escuela debe hacer que exista la formalización de esa noción para que se convierta en un concepto.

En relación al interés particular de esta investigación, se puede plantear que el aprendizaje del número racional tiene obstáculos de naturaleza ontogenética (relacionados al estudiante y su edad mental), de naturaleza epistemológica (relacionados a la constitución del saber al interior de las matemáticas) y de naturaleza didáctica (relacionados con el maestro y sus elecciones).

Fandiño (2009) plantea algunos ejemplos que materializan los diferentes obstáculos en relación al aprendizaje de las fracciones. Entre los ***obstáculos ontogenéticos*** se encuentra la construcción cognitiva del número racional como clase de equivalencia[4] de parejas de naturales (el segundo de los cuales es distinto de cero). Los ***obstáculos didácticos*** más reiterados se tienen la presentación única de la definición de fracción como las partes sombreadas de una unidad dividida en partes iguales; la utilización de modelos concretos para representar el concepto de fracción y la introducción de registros semióticos distintos para que el estudiante realice la conversión de forma espontánea. En cuanto a los ***obstáculos epistemológicos*** son presentado o por la historia de la matemática o por la vida en el aula. Conceptos que en la historia crearon fracturas, discusiones, dificultades de nuevo se hacen presentes en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, por ejemplo la reducción de la fracción a los mínimos términos, el paso de las fracciones a los números decimales, el manejo del cero en las fracciones.

[4] Un ejemplo de una clase de equivalencia del número racional es $\frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \ldots.\right\}$

2.1.5 Transposición Didáctica

La Transposición Didáctica es un concepto que hace referencia a las modificaciones o transformaciones que sufre el saber científico para que pueda ser transmitido y apropiado por sujetos dentro del contexto escolar. La teoría de las situaciones didácticas reconoce que el saber producido en la comunidad científica es un saber riguroso y abstracto. Debido a que éste es el resultado de la sistematización y organización de las teorías que permiten explicar fenómenos y solucionar problemas que son objeto de estudio al interior de las ciencias. En este sentido, la escuela no puede reproducir el saber tal y como se concibe en la ciencia, sino que debe realizar un proceso de adaptación para que dicho saber pueda ser enseñado.

Fandiño (2009), plantea que la transposición didáctica tiene un carácter obligatorio en el aula, sin importar la edad del estudiante o su situación cognitiva, la tarea fundamental del maestro será pensar las formas de comunicación del saber académico a partir de un proceso de reinvención y de búsqueda de medios para que se logre su comprensión y apropiación.

Teniendo en cuenta que el objeto de esta investigación corresponde al aprendizaje del número racional en estudiantes de sexto grado de la educación básica es pertinente mencionar que el concepto de número racional desde la estructura numérica que los sustenta: definiciones, teoremas, propiedades, relaciones y operaciones requiere de una obligada transformación para que el estudiante adquiera unas competencias básicas que le permitan modelar situaciones de la vida cotidiana, de las ciencias naturales, sociales y de las mismas matemáticas.

El aprendizaje de las matemáticas en la educación básica tiene como finalidad que los estudiantes utilicen el sistema de los números fraccionarios y sus distintos sistemas simbólicos: fracción, decimal y porcentaje. Para ello será necesario que el maestro diseñe de manera intencional y reflexiva situaciones didácticas que involucren sus diferentes significados y representaciones, a la igual quela explicitación de las relaciones existentes.

2.1.6 Contrato Didáctico

Brousseau define el contrato didáctico como:

> En una situación de enseñanza, preparada y realizada por un maestro, el estudiante tiene generalmente como tarea resolver el problema (matemático) que se le presenta, pero el acceso a esta tarea se hace a través de una interpretación de las preguntas planteadas, de las informaciones suministradas, de las obligaciones impuestas que son constantes del modo de enseñar del maestro. Estas costumbres (especificas) del maestro esperado por el estudiante y los comportamientos del estudiante, esperados por el docente, constituyen el contrato didáctico. Brousseau (citado por Fandiño, 2009, p.157).

A parir de la definición anterior se puede decir que el contrato didáctico se convierte en el instrumento que determina el conjunto de reglas para que se dé la relación entre el estudiante, el profesor y el saber objeto de enseñanza. Por tal razón, tiene un papel fundamental en el proceso de transposición didáctica, puesto delimita los comportamientos y responsabilidades de los sujetos involucrados en el acto educativo. El contrato didáctico no se da de manera explícita, sin embargo cada uno de los participantes lo conoce y se pone en acto con el colectivo de la clase para el desarrollo de las situaciones didácticas.

2.2 INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En la actualidad se reconoce que el concepto de fracción se constituye en un instrumento fundamental para acceder a la construcción del número racional. En palabras de Obando (2003), "*el concepto de fracción es la fuente fenoménica del número racional"* (p.164). Esta afirmación está sustentada en la variedad de investigaciones enmarcadas en el campo de la educación matemática que en los últimos años han tenido como objeto de estudio la enseñanza y aprendizaje de los racionales en la educación básica; y las cuales se han desarrollado desde diferentes perspectivas: didácticas, epistemológicas, cognitivas, culturales, entre otras.

Los resultados de las investigaciones permiten reconocer que la construcción del número racional tiene un carácter complejo debido a su naturaleza, en particular a la variedad de significados y representaciones que puede tener. Es por ello que el estudio y aprendizaje de este concepto en la escuela debe ser abordado desde situaciones que lo doten de sentido y que permitan la comprensión y manipulación de sus diferentes representaciones.

En el diseño e implementación de esta situación didáctica se tiene como referencia las investigaciones centradas en las diferentes interpretaciones del número racional en las que se encuentran las propuestas por Kieren, 1981; Freudenthal, 1983; Ohlsson, 1988; Llinares y Sánchez, 1988; Hunting y Davis (1991); Fandiño, 2009. A continuación se plantea algunos aspectos fundamentales de cada una de las investigaciones citadas a partir de los elementos propuestos por Pontón (2003, 2012).

2.2.1 Investigaciones sobre las diferentes interpretaciones del Número Racional

Kieren 1981, considerara los números racionales desde cuatro constructos teóricos, en los que operan la equivalencia y partición como mecanismos constructivos: medida, razón, cociente y operadores.

- **Número Racional como *medida*:** relación parte – todo y medición de regiones geométricas, conjuntos discretos, recta numérica involucrando ideas de longitud y área. m/n representa parte de una cantidad.
- **Número racional como razón.** Noción de magnitudes relativas. Razón es índice de comparación más que un número. El símbolo m/n (m de cada n) representa la relación entre dos cantidades.
- **Número racional como *divisiones indicadas y elementos de un campo cociente*.** Parte formal de los números racionales ligados a sistemas algebraicos abstractos. El símbolo m/n representa una división indicada.
- **Número racional como *operador*.** Opera como una función. El símbolo m/n representa la manera como un objeto o cantidad se transforma.

***Freudenthal* (1983),** plantea cuatro aspectos fundamentales de la comprensión de las fracciones, desde la actividad matemática que desarrollan los estudiantes a través de la experiencia cotidiana y las mismas matemáticas. Estos aspectos son:

- La fracción como *fracturador* se caracteriza en primera instancia por requerir de un objeto concreto que es sometido a una distribución, a través de métodos primitivos, en partes iguales y luego a una comparación directa entre las partes y el todo. Según este enfoque, otro aspecto que caracteriza a la fracción como fracturador es que es unidireccional, lo que le permite tener en cuenta a las fracciones propias, pero crea insuficiencias al abordar fracciones impropias y mixtas. Desde este fenómeno se plantea que debe existir un todo que pueda ser dividido de alguna manera en partes iguales, ya sea mentalmente o por acción directa. Con base en lo anterior, el todo se configura, según su naturaleza, en discreto o continuo, en definido o indefinido y, según el modo de división, en estructurado o carente de estructura.

- Fracción desde la relación parte- todo: "…enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte-todo" es algo bastante limitado no solo fenomenológicamente, sino también matemáticamente este enfoque produce solo fracciones propias". En ésta frase, Freudenthal plantea las limitaciones fenomenológicas que, según él, solo produce fracciones propias. La fracción es analizada como un todo separado en partes iguales a través de actividades como separar, cortar, rebanar o colorear. El todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o no estructurado.
- La fracción como comparador. Esta noción extiende el concepto de parte de un todo a una en la cual las partes de un diferente todo se comparan. Esta noción extiende el concepto de fracción más grande que uno. La fracción como fracturador implica una distribución de una unidad en partes iguales, distribución que no siempre es exacta porque en ocasiones aparece un residuo, el cual remite al problema de fracturarlo de nuevo en partes iguales. Es aquí donde la magnitud es tomada como herramienta en la tarea de distribución de la unidad por su carácter continuo, lo que permite realizar divisiones más precisas. Además, la magnitud permite salirse del carácter concreto de la fracción y representar fuera de la forma las partes iguales a partir de la definición de clases de equivalencia. Es importante tener en cuenta que la didáctica de las magnitudes no puede ser construida aislada de las fracciones, puesto que estas requieren de las magnitudes para ser enfocadas didáctica y fenomenológicamente.
- La fracción como operador aparece como un transformador dinámico que actúa sobre una cantidad o magnitud transformándola en otra.

Ohlsson (1988), plantea una caracterización semántica para las fracciones con relación a su significado matemático y su significado aplicacional, lo cual representa un avance significativo en la caracterización de la problemática alrededor de la enseñanza de los números racionales, al mostrar cómo pueden ser interpretadas las fracciones desde los siguientes cuatro subconstructos:

- El constructo de la *función cociente*, las fracciones son interpretadas como el resultado entero de un cociente, el cual tiene los siguientes significados aplicacionales: particiones que se refiere a la cantidad representada por cada una de las partes resultantes de la partición, acortamientos que se toman como la cantidad que debe ser acotada justo en el momento después que el acortamiento haya sido realizado, extracción, es decir, el número de veces que se realiza la extracción y los cocientes cartesianos que se refieren a los cocientes en los cuales una cantidad multidimensional es dividida entre una de las magnitudes que componen sus dimensiones.
- El constructo *de número racional*, desde el cual se hace una interpretación de la fracción desde la perspectiva de la medición, donde el símbolo x/y representa un cociente cuyo resultado no es un número entero, teniendo los siguientes significados aplicacionales: la fracción decimal y la medida fraccionaria que es un submúltiplo de una unidad patrón determinada.
- El constructo de los *vectores binarios*, el símbolo x/y ya no es tratado como un cociente, sino como una pareja ordenada (vectores binarios) la cual tiene los siguientes significados aplicacionales: las razones que se refieren a la comparación cuantitativa entre una cantidad con respecto a otra tomada como referencia, ratas como un caso especial de razón en la cual se expresa la variación de una cantidad como función del tiempo, proporciones (igualdad entre razones) y las cantidades intensivas que son un caso especial de razones en las cuales el resultado de la comparación da una nueva entidad con significado físico propio.

- El constructo de la *función compuesta*, cuyo significado aplicacional es el operador fraccionario. En este caso, para una fracción dada tanto el numerador como el denominador denotan una operación (función) a realizar.

Llinares y Sánchez (1988) construyeron un conjunto de sugerencias para las prácticas de enseñanza y de reflexiones sobre los posibles resultados del aprendizaje de la aritmética y, en ella, de las fracciones. Identifican y caracterizan los contextos que resultan ser más significativos en la enseñanza, aprendizaje y uso de las fracciones y para ello toman como base las investigaciones de algunos autores como Kieren (1976), Behr (1983), y Dickson (1984), fundamentados en estos proponen la siguiente estructura de interpretación de las fracciones:

1. Relación parte-todo y la medida.
   a. *Representaciones en contextos continuos y discretos*
   b. *Decimales*
   c. *Recta numérica*
2. Las fracciones como cociente
   a. *División indicada*
   b. *Como elemento de un cuerpo cociente*
3. Fracción como razón
   a. *Probabilidades*
   b. *Porcentajes*
4. La fracción como operador.

Fandiño (2009) se interesa por especificar las diferentes formas de entender el concepto de fracción, considerando las diferentes terminologías, las acepciones y las diferentes formas de entender las fracciones desde el saber matemático, consideradas en las investigaciones realizadas a partir de los años 70. En concreto plantea los principales significados de la fracción que se asumen en el proceso de enseñanza y aprendizaje y que generan sentido al concepto, los cuales son:

- La fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua y a veces discreta
- La fracción como cociente
- La fracción como relación
- La fracción como operador
- La fracción como puntajes
- La fracción como número racional
- La fracción como punto de una recta orientada
- La fracción como medida
- La fracción como indicador de cantidad de elección
- La fracción como porcentaje
- La fracción como lenguaje cotidiano

Finalmente podemos mencionar brevemente las investigaciones de Vergnaud (1988); Hunting y Davis (1991); Block (2001) las cuales centraron la atención entre el vinculo que existe entre la noción de razón y el aprendizaje del número racional.

Los trabajos desarrollados por Vergnaud (1988); sobre las estructuras multiplicativas permitieron reconocer que la noción de razón se encuentra en la intersección de la proporcionalidad y los números racionales, desde una perspectiva didáctica. Se considera que la adquisición de aspectos fundamentales del número racional se registra en el marco de las relaciones de proporcionalidad, a la vez que la resolución de problemas de proporcionalidad puede requerir, en algunos casos, de la aplicación de herramientas aritméticas, en particular, el cálculo con fracciones y decimales.

> No resulta sensato estudiar el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones y de las razones independientemente de las estructuras multiplicativas. Es solo hasta que todos estos significados se sintetizan el concepto de número racional que es posible pensar en las fracciones y razones como puros números Vergnaud, citado por Block (2007)

Hunting y Davis (1991) desarrollaron actividades didácticas sobre distintas competencias para activar las fracciones en contextos discretos y continuos: también analizaron la relación entre la idea de razón y el primer aprendizaje de las fracciones, sugiriendo desarrollar una didáctica de los dos conceptos al unísono, desde el principio.

Block (2001) desarrolló varias secuencias didácticas donde analizó el papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria, encontrando que la noción de razón precede a la noción de fracción, tanto en su papel de expresar medidas, como en su papel de expresar operadores multiplicativos.

3. LA ESTRATEGIA METODOLÓGICA DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado se describe el marco metodológico que guía la investigación a partir de los siguientes elementos: la definición del enfoque de investigación elegido; la caracterización de la población objeto de estudio y el planteamiento de los elementos teóricos que involucra la ingeniería didáctica como metodología propia de investigación en didáctica de las matemáticas.

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN: la investigación propuesta está inscrita en un enfoque cualitativo, en particular se desarrollará una investigación de tipo descriptivo-correlacionar por las siguientes razones:

1. Es descriptivo porque se realizará la descripción y análisis de los resultados alcanzados por los estudiantes de sexto grado al implementar una situación didáctica centrada en la conceptualización del número racional a partir del significado de la fracción como razón.

2. Es correlacionar porque es posible establecer una relación causal entre la pertinencia y potencia de la utilización de situaciones didácticas que involucren el significado de la fracción como razón y su efecto en el aprendizaje del número racional.

3.2 POBLACIÓN

La implementación de la situación didáctica se realiza en un grupo del grado sexto de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza del año lectivo 2014. Esta institución es de carácter oficial, ubicada en el corregimiento de Amaime zona rural del municipio de Palmira y está conformada por cuatro sedes de las cuales tres tienen ciclo de educación básica y media académica. Para la implementación de la secuencia didáctica se eligió el grado sexto (6-1) perteneciente a la sede principal, puesto que actualmente en este nivel desempeño la labor pedagógica. Este grado es conformado por 8 niños y 12 niñas, cuyas edades se encuentran en un rango entre 11 a 15 años.

3.3 INGENIERÍA DIDÁCTICA

Esta investigación tiene como propósito realizar una intervención de carácter experimental en el aula a partir del diseño e implementación de una secuencia didáctica para la conceptualización del número racional, por tal razón la metodología a utilizar se fundamentará en algunos elementos característicos de la ingeniería didáctica.

> La ingeniería didáctica surge en el marco de los estudios sobre didáctica de las matemáticas a comienzos de los años ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero quien, para un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Sin embargo, al mismo tiempo, se encuentra obligado a trabajar con objetos mucho más complejos que los objetos depurados de la ciencia y, por lo tanto, tiene que abordar prácticamente, con todos los medios disponibles, problemas de los que la ciencia no quiere o no puede hacerse cargo. (Artigue, 1995, p. 33)

Esta metodología es pertinente al objetivo de esta investigación porque posibilita una participación activa del investigador a partir de la puesta en acto de una situación didáctica diseñada con el fin de lograr el aprendizaje del número racional. Además permite la comprensión y reflexión sobre los procesos de interacción que se dan entre los elementos del sistema didáctico: estudiante, profesor, saber.

La ingeniería didáctica tiene dos características fundamentales, la primera corresponde a que las intervenciones didácticas experimentales están sustentadas en un marco teórico, el cual es utilizado como referencia para el diseño, la implementación e interpretación de los resultados de la situación didáctica. Este marco teórico no solo funciona como base, sino que también se pone a prueba para determinar su validez en la consecución de los objetivos de aprendizaje. La segunda característica corresponde a la utilización de estudios de caso y el tipo de validez que se genera al contrastar las hipótesis formuladas con los resultados obtenidos. La validación característica de la ingeniería didáctica es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis a priori (variables de control de la situación de enseñanza) y el análisis a posteriori (análisis de los datos obtenidos en la experimentación).

El tipo de validez que genera la metodología de ingeniería didáctica difiere del tipo de validez que generalmente se asocia a las investigaciones que utilizan la experimentación en clase, la cual corresponde a una validez externa basada en la comparación estadística del rendimiento de grupos experimentales y grupos de control.

Teniendo en cuenta las características de la ingeniería didáctica, se puede plantear que el marco teórico que sustenta el diseño, implementación y análisis de la situación didáctica puesta en acto en esta investigación corresponde a la teoría de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau. El registro del estudio de caso de esta investigación es un grupo conformado por 20 estudiantes de grado sexto de la educación básica de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza, institución de carácter oficial ubicada en la zona rural de Palmira. La situación didáctica diseñada se tomará coma base para estudiar los conceptos correspondientes al currículo de matemáticas en relación al pensamiento numérico durante el tercer periodo del año escolar.

La metodología ingeniería didáctica se organiza partir de cuatro fases: análisis preliminar; análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería; experimentación; análisis a posteriori y evaluación. El énfasis que se dará en esta investigación corresponde a la confrontación entre el *análisis a priori* del diseño de las situaciones que conforman la situación didáctica y el *análisis a posteriori* desde la presentación y análisis de los resultados a partir del marco teórico que sustenta la situación didáctica. Estos análisis se consideran elementos claves para la organización de los intercambios de los estudiantes de manera productiva y para la significación de los comportamientos observados durante la ejecución de las situaciones que buscan la validación del conocimiento matemático en los contextos escolares.

3.4 FASES DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

A continuación se explicita los propósitos de cada fase en relación a los objetivos de esta investigación.

Fase de análisis preliminar, comprende la fase de concepción basada en el marco teórico didáctico general y los conocimientos didácticos adquiridos y relacionados con el tema. Los análisis preliminares más frecuentes son (Artigue, 1995, p.38):

- El análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza
- El análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos
- El análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución

- El análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

Teniendo en cuenta los objetivos de esta investigación en la fase del análisis preliminar se retomará los siguientes aspectos: en primer lugar se realizará un análisis general sobre la enseñanza y aprendizaje de los racionales a partir del estudio de algunas investigaciones de carácter didáctico sobre la comprensión de los números racionales en la educación básica. En segundo lugar, se realizará la explicitación de los referentes curriculares y matemáticos que sustentan el diseño e implementación de la secuencia didáctica. En tercer lugar, se realizará el diseño y aplicación de una prueba diagnóstica para conocer cuál es el estado inicial de los aprendizajes logrados por los estudiantes de sexto grado en relación al número racional y sus diferentes significados. Esta información será un insumo fundamental para el diseño de las situaciones que se someterán a la experimentación en el aula.

Artigue (1995), plantea que los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de “preliminares” en un primer nivel de elaboración. Después en el análisis *a posteriori* van tomando distintos lugares y funciones en la investigación.

Fase análisis *a priori*, en esta segunda fase, el investigador plantea las variables de comando[5] que pueden: ser controladas dentro de la situación de experimentación; son pertinentes con relación al problema estudiado; y son necesarias para la adquisición del conocimiento.

---

[5]Se puede distinguir dos tipos de variables para facilitar el análisis de la ingeniería: las variables macro-didácticas o globales, concernientes a la organización global y las variables micro-didácticas o locales, concernientes a la organización local, es decir la organización de una secuencia o de una fase (Artigue, 1995, p. 42)

El propósito fundamental de esta fase es controlar los comportamientos de los estudiantes y su significado. Tradicionalmente este *análisis a priori* comprende una parte descriptiva y una parte predictiva, en particular (Artigue, 1995, p.45):

- Se describen las elecciones locales (relacionándolas con las globales) y las características de la situación didáctica que de ellas se desprenden.
- Se analiza qué podría aprender en esta situación un estudiante en función de las posibilidades de acción, decisión, control y validación de las que dispone, una vez puesta en práctica, cuando trabaja independientemente del profesor.
- Se prevén los comportamientos posibles y se trata de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, que, si se producen los comportamientos esperados, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento pretendido por el aprendizaje.

En esta investigación la fase de *análisis a priori* se materializa en un primer momento en la explicitación del componente matemático que se pone en juego en cada situación que conforma la secuencia. En un segundo momento, se plantea el conjunto de hipótesis sobre el desempeño esperado del estudiante en relación al desarrollo de las situaciones y al tipo de interacciones que se privilegiarán en la fase de experimentación. Es necesario mencionar que el diseño y análisis de las situaciones didácticas que conformaran la secuencia didáctica se realizarán teniendo como referencia la clasificación que plantea Guy Brousseau en relación a la clase de situaciones que se deben tener en cuenta para la experimentación en el aula: situaciones de acción, situaciones de formulación, situaciones de validación y situaciones de institucionalización.

Fase de experimentación, se refiere a la aplicación de la situación didáctica y a la recolección de la información (producciones de los niños) que serán el insumo para realizar el *análisis a posteriori*. La ejecución de los diseños de las situaciones se realizará a partir de la organización de la clase desde una perspectiva dialógica, favoreciendo espacios de interacción para que los estudiantes expongan, expliquen y argumenten los procedimientos y estrategias utilizadas en el desarrollo de las situaciones de aprendizaje. De esta manera, los estudiantes pueden contrastar la pertinencia de los procedimientos utilizados y así validar e institucionalizar el procedimiento más potente desde el punto de vista matemático.

En el diseño y aplicación de la situación didáctica de esta investigación se reconoce la importancia de la interacción social en la clase tanto del maestro con los estudiantes y de los estudiantes entre sí. Esto se debe a que los procesos de enseñanza y aprendizaje se producen siempre en un contexto social en caso de la educación formal es la institución escolar y el aula; en dicho contexto se produce siempre un proceso de interacción entre el profesor y el estudiante y el objeto de conocimiento. Propiciar espacios de interacción en la clase donde los estudiantes den cuenta de los procesos utilizados en la ejecución de la tarea, lleva necesariamente a realizar procesos de negociación de significados para avanzar en la comprensión y movilización de los conceptos matemáticos estudiados.

El desarrollo de la fase de experimentación se realizará en tres momentos: trabajo individual, trabajo en grupo y plenaria de discusión. En el primer momento los estudiantes deben resolver cada situación a partir de sus conocimientos previos y del establecimiento de relaciones; el rol del docente en este momento de la clase corresponde al planteamiento de preguntas que favorezcan la comprensión de las consignas de cada situación.

En un segundo momento, se solicitará la organización en grupos de tres estudiantes para que cada uno comunique los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos al resolver la situación propuesta. Para luego llegar a un acuerdo y elegir la estrategia más pertinente para el desarrollo de la situación. En este momento, el papel del docente es acompañar y mediar la discusión e interacción en torno a la búsqueda de la validación del conocimiento matemático.

El tercer momento de organización de la clase corresponde a la plenaria de discusión, en esta se elige algunos integrantes de los grupos de trabajo para que compartan la estrategia elegida por ellos para resolver la situación propuesta y a la vez se le propicia el espacio para que expresen las dificultades que presentaron en la comprensión y desarrollo de la situación. Este momento puede ser comprendido como la presentación del producto obtenido al realizar la interacción grupal.

El papel del docente en el momento de la plenaria de discusión es guiar el proceso de institucionalización de los saberes. Respecto a esto Brousseau (citado por Chavarría, 2006) considera que la *institucionalización del saber*, representa una actividad de suma importante en el cierre de una situación didáctica**.** En ésta los estudiantes ya han construido su conocimiento y, simplemente, el docente en este punto retoma lo efectuado hasta el momento y lo formaliza, aporta observaciones y clarifica conceptos ante los cuales en la situación a-didáctica se tuvo problemas. Es presentar los resultados, presentar todo en orden, y todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento.

En la fase de experimentación la recolección de los datos puede ser complementada con la utilización de metodologías externas, como observaciones, toma de registros, cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicada en distintos momentos de la enseñanza o durante su transcurso. (Artigue, 1995, p.48). En relación al énfasis delimitado en esta investigación (confrontación entre el *análisis a priori y análisis a posteriori*) se tendrá en cuenta las observaciones y el registro de las producciones de los alumnos. En particular, las observaciones se realizarán a partir de video grabaciones de algunas sesiones de clase y las producciones de los estudiantes se registrarán con base a los apuntes y consignaciones llevadas a cabo en los cuadernos o en las hojas de las situaciones dadas en clase.

Fase de análisis a *posteriori* y validación, esta fase corresponde a la confrontación de las hipótesis planteadas en el *análisis a priori* del diseño de las situaciones que conforman la secuencia con los resultados obtenidos en la fase de experimentación. Es necesario mencionar que *el proceso de validación interna que se pone en juego en la metodología de ingeniería didáctica no se fundamenta en el principio que las diferencias mensurables constatadas se relacionan con las variables de comando sobre las cuales se ha influenciado para diferenciar clases experimentales y clases de control* (Artigue, 1995, p.48). Sino que corresponde más a un proceso de evaluación de los aprendizajes logrados en relación a la potencia y pertinencia de la situación didáctica puesta en acto con la finalidad de la movilización del conocimiento matemático en el aula de clase.

En la investigación propuesta el *análisis a posteriori* se centra en la descripción y análisis de los procedimientos (escritos y orales) utilizados, teniendo en cuenta lo propuesto en los enunciados de cada situación y las exigencias cognitivas en términos del conocimiento matemático requerido desde lo planteado en el *análisis a priori*.

A continuación se presenta una tabla de las fases de la metodología ingeniería didáctica en relación a los objetivos de esta investigación.

Tabla 1. Objetivos y fases de la investigación

OBJETIVO GENERAL	OBJETIVOS ESPECIFICOS	FASES INGENIERÍA DIDÁCTICA
Medir el alcance del significado de la fracción como razón en una situación didáctica y su efecto en el aprendizaje del número racional en estudiantes de sexto grado de la Educación Básica de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza.	**1.** Diseñar una situación didáctica a partir del significado de la fracción como razón.	Análisis preliminar Análisis a priori
	2. Implementar la situación didáctica y observar su efecto en el aprendizaje del número racional.	Experimentación
	3. Contrastar el comportamiento de la situación didáctica en el aprendizaje del número racional.	Análisis a posteriori y validación
	4. Sistematizar los resultados obtenidos al aplicar la situación didáctica.	Análisis a posteriori y validación

4. ANÁLISIS PRELIMINAR

El presente apartado se explicita los aspectos tenidos en cuenta en la primera fase de la ingeniería didáctica que corresponde al marco metodológico de esta investigación. En particular, la fase de análisis preliminar se desarrolla a partir de los siguientes aspectos: el estudio de los referentes curriculares a tener en cuenta para el diseño de la secuencia didáctica; el análisis matemático de los números racionales y la definición del significado de la fracción como razón, el cual es el significado privilegiado para el diseño de las situaciones didácticas que conforman la secuencia. Finalmente, se describe el contenido de la prueba diagnóstica que tiene como finalidad identificar el estado inicial de los aprendizajes logrados por los estudiantes en relación al número racional y se realiza el análisis de los resultados obtenidos para identificar cuáles son las posibles dificultades y concepciones que los estudiantes tienen sobre el número racional.

4.1 REFERENTES CURRICULARES

Los referentes curriculares que se tienen en cuenta para el diseño e implementación de la situación didáctica son los definidos por el Ministerio de Educación Nacional en los diferentes documentos publicados tales como:

- Lineamientos curriculares de matemáticas (1998)
- Estándares básicos de competencias en matemáticas (2006)

En estos documentos se propone unos nuevos elementos teóricos y metodológicos que pretenden reformar y actualizar la estructura curricular de la educación matemática. En particular, se identifica y desarrolla dos aspectos fundamentales:

- La introducción de los diferentes tipos de pensamientos matemáticos (numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio)
- El desarrollo de procesos tales como razonamiento, resolución de problemas, comunicación, modelación, elaboración, comparación y elaboración de procedimientos, que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos que provienen de las mismas matemáticas, de la vida diaria o de otras ciencias.

Los aspectos propuestos en los lineamientos curriculares se retoman en la formulación de los estándares de competencias en el año 2006.

La situación didáctica propuesta se centra en el desarrollo del pensamiento numérico y los sistemas numéricos*…"este pensamiento se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y operaciones.* Mcintosh (citado por MEN, 1998, p. 43).Este pensamiento incluye la comprensión de los números y la numeración, la comprensión del concepto de las operaciones, sus propiedades, las relaciones entre ellas, los cálculos, las estimaciones y las aplicaciones de dichas operaciones en diferentes contextos.

La formulación de los estándares en este pensamiento numérico puede ser clasificada en tres grandes ejes temáticos[6]:

- Aspectos conceptuales del número
- Estructuras aritméticas (aditivas y multiplicativas)

---

[6]Esta clasificación y caracterización se realiza a partir de los aspectos propuestos en el documento: *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Gobernación de Antioquia, Secretaria de Educación. 2005

- Numeración y cálculo.

El eje temático del concepto de número hace referencia a dos temáticas: el uso, sentido y significados de los números, y a la construcción de los sistemas numéricos. La primera de estas temáticas se desarrolla a partir de situaciones cotidianas en las que el número toma diferentes significados: cardinal, medida, ordinal, código, secuencia. Por otra parte, la construcción de los sistemas numéricos toma como punto de partida el trabajo con las magnitudes y sus medidas: la medida de magnitudes continuas[7], así como el conteo en las magnitudes discretas[8], son la fuente a través de la cual el concepto de número adquiere sentido. Así pues, el énfasis en el proceso de construcción del concepto de número propuesto en los estándares no es a partir de la noción de conjunto, sino de la medida de magnitudes. Es decir, no se trata de aprender el número a través del trabajo con los conjuntos para luego tener la oportunidad de aplicarlos a la solución de situaciones de medición y conteo, sino por el contrario a través de enfrentarse a las situaciones de medición y conteo se puede lograr el desarrollo de los procesos de conceptualización sobre los números.

La operación de contar es eje central en la construcción de los números naturales. O dicho de otra forma, la construcción del sistema de los números naturales (sus objetos: los números; sus relaciones: de orden y equivalencia; sus operaciones: suma y multiplicación) tiene en el conteo un punto de apoyo fundamental para el desarrollo de su proceso constructivo.

De otra parte, en el caso de medir magnitudes continuas, puede suceder que la unidad de medida utilizada esté contenida un número exacto de veces en la magnitud que se mide, y por tanto, la medida se expresa a partir de un número

---

[7] Puede tener infinitos valores dentro de cualquier intervalo finito. Ejemplo: longitud, peso, velocidad, tiempo

[8] No admite valores intermedios

natural; de lo contrario, la medida debe ser expresada a partir de un número racional. Los niños desde edades muy tempranas se ven enfrentados cotidianamente a este tipo de situaciones, lo cual les permite la construcción de nociones intuitivas de racionales tales como mitad, cuarta parte, entre otras. De esta manera, el número racional es comprendido como la cantidad (número) que expresa la medida de una magnitud con respecto a otra tomada como unidad. Es decir como una relación cuantitativa entre dos magnitudes.

El eje temático de las estructuras aritméticas hace referencia a la intención de organizar los estándares de este eje temático con el fin de potenciar significativamente el trabajo de la suma y resta, la multiplicación y división desde la perspectiva de las estructuras. Es decir, mostrar que estas operaciones no existen aisladas entre sí, ni de las propiedades matemáticas, ni de las situaciones problemas que les dan sentido.

El trabajo que habitualmente la escuela ha desarrollado con las operaciones aritméticas se reduce a los procesos de cálculos convencionales (mecanización de algoritmos). Este tipo de trabajo no permite una conceptualización profunda del sentido y significado de las operaciones aditivas y multiplicativas.

El eje temático de la numeración y cálculo hace referencia a dos tipos de conceptualización una explícita y otra implícita. Son explícitos en la formulación de los estándares: el valor posicional, el efecto de las operaciones sobre los números, las propiedades de los números enteros, la notación decimal, las propiedades de las operaciones con números naturales, el cálculo exacto y aproximado, el uso de instrumentos modernos de cálculos, las diferencias entre racionales e irracionales y la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales. Los conceptos implícitos en la formulación de los estándares son: los sistemas numéricos y los sistemas de numeración.

Los estándares que hacen referencia al pensamiento numérico y sistemas numéricos que se tomarán como transversales en esta secuencia son los siguientes:

Tabla 2. Estándares Pensamiento Numérico 6º y 7º

EJES TEMATICOS	ESTÁNDARES 6º-7º
Concepto de número	• Utilizar números (fracciones, decimales, razones, porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
Estructuras aritméticas	• Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. • Justificar el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.
Numeración y cálculo	• Justificar la representación polinomica de los números racionales utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal. • Justificar operaciones aritméticas utilizando las Relaciones y propiedades de las operaciones.

4.2 ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

La situación didáctica que se plantea tiene como propósito la conceptualización del número racional desde el significado de la fracción como razón, por tanto es necesario definir qué se entiende por número racional, fracción, significado de la fracción como razón.

El número racional es entendido desde la estructura numérica[9] que lo define, es decir desde el conjunto numérico de los racionales, a partir del planteamiento de las operaciones, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, propiedades y teoremas.

La construcción de este conjunto numérico generalmente se realiza desde la extensión de los números enteros $\boldsymbol{z}$, por medio de una relación de equivalencia en $\boldsymbol{ZxZ}$. Definidos de la forma:$\boldsymbol{Q} = \{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) \in \boldsymbol{ZxZ}: \boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{0}\}$ que cumplen dos operaciones básicas: suma y producto. Las cuales se definen de la siguiente manera[10]

$(p,q) + (r,s) = (ps + qr, qs)$ $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$	$(p,q)x(r,s) = (pr, qs)\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$

---

[9]Una estructura numérica consiste en un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componer esos números y de unas relaciones, mediante las que se comparan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura numérica. Feferman (citado por Rico, L., Castro, E., & Romero, I, (2000).

[10] Se toma de referencia la construcción de los números racionales propuesta por Restrepo (1994). Fundamentos de la Matemática. Cali: Centro Editorial Universidad del Valle.

La estructura planteada reúne todas las clases de equivalencia generadas por las relaciones de equivalencia entre las expresiones fraccionarias $\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \leftrightarrow p.s = r.q$, las cuales conforman el conjunto numérico de los racionales (Q). Cada una de las clases de equivalencia está formada por infinitas expresiones fraccionarias, las cuales son equivalentes entre sí. De cada clase de equivalencia hay un representante canónico conformado por una pareja de números primos relativos; este número es la representación numérica del racional al cual corresponde la clase. De manera formal se plantea: $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}, \quad \mathrm{q} \neq 0, \quad \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \in \mathrm{Q}$

p, q son primos relativos si y solo si $(\mathrm{p}, \mathrm{q}) = 1. \qquad (\mathrm{Px} + \mathrm{qy} = 1)\ \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{Z}.$

Ejemplos de clase de equivalencias

$$\frac{1}{2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \dots.\right\}$$

$$\frac{1}{3} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \dots.\right\}$$

Cada uno de los elementos que pertenecen a la clase de equivalencia son representaciones fraccionarias, es decir, la expresión simbólica de una equivalencia de un número racional.

La estructura matemática del conjunto de los números racionales se conforma bajo las siguientes propiedades:

Tabla 3. Estructura matemática de los racionales

ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LOS RACIONALES Campo (Q,+,x)	
Suma $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}\ donde\ q,s\neq 0$	$\boldsymbol{Producto}\frac{p}{q}x\frac{r}{s}=\frac{p.r}{q.s}\ donde\ q,s\neq 0$
Asociativa $\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{t}{u}=\frac{p}{q}+(\frac{r}{s}+\frac{t}{u})$	Asociativa $\left(\frac{p}{q}.\frac{r}{s}\right).\frac{t}{u}=\frac{p}{q}.(\frac{r}{s}.\frac{t}{u})$
Conmutativa $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$	Conmutativa $\frac{p}{q}.\frac{r}{s}=\frac{r}{s}.\frac{p}{q}$
Modulativa (único modulo aditivo) $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}+\frac{0}{1}=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}\ (\mathrm{q}\neq 0)$	Modulativa (único modulo) $\frac{p}{q}.\frac{1}{1}=\frac{p}{q}$
Invertiva $\frac{p}{q}+\frac{-p}{q}=\frac{0}{q}=0$	Invertiva: Todo elemento no cero tiene inverso. $\frac{p}{q}.(\frac{p}{q})^{-1}=\frac{p}{q}.\frac{q}{p}=\frac{p.q}{q.p}=1$ $con\ (p,q\neq 0)$
Distributiva del producto (x) respecto a la suma (+) $\frac{p}{q}.\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)=\frac{p}{q}.\frac{r}{s}+\frac{p}{q}.\frac{t}{u}$	

La estructura de los racionales también cumple las siguientes afirmaciones:

a. Un número racional $x=\frac{p}{q}$ es positivo si $pq>0$, es decir, si p y q son ambos positivos o negativos. Denotaremos por Q^{+} al conjunto de los números fraccionarios positivos. Es claro que $0_Q = 0/1 \notin Q^+$ pues $0.1 = 0$

b. Si $x, y \in Q^+$ entonces $x + y \in Q^+$ y $x.y \in Q^+$.

c. Sea $x \in Q$ entonces $x \in Q^+$, ó $x \in Q^-$ ó $x = 0$

d. Sea $x, y \in Q^+$. Diremos que x es menor que y, si $y - x \in Q^+$. Escribiremos $x < y$ para indicar que x es menor que y. y $x \leq y$ para indicar que $x < y$ ó $x = y$.

e. $x \in Q^+$ si y solo si $x > 0_Q$

f. La relación $\leq en\ Q$ es una relación de orden total y compatible con la suma y el producto.

En esta investigación **la fracción** será entendida como una expresión simbólica de una equivalencia del número racional, es decir como *una representación conformada por parejas de numerales para números enteros positivos, incluyendo un separador (barra inclinada o barra horizontal): numerador⁄denominador:* a/b *, siendo el denominador distinto de cero*[11]

De manera formal la fracción se define como $\frac{a}{b}, con\ a, b \in Z^+\ y\ b \neq 0$.

El concepto de fracción no puede ser construido por fuera de dos elementos fundamentales: el primero corresponde a la interpretación de los diversos significados o constructos[12] teóricos en los cuales adquiere sentido la fracción:

---

[11] Esta definición es propuesta por Pontón, T. (2012). La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales (Tesis de doctorado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia).

[12] Constructo es entendido como una entidad conceptual que está formada por situaciones problema del mundo real, un lenguaje natural que determina el sentido, sistemas simbólicos y la teoría matemática que está involucrada. El termino constructo es planteado por Kieren (1980) en investigaciones que se centran en las diferentes interpretaciones del número racional.

medida, razón, cociente, operador; el segundo elemento corresponde a la construcción de la fracción dentro de los sistemas de numeración fraccionario y el sistema de numeración decimal. Estos sistemas de numeración son los que permiten el tratamiento aritmético de las fracciones, en particular la realización de las operaciones aditivas, multiplicativas, la simplificación y complicación, las relaciones de orden, la composición o descomposición del número.

A continuación se explícita algunas propiedades del sistema numérico de los racionales que se utilizaran en el diseños y análisis de la implementación de la situación didáctica.

4.3 PROPIEDADES DEL SISTEMA NUMÉRICO DE LOS RACIONALES

La fracción $\frac{a}{b}$ se asocia a un punto situado sobre la recta numérica en la que cada unidad de medida (segmento) se divide en b partes (o es u submúltiplo de b) congruentes de las que se toman a.

Definición 1: sea a y b son dos números naturales, donde b ≠ 0; se dice que $\frac{a}{b}$ es una fracción irreductible si a y b no tienen ningún divisor común diferente de 1, es decir   (a, b)=1

P1. **Relación de orden entre expresiones fraccionarias**

Para a, b, c, d Є Z^{+} y b, d ≠ 0

Relación menor que

Dado los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es menor que la segunda cuando se verifica:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d < b \cdot c$$

Relación mayor que

Dado los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es mayor que la segunda cuando se verifica:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d > b \cdot c$$

Relación de equivalencia

Dado los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es igual que la segunda cuando se verifica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

P2. **De expresión fraccionaria impropia a expresión fraccionaria mixta**

Para a, b, n, r Є Z^{+}; b ≠ 0

Dado una fracción $\frac{a}{b}$donde a> b, tenemos que 1 unidad completa equivalente a $\frac{a}{b}$, así: a= n (b) + r

$$\frac{a}{b} = n\left(\frac{b}{b}\right) + \frac{r}{b}\frac{a}{b} = n(1) + \frac{r}{b}\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b}$$

Notación equivalente a: $\frac{a}{b} = n\frac{r}{b}$

P3. Simplificación y complificación de expresiones fraccionarias.

Si a y b son dos números naturales, donde b≠0; se simplifica la fracción $\frac{a}{b}$ si a y b tienen un máximo común divisor (M.C.D) k ≥ 2. En este caso habrá dos números c y d tal que $a = c \cdot k \quad y \quad b = d \cdot k$, lo cual se puede escribir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c.k}{d.k} = \frac{c}{d}$$

P4. Generalización del algoritmo de la multiplicación de expresiones fraccionarias.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, para\ b, b\ \neq 0$$

P5. Generalización del algoritmo de la división de expresiones fraccionarias.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}, para\ b, c, d\ \neq 0$$

P6. Generalización del algoritmo de la adición (suma) y sustracción (resta) de expresiones fraccionarias.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm b \times c}{b \times d}, para\ b, d \neq 0$$

Al sumar o restar expresiones fraccionarias, se debe primero obtener un denominador en común y se utiliza la siguiente operación. Aunque con cualquier denominador se cumple este algoritmo, por simplicidad es mejor utilizar el mínimo común divisor (MCD)

P8. Todo entero n se puede expresar como una fracción $\frac{n}{1}$, donde n Є N

P9. **Propiedad uniforme**

Si a, b, c, d y e son dos números enteros b y d ≠ 0 entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\frac{a}{b} \cdot e = \frac{c}{d} \cdot e$$

El siguiente algoritmo es válido: $a \times d = b \times c$

Teniendo en cuenta que esta investigación gira en torno a la conceptualización del número racional desde el **significado de la fracción como razón** se hace necesaria la caracterización dicho significado.

La fracción como razón será entendida como un índice de comparación, a partir del establecimiento de una relación entre dos cantidades de igual o diferente magnitud. Las razones que comparan medidas de diferente tipo se denominan tasas, estas comparaciones describen una cualidad que es común a varias situaciones. Las razones que comparan medidas del mismo tipo pueden ser interpretadas desde dos relaciones: parte-parte y parte-todo. Respecto a esto, Lamon (citado por Flores, 2010, p. 110) plantea que las comparaciones parte-todo son razones que comparan la medida de la parte de un conjunto con la medida del conjunto completo, en contraste, las comparaciones parte-parte comparan las medidas de parte de un conjunto con las medidas de otra parte del conjunto.

En la práctica la fracción como razón desde relación de comparación parte-parte y parte-todo se explicita en el concepto de probabilidad y porcentaje.
Si se considera la razón como una forma de comparar, precisamente la probabilidad es una manera de comparación todo-todo (casos favorables vs.

Casos posibles). Los porcentajes también se asocian a una comparación parte-todo, pero vistos como relaciones entre conjuntos.

4.4PRUEBA DIAGNÓSTICA

Para iniciar el desarrollo de la investigación se diseña y aplica una prueba diagnóstica que tiene como finalidad identificar el estado inicial de los aprendizajes logrados por los estudiantes en relación a los diferentes significados del número racional y al reconocimiento de las múltiples representaciones que pueden ser usadas: verbal, gráfica, recta numérica, simbólica (fracción, número decimal, porcentaje). La prueba se aplica a los 20 estudiantes que conforman el grupo de estudio, el tiempo destinado para la aplicación es dos horas de clase (120 minutos).

El instrumento de la prueba diagnóstica está conformado por 10 situaciones problema. A continuación se explicita el significado que pone en juego cada una de las situaciones.

El primer problema requiere en su solución que el estudiante realice la representación numérica de la fracción a partir de la representación verbal, para ello es fundamental que se identifique la relación existente entre las cantidades que conforman la fracción$\frac{a}{b}$, cantidad de partes iguales en las que se ha dividido la unidad (denominador) y la cantidad de partes tomadas de la unidad (numerador).

El segundo problema corresponde a la interpretación de la representación de la fracción en la recta numérica. En la solución de la situación se hace necesario que el estudiante comprenda la fracción $\frac{a}{b}$ como un punto situado sobre una recta numérica en la que cada segmento unidad se ha dividido en b partes (o en un múltiplo de b) congruentes de las que se toma a. En este caso la fracción no representa una parte de una figura, sino un número abstracto, que puede ser pensado como una extensión de los números naturales.

El tercer problema aborda la representación gráfica de la fracción en contextos continuos, a partir de la utilización de diferentes figuras (triángulos, rectángulos, cuadrados, círculos) de las cuales se ha coloreado una cantidad determinada de partes.

El cuarto problema involucra el significado de la fracción como cociente. En particular busca que el estudiante reconozca el número racional como el resultado de una división en situaciones de reparto. Este significado tiene implícita la idea de suma y equivalencia de fracciones.

El quinto problema comprende el significado de la fracción desde la relación parte-todo. Se plantea un gráfico sobre una cuadricula que representa el área de una parcela destinada a la siembra de dos clases de caña (violeta y cristalina) y sobre este gráfico es sombreada de forma irregular una parte del área. La situación busca que el estudiante realice una comparación entre el área sombreada con el área total para determinar la fracción que representa el cultivo de caña cristalina. El procedimiento requerido para la solución de la situación es la reconfiguración del área sombreada a partir de la cual se establecerá la relación fraccionaria entre las dos superficies.

Los problemas sexto, séptimo y octavo abordan el significado de la fracción como razón, es decir como un índice comparativo entre dos magnitudes. Para la solución es necesario determinar la relación existente entre las magnitudes y por tanto reconocer que un cambio en una de las magnitudes produce un cambio en la otra. Es importante mencionar que en los enunciados de los problemas seis y siete se requiere una comparación entre magnitudes de diferente tipo (metros-minutos), (litros-gramos), y el problema octavo corresponde a una comparación entre magnitudes del mismo tipo (kilogramos)

El problema noveno incluye el significado de la fracción como porcentaje, el cual es un caso particular de la fracción como razón, donde se realiza una comparación entre un número y 100. Para solucionar la situación el estudiante deberá representar el 30% como la fracción $\frac{30}{100}$ y luego aplicar esta fracción como un operador a la cantidad de caña (120).

El décimo problema corresponde al significado de la fracción como operador, en este sentido el número racional actúa sobre una cantidad y la transforma. Para solucionar la situación el estudiante necesitará realizar una multiplicación y luego una división o la inversa.

4.5 RESULTADOS PRUEBA DIAGNÓSTICA

En junio 24 de 2014 se aplicó la prueba diagnóstica a 20 estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza de la sede central. Esta prueba tenía por finalidad obtener información sobre el estado inicial de los aprendizajes logrados en relación a la comprensión del número racional a partir de sus diferentes significados (parte-todo, medida, cociente, recta numérica, razón, operador) y representaciones (fracción, número decimal, porcentaje).

Los estudiantes realizaron la prueba de manera individual sin intervención de la maestra, las respuestas se registraron en una hoja que fue entregada al finalizar la aplicación de la prueba puesto que son la fuente de información para el análisis de los datos de la investigación.

A continuación se presenta el análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados al aplicar la prueba diagnóstica a partir de cada una de las situaciones problema propuestas.

En la primera situación el 90% de los estudiantes realizó de manera correcta la representación numérica de la fracción a partir del enunciado verbal, se evidencia el reconocimiento de los nombres de las fracciones en relación a las partes de la unidad y al significado del numerador y el denominador. El 10 % de los estudiantes resolvieron de manera incorrecta la situación debido a la inversión del orden entre el numerador y el denominador.

En la segunda situación el 10% de los estudiantes lograron identificar correctamente la fracción representada en la recta numérica. El 70% de los estudiantes presentaron dificultad por la falta de identificación de las partes en las que se había dividido cada segmento de unidad y la poca comprensión de la fracción como un número abstracto que indica una distancia entre el origen y el punto. El 20% de los estudiantes no respondieron la situación.

En la tercera situación el 55% de los estudiantes representaron la fracción a partir del contexto continuo (la superficie de un triángulo, un rectángulo, un círculo), reconociendo la relación existente entre un número de partes sombreadas de la figura y el número total de partes en las que se dividió la unidad. El 45% de los estudiantes resolvieron de manera incorrecta la situación, la dificultad se centró en la inversión de los significados del numerador y denominador. Por esta razón los estudiantes representaron numéricamente la fracción como una relación entre el total de las partes en la que estaba dividida la unidad y la cantidad de partes sombreadas.

En la cuarta situación el 70% de los estudiantes resolvieron la situación problema correctamente, identificaron el significado de la fracción como cociente. En esta situación los niños se vieron enfrentados a repartir dado un contexto discreto. La estrategia más utilizada por los estudiantes fue dividir de manera gráfica cada caña de azúcar y luego repartir a cada niño una de las mitades en las que se dividió la unidad. Un ejemplo del argumento presentado por un niño de 11 años es *“Luis debe partir las cañas a la mitad y los niños podrán comer* $\frac{1}{2}$ *de cada caña de la misma longitud”* (niño de 11 años) Teniendo en cuenta que la situación problema está recreada en un contexto discreto, entonces es muy natural que los estudiantes utilicen un proceso directo de solución (dividir-repartir). Es importante mencionar que la solamente uno de los estudiantes que respondió correctamente la situación recurrió a la noción de adición de fracciones. El procedimiento presentado consistió en la división gráfica de cada una de las cañas en seis partes y luego en el planteamiento numérico de la siguiente expresión $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$.

El 30% de los estudiantes no lograron resolver la situación puesto que recurrieron a la representación simbólica de la división indicada entre los números naturales, lo cual llevó a dos errores: en primer lugar intercambiar el orden de los números que representaban la situación ($3 \div 6$) por ($6 \div 3$), en segundo lugar desarrollar el algoritmo de la división de manera incorrecta.

La quinta situación se resolvió correctamente por el 55% de los estudiantes. Se identificó la fracción como una relación parte-todo, donde el “todo” corresponde a una unidad continua (la superficie de un cuadrado), y la parte corresponde al área sombreada de forma irregular de la figura.

Los estudiantes utilizaron dos clases de estrategias. La primera correspondió a la subdivisión de cada una de las partes del todo en mitades, puesto que en el área sombreada involucraba triángulos y cuadrados. De esta manera se designó como unidad patrón el triángulo, dando por respuesta que la fracción $\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{32}}$ corresponde al área total de la parcela destinada a la siembra de caña cristalina. La segunda estrategia utilizada por los estudiantes fue la reconfiguración de las áreas a partir de la unión de dos triángulos, con el propósito de utilizar como unidad patrón el cuadrado; la respuesta generada al aplicar esta estrategia fue la fracción $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{16}}$ la cual representa el área total de la parcela destinada a la siembra de caña cristalina. En esta estrategia se identifica la noción de equivalencia de áreas entre las figuras (diferente forma pero igual área).

El 30% de los estudiantes presentaron dificultad en la solución de la situación y el 15% de los estudiantes no respondieron la situación. Respecto a las dificultades encontradas se identifica problemas en el reconocimiento del patrón de medida del área y en la representación simbólica de la fracción a partir del significado de los términos numerador y denominador (se planteó la fracción de manera invertida $\frac{32}{16} y \ \frac{16}{8}$)

En la sexta situación solamente el 5% de los estudiantes lograron resolverla correctamente estableciendo la relación de comparación entre magnitudes de diferente naturaleza (metros, minutos). El procedimiento planteado consistió en la utilización de división indicada, por tanto la solución de problema fue reducido a la comparación de los números decimales que representaban las fracciones que describen la rapidez de cada tractor ($\frac{3}{5} = 0{,}6$ y $\frac{4}{6} = 0,666$ ...)

El 80% de los estudiantes resolvieron incorrectamente la situación y el 15% de los estudiantes no respondieron. Las respuestas presentadas por los estudiantes fueron en su mayoría explicaciones donde analizaban que los dos tractores trabajaban con la misma rapidez porque si se comparaban el primero y segundo tractor, el segundo recorría un metro más pero gastaba un minutos más que el primero. En las explicaciones planteadas no se utilizó notación numérica, por tal razón la fracción no es reconocida en situaciones de índice comparativo. A continuación se presenta la transcripción de algunas de las explicaciones presentadas por los estudiantes:

“Los dos trabajan rápido solo que uno 3 metros en 5 minutos y el otro 4 metros en 6 solo se llevan 1 minuto de más y 1 metro de más” (niña de 13 años).

“*Los dos tractores trabajan lo mismo porque uno recorre en 5 minutos 3 metros y el otro recorre otro metro más pero también en 1 minuto más”* (niño de 12 años)

“Los dos tractores porque tienen una diferencia de 1 metro y 1 minuto. El primer tractor corre 3 metros en 5 minutos pero si recorriera lo mismo del tractor dos gasta un minuto de más” (niño de 11 años)

La séptima situación el 75% de los estudiantes la resolvieron de manera correcta. El procedimiento utilizado fue completar la tabla numérica que se presentó como estrategia, es decir que los estudiantes se limitaron a encontraron la regularidad de la secuencia numérica en la tabla sin realizar un análisis desde el razonamiento proporcional que involucraba la situación. En esta situación se identificaba dos magnitudes variables que pueden asumir valores distintos pero recíprocamente unidos siempre por la misma relación, en este caso por la relación “2 es a 5” o la fracción $\frac{2}{5}$.

El 20% de los estudiantes resolvieron incorrectamente la situación y 5% de los estudiantes no respondieron. Entre las dificultades identificadas se encuentra la construcción errada de la secuencia numérica de la tabla y la explicitación de la respuesta sin utilizar la información encontrada en la tabla. Esto quiere decir que los estudiantes completaron correctamente la tabla pero al dar la respuesta escrita planteaban una cantidad diferente a la hallada.

La octava situación el 10% de los estudiantes la resolvieron correctamente. El procedimiento propuesto para la solución consistió en la realización de la multiplicación (224 x 3). Este procedimiento se acompañó de las siguientes explicaciones:

“se necesitan 6 toneladas porque 672 es 3 veces más que 224 ” (niño de 11 años)
“ se necesitan 6000 kilogramos es decir seis toneladas para producir 672

kilogramos de azúcar porque para 224 kilogramos de azúcar se gastan con 2 toneladas de caña" (niño de 12 años).

El 70% de los estudiantes resolvieron incorrectamente la situación y 20% de los estudiantes no respondieron. Se presentó dificultad en la comprensión del enunciado del problema y el establecimiento de las relaciones de comparación entre las cantidades. Esto llevó a que la mayoría de los estudiantes plantearan la solución realizando una adición de los números involucrados en la situación (224, 2000, 672).

La novena situación El 65% de los estudiantes resolvió incorrectamente la situación y 35% de los estudiantes no respondieron. Los procedimientos propuestos por los estudiantes fueron de dos tipos, unos realizaron la multiplicación entre las cantidades presentadas en el enunciado y otros hicieron la división. La totalidad de los estudiantes que eligieron la división presentaron como respuesta 40 toneladas, lo cual evidencia el poco manejo del algoritmo de la división.

La dificultad central en esta situación radica en la nula identificación de la equivalencia de la representación del porcentaje como fracción, en este caso 30% = $\frac{30}{100}$ y la falta de comprensión de la fracción como operador, puesto que por regla general los porcentajes tienen asignado un aspecto de "operador". La interpretación de $30\%\, de\, 120$ se transforma en la actuación de la fracción $\frac{30}{100}$ sobre 120 "hacer cien partes de 120 y tomar 30"

La décima situación El 65% de los estudiantes resolvió incorrectamente la situación y 35% de los estudiantes no respondieron. Las respuestas registradas fueron en su mayoría explicaciones poco coherentes y números al azar.

Solamente un estudiante logró plantear la expresión $\frac{2}{5}\ 6200$ pero tuvo dificultad en el cálculo de la fracción de un número. El alto porcentaje de fracaso en esta situación es la poca comprensión de la fracción como un operador multiplicativo sobre una cantidad por la concepción arraigada de abordar la definición de la fracción como las partes de una unidad.

Para finalizar el análisis de los resultados de la prueba diagnóstica es posible plantear que el alto porcentaje de fracaso en las situaciones 6, 8, 9, 10 es debido a que en el segundo ciclo de la escolaridad (4º-5º) el significado de la fracción como razón y como operador multiplicativo es poco estudiado, puesto que se centra la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción como las partes de la unidad y se privilegia el trabajo con representaciones concretas y los significados de la fracción como parte-todo y la fracción como cociente. Esta práctica desconoce la potencia del significado de la fracción como razón para la comprensión de la equivalencia de fracciones y para el desarrollo del razonamiento proporcional. Y la potencia del significado de la fracción como operador multiplicativo para la comprensión del concepto de función y las transformaciones geométricas.

Los resultados de la prueba diagnóstica permiten validar la necesidad de abordar el estudio de la fracción desde el significado de razón en el tercer ciclo de escolaridad (6º-7º) a partir del planteamiento de situaciones didácticas para la construcción de las relaciones de equivalencia que definen a los números racionales.

5. ANÁLISIS A PRIORI

El análisis a priori comprende una parte descriptiva y otra predictiva. En este apartado se presenta la descripción y análisis de las situaciones que conforman la secuencia didáctica objeto de esta investigación, a partir del contenido matemático involucrado y la identificación de los posibles desempeños y comportamientos que se pueden generar en el aula de clase.

5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA SITUACIÓN DIDÁCTICA

La secuencia didáctica propuesta para el aprendizaje del número racional está conformada por 10 situaciones problema, enmarcadas en el significado de la fracción como razón. Este significado permite comprender la fracción como una expresión cuantitativa de una medida y como una relación de comparación entre dos magnitudes. Además se considera que la fracción como razón se convierte en un instrumento fundamental para construir el concepto de número racional a partir de la definición de las clases de equivalencia de infinitas parejas de naturales que lo conforman. De esta manera la fracción se entiende como una expresión simbólica que representa uno de los elementos de la clase de equivalencia del número racional.

La secuencia didáctica está recreada en un contexto de una fiesta de cumpleaños. A partir de este contexto se formulan las 10 situaciones problema. Para el desarrollo de las situaciones se tienen tres consignas generales, las cuales son:

1. Resolver de manera individual cada situación planteando en el espacio asignado los procedimientos numéricos, gráficos o argumentos que permiten solucionar la situación problema.
2. Formar grupos de tres estudiantes para presentar y explicar los procedimientos y estrategias utilizadas para resolver la situación problema.
3. Elegir un integrante del grupo de trabajo para que presente ante la clase el procedimiento o la estrategia válida seleccionada por el grupo para resolver la situación problema.

Las consignas generales tienen como finalidad poner en acto la teoría de situaciones didácticas a partir del desarrollo de la situación de acción, formulación, validación e institucionalización. A continuación se realiza la descripción de cada una de las situaciones que conforman la secuencia didáctica en relación al contenido matemático involucrado.

5.2 ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

SITUACIÓN 1

La primera situación tiene como finalidad el inicio del estudio del significado de la fracción como razón a partir de la identificación de una relación de comparación entre dos partes de un todo. En esta situación la fracción emerge como la relación existente entre la cantidad de partes que conforman un conjunto. En particular el todo corresponde al total de cartulinas (9) y las partes son definidas a partir de la cantidad de cartulinas por cada color (5 blancas y 4 azules). La comparación solicitada en esta situación remite al planteamiento de la relación entre la cantidad de cartulinas color blanco y la cantidad de cartulinas color azul denotado como la relación “5 es a 4”. Esta relación es representada como la fracción $\frac{5}{4}$

Una característica importante de la fracción como relación radica en el hecho que las comparaciones entre las cantidades pueden realizarse de forma bidireccional. En este sentido, el numerador y denominador aparecen como intercambiables y no tiene ya la restricción semántica de cantidad de partes sombreadas y total de partes en las que se divide la unidad.

SITUACIÓN 2

El propósito de esta situación es la comprensión del significado de la fracción como un índice comparativo, a partir de la identificación de dos clases de relaciones de comparación en un contexto discreto: la medida de una parte del conjunto con la medida del conjunto completo y la medida de las partes que conforman el conjunto.

En esta situación se deben desarrollar dos interrogantes, En el primero se requiere la identificación de la parte que representan los sobres de color amarillo respecto al total de sobres de cada paquete. En el segundo es necesario que se identifique si la relación presentada en palabras: *“por cada sobre amarillo hay dos sobre rosados”* corresponde a la comparación correcta. En esta situación se involucran tres registros de representación: lengua natural (enunciado en palabras), lenguaje aritmético (escritura fraccionaria), lenguaje figural (esquema pictórico).

SITUACIÓN 3

La tercera situación tiene como propósito que los estudiantes expresen el significado de la fracción como razón a partir de la identificación del orden en que se realiza la comparación (niños – niñas) y a partir de la utilización de diferentes representaciones: verbal, gráfica y numérica. Es importante que los estudiantes identifiquen que la relación de comparación“5 niños por cada 3 niñas “puede representarse como: “5 a 3”,$\frac{5}{3}$ y con la utilización de dibujos.

SITUACIÓN 4

En el desarrollo de esta situación está ligada con la situación número tres, puesto que a partir de la relación planteada como modelo para realizar la invitación de los niños y niñas a la fiesta: “5 niños por cada 3 niñas” se solicita encontrar la cantidad de niños que se deben invitar a la fiesta si se quiere que asistan 15 niñas.

La relación de comparación$\frac{5}{3}$ y $\frac{x}{15}$que describe la situación remite al procedimiento para generar fracciones equivalentes y el planteamiento de la relación de equivalencia de los números racionales. De manera general se puede decir que dados dos números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es igual que la segunda cuando se verifica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

La generalización de esta situación permite que los estudiantes identifiquen que dos magnitudes variables pueden asumir valores diferentes pero siempre están unidos por la misma relación. Por tal razón, es posible plantear que esta situación puede ser utilizada como un modelo inicial de comprensión de la proporcionalidad (igualdad de razones) cuando se interpretan las fracciones como razones.

SITUACIÓN 5

La finalidad de esta situación es realizar la comparación de razones presentadas en dos registros de representación (verbal y numérico) para determinar si las relaciones pertenecen a la misma clase de equivalencia del número racional. En particular, se requiere que la relación $\frac{7}{35}$ y la relación “1 mesa por cada 4 niños” cuya representación fraccionaria es $\frac{1}{4}$sean analizadas a partir de la definición de la relación de equivalencia entre fracciones.

SITUACIÓN 6

Esta situación tiene como objetivo la comprensión de la fracción como una relación de comparación entre dos magnitudes continuas a través del planteamiento de todas las relaciones entre las longitudes de las cintas. Para establecer las relaciones es necesario definir cuál es la longitud tomada como unidad patrón y a partir de esta definir todas las equivalencias. Es importante tener en cuenta que el orden en que se establece la razón entre cada una de las longitudes generará fracciones mayores a la unidad o fracciones menores que la unidad. Por tal razón otro concepto matemático incluido corresponde al reconocimiento de la propiedad que permite representar una expresión fraccionaria impropia en una expresión fraccionaria mixta. De manera formal se tiene que:

Para a, b, n, r $\in Z^{+}$; $b \neq 0$

Dado una fracción $\frac{a}{b}$ donde a > b, tenemos que 1 unidad completa equivalente a $\frac{a}{b}$, así: a= n (b) + r

$$\frac{a}{b} = n\left(\frac{b}{b}\right) + \frac{r}{b}\frac{a}{b} = n(1) + \frac{r}{b}\frac{a}{b} = n + \frac{r}{b}$$

Notación equivalente a: $\frac{a}{b} = n\frac{r}{b}$

SITUACIÓN 7

El concepto involucrado en esta situación corresponde al planteamiento de las clases de equivalencia del número racional, a partir de la propiedad de complicación y simplificación de fracciones:

Si a y b son dos números naturales, donde b≠0; se simplifica la fracción $\frac{a}{b}$ si a y b tienen un máximo común divisor (M.C.D) k ≥ 2. En este caso habrá dos números c y d tal que $a = c \cdot k \quad y \quad b = d \cdot k$, lo cual se puede escribir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c.k}{d.k} = \frac{c}{d}$$

Esta situación tiene como objetivo que los estudiantes generalicen el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes, el cual ya ha sido utilizado en otras situaciones. También es fundamental que al resolver esta situación los estudiantes comprendan que la relación de comparación entre cada uno de los alimentos tiene como razón $\frac{3}{2}$, es decir, la razón está dada por la regla de correspondencia: *“por cada tres alimentos de sal, se tiene 2 alimentos de dulce”.*

SITUACIÓN 8

Esta situación se desarrolla en un contexto de recetas. Se presenta la receta para realizar un pastel de chocolate para 8 personas y a partir de la lista de los ingredientes se solicita que respondan 7 interrogantes denotados con las letras a hasta la letra *g*. En los interrogantes del *a* al *f* se requiere que los estudiantes determinen la relación de comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de azúcar, huevos, cocoa, leche y esencia de vainilla necesaria para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32 y 40 porciones. En el interrogante *g* se solicita el planteamiento de una conclusión sobre lo que sucede con los ingredientes de la receta si se desea preparar la torta no para 8 personas sino para 40 personas.

Estas situaciones involucran la conceptualización del número racional como clase de equivalencia de fracciones, entendiendo como clase de equivalencia el conjunto de todas las fracciones que describen la misma relación de comparación. Otro concepto incluido en esta situación es la relación proporcional que determina la cantidad de cada ingrediente en relación al número de porciones que se desea obtener.

Para el desarrollo de las situaciones se plantea la utilización de tablas porque de esta manera se puede visualizar la estructura de los datos y sacar conclusiones sobre la relación que hay entre ellos. De manera particular, se debe concluir que:

- La relación de comparación entre la cantidad de harina y azúcar está a razón $\frac{3}{2}$
- La relación de comparación entre la cantidad de harina y huevos está a razón $\frac{3}{5}$
- La relación de comparación entre la cantidad de harina y cocoa está a razón $\frac{1}{3}$
- La relación de comparación entre la cantidad de harina y leche está a razón $\frac{3}{1}$
- La relación de comparación entre la cantidad de harina y esencia de vainilla está a razón $\frac{3}{4}$

El reconocimiento de las relaciones presentadas y la representación de las fracciones a partir de la multiplicación por número naturales como 1, 2, 3, 4, 5 permitirán generalizar que las fracciones de la forma $\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \ldots \frac{na}{nb}$ son equivalentes.

SITUACIÓN 9

La situación se desarrolla en un contexto de mezclas, se solicita comparar la intensidad de sabor a naranja de dos naranjadas que se preparan con determinadas cantidades de vasos de agua y vasos de jugo de naranja. La primera naranjada se prepara con 5 vasos de agua y 3 vasos de jugo de naranja;

la segunda se prepara con 20 vasos de agua y 8 vasos de jugo de naranja. Para realizar la comparación de las dos relaciones se utiliza el concepto de fracciones equivalentes.

SITUACIÓN 10

Esta situación puede ser catalogada como una situación de comparación de razones, el propósito es reconocer cual oferta es más conveniente a partir de la relación entre las cantidades que se ponen en juego. Las fracciones que cuantifican estas relaciones son $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. Una de las posibles formas de resolución consiste en determinar y comparar estas fracciones que juegan el papel de razones a partir del concepto de fracciones equivalentes.

Las relaciones entre parejas de cantidades concretas que varían y el número que expresan lo que es invariante parecen constituir una parte esencial del sentido de la noción de fracción como expresión de una razón constante.

5.3 DESEMPEÑOS ESPERADOS DE LAS SITUACIONES

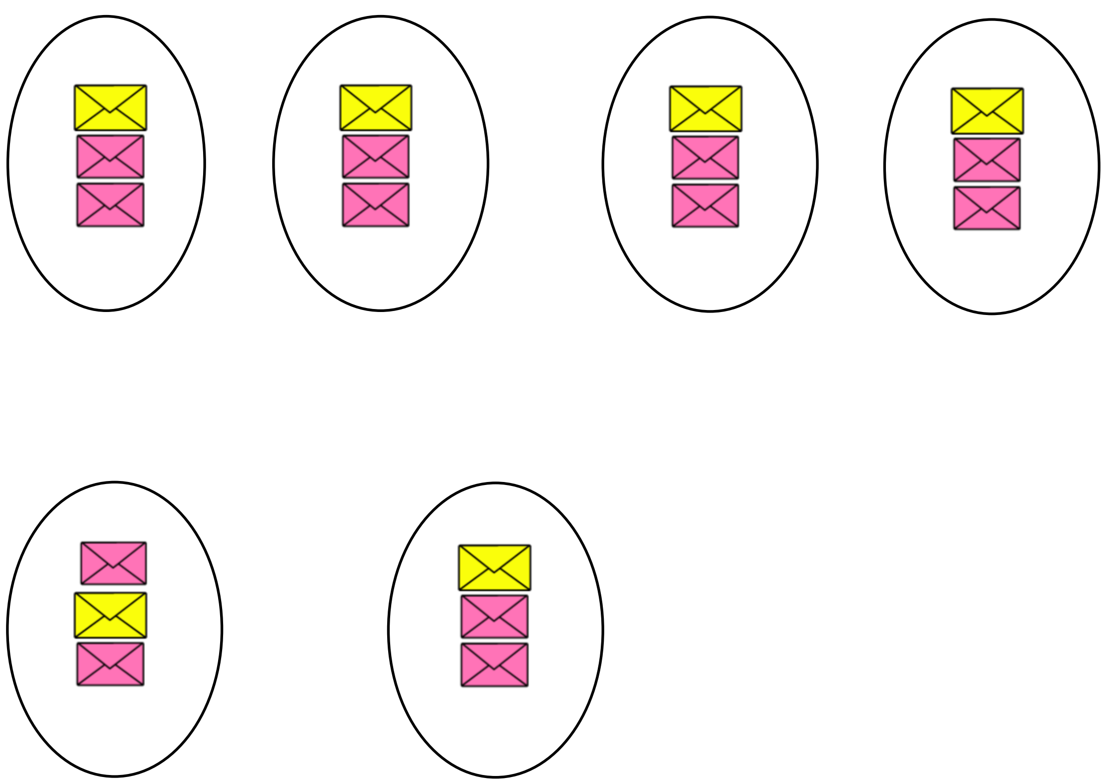
SITUACIÓN 1

Para el desarrollo de esta situación se requiere que los estudiantes comprendan el enunciado problema e identifiquen que la relación solicitada corresponde únicamente a la comparación entre el número de cartulinas color blanco respecto al número de cartulinas color azul. Puesto que es posible que los estudiantes planteen relaciones del tipo **parte –parte** como por ejemplo: cartulinas color azul respecto a cartulinas color blanco $\frac{4}{5}$. También puede ser representadas relaciones del tipo **parte- todo** como lo son: cantidad de cartulinas blancas respecto al total de cartulinas $\frac{5}{9}$ y cartulinas color azul en relación al total de cartulinas $\frac{4}{9}$. Las relaciones presentadas son correctas pero no pertinentes a la solución de la situación.

SITUACIÓN 2

Para el desarrollo del primer interrogante que conforma esta situación es necesario que los estudiantes determinen que la relación de comparación solicitada corresponde a la **relación parte-todo**. Es decir, que la expresión fraccionaria que representa la relación estará dada por la cantidad total de sobres color amarillo comparada con la cantidad total de sobres ($\frac{6}{18}$).También se espera que los estudiantes logren identificar que los sobre amarillos corresponde a la tercera parte del total de sobres.

El segundo interrogante de esta situación puede ser resuelta a partir de dos estrategias, la primera consiste en representar la relación *“por cada sobre amarillo hay dos sobre rosados* “a partir de la utilización de gráficos y de esta forma identificar que la relación es correcta porque el todo se forma a partir de las dos partes. Es decir que el total de sobres (18) se forma a partir de los 6 sobres amarillos y los 12 sobres rosados.



Otra manera de resolver la situación es plantear la relación *"por cada sobre amarillo hay dos sobre rosados"* a partir de la utilización de la representación fraccionaria $\frac{1}{2}$. Para luego expresar la relación de comparación parte – parte (sobre color amarillo y sobres color rosado) como $\frac{6}{12}$ y definir si ambas expresiones representan las misma relación. Esta estrategia pone en juego la identificación de equivalencias entre las dos representaciones fraccionarias, lo cual permite que los estudiantes se inicien en la comprensión de la fracción como una expresión simbólica de una clase de equivalencia del número racional. Donde $\frac{1}{2}$ y $\frac{6}{12}$ están representando la misma relación, en este caso el numerador es la mitad del denominador.

SITUACIÓN 3

En el desarrollo de esta situación se espera que los estudiantes comprendan que el orden en que se establece la relación de comparación tiene un papel fundamental para generar la representación fraccionaria. En el caso de esta situación la expresión "5 niños por cada 3 niñas" remite a plantear la relación $\frac{5}{3}$. También se busca que los estudiantes reconozcan que en algunos casos para lograr una mejor comprensión de la situación se puede utilizar representaciones gráficas.

SITUACIÓN 4

Se espera que a partir del desarrollo de esta situación los estudiantes se inicien en la comprensión y generalización del procedimiento para encontrar fracciones equivalentes y para determinar si se cumple la relación de equivalencia de los números racionales.

La solución de la situación puede ser realizada a partir de varias estrategias: una estrategia puede ser tomar la relación inicial "5 niños por cada 3 niñas" para ir construyendo nuevas relaciones que se acerquen a la cantidad deseada, la construcción de las relaciones se puede representar en una tabla como:

Tabla 4. Solución situación # 4

Niños	Niñas	Fracción
5	3	$\frac{5}{3}$
10	6	$\frac{10}{6}$
15	9	$\frac{15}{9}$
20	12	$\frac{20}{12}$
25	15	$\frac{25}{15}$
30	18	$\frac{30}{18}$

La anterior estrategia permitirá que los estudiantes encuentren algunos representantes de la clase equivalencia $\frac{5}{3}$ y por lo tanto comprendan que la relación de comparación se conserva. Los representantes del número racional $\frac{5}{3}$ se representa como:

$$\mathbf{\frac{5}{3}} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{15}{9}, \frac{20}{12}, \mathbf{\frac{25}{15}}, \frac{30}{18}, \ldots\right\}$$

Otra estrategia para solucionar la situación corresponde a repartir la cantidad de niñas que asisten a la fiesta en grupos de 3 para saber cuántos grupos de niños se necesitan. El resultado de la división luego se multiplicará por la cantidad inicial de niños.

Los dos procedimientos descritos remiten a la comprensión de la propiedad para obtener fracciones equivalentes: la amplificación y simplificación.

SITUACIÓN 5

Para la solución de esta situación se espera que los estudiantes como primera estrategia realicen la representación de la relación: *“1 mesa por cada 4 niños”* en forma de fracción y luego identifiquen si las dos expresiones $\frac{7}{35}$ y $\frac{1}{4}$ son equivalentes verificando la relación:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Otra estrategia para resolver la situación que puede ser utilizada por los estudiantes corresponde a la simplificación de fracción $\frac{7}{35}$ para encontrar el representante canónico del número racional conformado por una pareja de números primos relativos correspondiente a la fracción irreductible. Si al simplificar la fracción $\frac{7}{35}$ se obtiene la fracción $\frac{1}{4}$, entonces $\frac{7}{35}\ y \frac{1}{4}$ seran fracciones equivalentes porque representan el mismo número racional.

SITUACIÓN 6

La solución de esta situación requiere en un primer momento que los estudiantes representen numéricamente las relaciones presentadas en el enunciado:

La cinta amarilla (A) es una vez y un cuarto la cinta de color verde (B) se representa como A= $1\frac{1}{4}$ B

La cinta roja (C) es la mitad de la cinta color verde (B) se representa como= $\frac{1}{2}$ B

Después de plantear las relaciones expuestas en el enunciado se debe pasar a realizar la identificación de la relaciones de comparación en términos de cada una de las longitudes.

El proceso de comparación entre cada una de las longitudes de la cinta se puede hacer a partir de la comparación directa, utilizando una de las longitudes como patrón de medida. También se puede realizar a través de comparación indirecta, en la que se utilizan las relaciones ya establecidas, pero de manera inversa. Por ejemplo B = $2C$ por lo tanto C= $\frac{1}{2}$ B

En algunas relaciones las fracciones encontradas corresponde a fracciones mayores a la unidad, en este caso es necesario que los estudiantes identifiquen la parte entera y la parte fraccionaria que conforma la expresión para luego plantear la relación en forma de fracción impropia.

Las relaciones que se pueden establecer son las siguientes:

A = $1B \ + \frac{1}{4} \ B = \frac{5}{4} \ B$

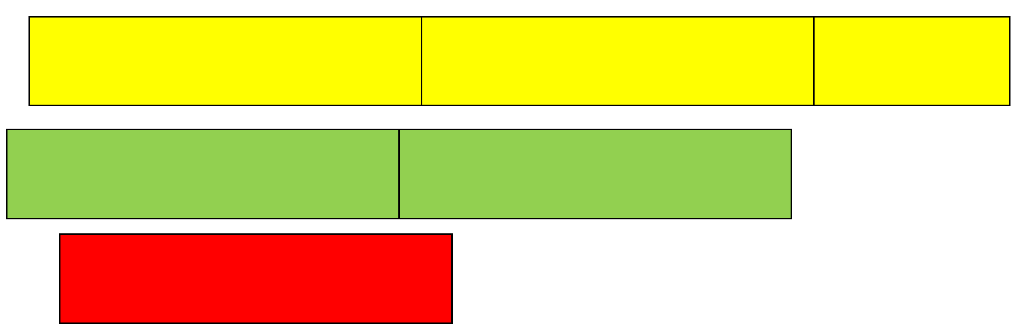
A = $2C \ + \frac{1}{2} \ C = \frac{5}{2} \ C$

B= $\frac{4}{5}$ A

B = $2C$

C= $\frac{1}{2}$ B

C = $\frac{2}{5} \ A$



SITUACIÓN 7

Para el desarrollo de esta actividad es necesario que los estudiantes en primer lugar realicen el planteamiento de la fracción que representa cada comparación, para luego determinar si en alguna de las mesas hay mayor cantidad de alimentos. Una de las estrategias que puede ser utilizada es la reducción de cada una de las fracciones a través de la simplificación, este procedimiento requiere de la aplicación de los criterios de divisibilidad. Al realizar la simplificación de cada una de las fracciones se espera que los estudiantes comprendan que obtuvieron como resultado el representante canónico del número racional $\frac{3}{2}$ y por lo tanto las fracciones están representando la misma relación.

Mesa 1: $\frac{18}{12} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Mesa 2: $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Mesa 3: $\frac{27}{18} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

Las clases de equivalencia que representan al racional $\frac{3}{2}$ esta dada por la notación $\frac{3}{2} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10}, \frac{18}{12}, \frac{21}{14}, \frac{24}{16}, \frac{27}{18}, \frac{30}{20} \ \dots\right\}$

SITUACIÓN 8

La solución de esta situación requiere que los estudiantes en un primer momento identifiquen cual ha sido la variación del número de porciones para luego determinar el número por el cual se debe multiplicar a la fracción que representa la relación entre los ingredientes. Teniendo en cuenta que el número de porciones presentada en la tabla corresponde a 8, 16, 24, 32 y 40 entonces será necesario que cada fracción que relaciona la cantidad de ingredientes se multiplique por 2, 3,4 y 5.

Al completar cada una de las tablas se determinan las siguientes clases de equivalencia de cada uno de los números racionales que definen la relación de comparación entre los ingredientes de la receta:

$$\frac{cantidad\ de\ harina}{cantidad\ de\ azúcar} = \frac{3}{2} = \left\{\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{8}, \frac{15}{10} \ldots\right\}$$

$$\frac{cantidad\ de\ harina}{cantidad\ de\ huevos} = \frac{3}{5} = \left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \frac{12}{20}, \frac{15}{25} \ldots\right\}$$

$$\frac{cantidad\ de\ harina}{cantidad\ de\ cocoa} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = \left\{\frac{3}{9}, \frac{6}{18}, \frac{9}{27}, \frac{12}{36}, \frac{15}{45} \ldots\right\}$$

$$\frac{cantidad\ de\ harina}{cantidad\ de\ leche} = \frac{3}{1} = \left\{\frac{3}{1}, \frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5} \ldots\right\}$$

$$\frac{cantidad\ de\ harina}{cantidad\ de\ esencia\ de\ vainilla} = \frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20} \ldots\right\}$$

Es importante mencionar que al realizar la comparación entre la cantidad de harina y leche hay dos propiedades que requiere su explicitación: la primera corresponde a la comprensión que todo número entero puede ser expresado como un número racional cuyo denominador es uno. La segunda propiedad es que *la fracción* $\frac{a}{b}$ *representa un entero cuando* a *es múltiplo de* b, es decir que las fracciones $\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}$representan un número entero, en particular representan el 3.

Al terminar de hallar las clases de equivalencias que se ponen en juego en la receta se espera que los estudiantes puedan generalizar que para realizar un pastel para 40 porciones la cantidad de cada ingrediente se quintuplica, pero que la relación entre la cantidad de harina y cada uno de los ingredientes siempre es la misma.

SITUACIÓN 9

Para comparar la intensidad de sabor a naranja de las dos naranjadas es necesario recurrir a la estrategia de igualar las cantidades que conforman la relación a partir del planteamiento de fracciones equivalentes, una forma de encontrar las nuevas relaciones corresponde al planteamiento de las siguientes tablas:

Tabla 5. Naranjada tipo A

NARANJADA TIPO A		
Vasos de agua	Vasos de jugo	$\frac{vasos\ de\ agua}{vasos\ de\ jugo}$
5	3	$\frac{5}{3}$
10	6	$\frac{10}{6}$
15	9	$\frac{15}{9}$
20	12	$\frac{20}{12}$

Tabla 6. Naranjada tipo B

NARANJADA TIPO B		
Vasos de agua	Vasos de jugo	$\frac{vasos\ de\ agua}{vasos\ de\ jugo}$
20	8	$\frac{20}{8}$
40	16	$\frac{40}{16}$

Al determinar las clases de equivalencia del número racional $\frac{5}{3}$ que representa la naranjada tipo A se obtienen que $\frac{5}{3} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{10}{6}, \frac{15}{9}, \frac{20}{12}, \frac{25}{15} \ldots\right\}$ entonces es posible plantear que $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$**,** es decir son fracciones equivalentes.

Teniendo en cuenta que la Naranjada tipo A = $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$y Naranjada tipo B = $\frac{20}{8}$se puede establecer la comparación entre dos relaciones entre sí. La naranjada tipo A tiene más del doble de jugo que de agua y la naranjada tipo B tiene menos de doble de jugo que de agua. Por lo tanto, la naranjada tipo A sabe más a naranja.

Se concluye que la naranjada con más sabor no es la que se prepara con más vasos de jugo, ni la que se prepara con menos vasos de agua sino la que lleva más vasos de jugo en relación con los de agua.

SITUACIÓN 10

Para la solución de esta situación se espera que los estudiantes en un primer momento realicen la representación de la relación planteada por cada uno de los supermercados. Luego utilicen como estrategia igualar las cantidades en ambas ofertas para poder decir cual oferta resulta con mayor ventaja.

Cuando se generan las fracciones equivalentes mediante la multiplicación de la fracción que representa la relación de intercambio “pague 2, lleve 3” y “pague 3, lleve 4” se puede establecer que la mejor oferta corresponde al “Supermercado el Rendidor” a partir de alguno de los siguientes análisis:

1. Si se compara la clase de equivalencia de los número racionales representada por la fracción $\frac{8}{12}$ y la fracción $\frac{9}{12}$ La mejor oferta es la del supermercado “ El Rendidor” porque se lleva la misma cantidad de dulces pagando menos productos.

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{12}}, \frac{10}{15} \dots\right\}$$

$$\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20} \dots\right\}$$

2. Si se compara la clase de equivalencia de los números racionales representada por la fracción $\frac{6}{9}$ y la fracción $\frac{6}{8}$ La mejor oferta es la del supermercado " El Rendidor" porque al pagar la misma cantidad de dulces se lleva un paquete más en comparación con el supermercado "El Caribe"

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15} \dots\right\}$$

$$\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{8}}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20} \dots\right\}$$

En esta situación nuevamente la fracción emerge como la expresión de una razón constante entre cantidades.

6. ANÁLISIS A POSTERIORI

En este apartado se realiza la presentación de los resultados obtenidos al implementar las situaciones diseñadas a partir de la descripción y análisis de los procedimientos realizados por los estudiantes, también se presenta las conclusiones y recomendaciones de la investigación realizada.

6.1 DESCRIPCIÓN Y ÁNALISIS DE LOS RESULTADOS

La implementación de la secuencia didáctica se realizó durante 8 sesiones correspondientes a 13 horas de clase de matemáticas. A continuación se presenta el cronograma de aplicación de las situaciones de la secuencia y el número de horas utilizadas.

Tabla 7 Cronograma aplicación de la secuencia didáctica

SESIÓN	FECHA	HORAS DE CLASE	SITUACIÓN
Primera sesión	Septiembre 26 de 2014	2 horas	Situación 1
Segunda sesión	Octubre 3 de 2014	1 hora	Situación 2
Tercera sesión	Octubre 17 de 2014	2 horas	Situación 3 y 4
Cuarta sesión	Octubre 21 de 2014	1 hora	Situación 5
Quinta sesión	Noviembre 4 de 2014	2 horas	Situación 6, 7
Sexta sesión	Noviembre 11 de 2014	2h	Situación 8
Séptima sesión	Noviembre 14 de 2014	1h	Continuación Situación 8
Octava sesión	Noviembre 18 de 2014	2h	Situación 9, 10

La presentación de los resultados obtenidos con relación a la intervención en el aula para el acompañamiento de las situaciones que conforman la secuencia se realiza a partir de la siguiente estructura: el primer momento hace referencia al planteamiento de los aspectos generales observados en el desarrollo de la situación; en un segundo momento se realiza la descripción y análisis de los resultados obtenidos en cada fase propuesta por la Teoría de las Situaciones Didácticas: situación de acción, situación de formulación, situación de validación, situación de institucionalización.

6.1.1 Descripción y análisis de las resultados situación # 1

Esta situación fue desarrolla por 17 de los 20 estudiantes que conformar el grupo de intervención, debido a que el día en el que se planteó la actividad se presentó la inasistencia de 3 estudiantes. Para iniciar se realizó la explicación de la metodología a utilizar en el desarrollo de las situaciones explicitando los tres momentos de organización de la clase: trabajo individual, trabajo en grupos y plenaria de discusión. Es importante mencionar que durante los dos primeros momentos de la clase los estudiantes buscaban continuamente la aprobación de la maestra, es decir requerían la validación del procedimiento realizado. Respecto a esto la maestra asumió un rol de mediador, a partir del planteamiento de preguntas que favorecían la comprensión de la consigna de la situación.

Situación de Acción, en el marco de la Teoría de las Situaciones Didácticas esta situación corresponde al proceso de interacción entre el estudiante y el medio, cuyo principal propósito es encontrar una estrategia o procedimiento de solución a partir de los conocimientos previos y la comprensión del enunciado. En el desarrollo de esta primera situación los estudiantes utilizaron dos formas de procedimiento: gráfico y numérico. En particular, el procedimiento numérico fue planteado por 3 estudiantes, la solución propuesta correspondió a las fracciones $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$, pero no se presentó de manera explícita un argumento o explicación que permita comprender cuál fue el razonamiento utilizado.

El procedimiento gráfico fue planteado por 14 estudiantes, la representación utilizada involucró dos tipos de contextos: continuo y discreto. Respecto a la representación bidimensional en un **contexto continuo**, 8 estudiantes dibujaron un rectángulo dividido en nueve partes de la cuales colorearon cinco, la fracción que representaba la relación existente entre el número de cartulinas color blanco y azul fue definida por 5 estudiantes como la fracción $\frac{5}{9}$ y 3 estudiantes la definieron como la fracción $\frac{9}{5}$. Esta solución pone en evidencia las siguientes dificultades: por un lado, la poca comprensión del enunciado problema, puesto que se solicita de manera explícita que la relación de comparación se realizara entre la cantidad de cartulinas color blanco y color azul. Por otro lado, la falta de claridad en el reconocimiento de los significados del numerador (partes sombreadas) y denominador (total de partes en las que se divide la unidad).

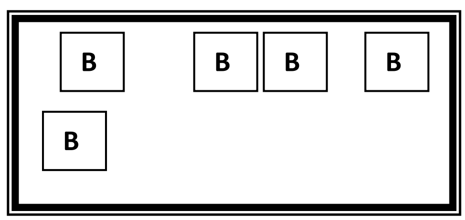
El segundo procedimiento gráfico utilizado fue la representación en un **contexto discreto**, el todo se representó por nueve cuadritos a los cuales se le asignó la letra B o la letra A para identificar si correspondía a una cartulina de color blanca o azul. El total de estudiantes que utilizaron este procedimiento fueron 6, de los cuales 5 plantearon que la solución de la situación estaba dada por las fracciones $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$. En esta solución la comparación se realizó desde la relación **parte-todo**, la comparación es correcta pero no se logra responder la situación. Sólo un estudiante planteó que la relación de comparación solicitada corresponde a la fracción $\frac{5}{4}$.

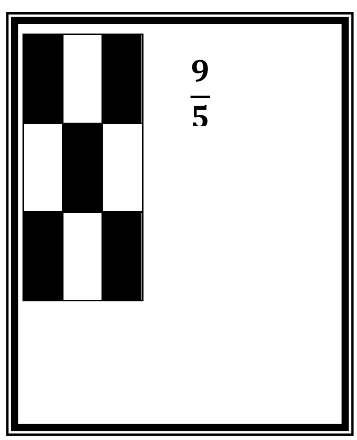
Teniendo en cuenta que la mayoría de los estudiantes utilizaron como estrategia de solución la representación gráfica bidimensional de la situación se puede plantear que existe una concepción muy arraigada de comprender la fracción como una relación entre un número de partes y el número total de partes de un todo ya sea en contextos continuos o discretos. Esto se debe a que generalmente las secuencias de enseñanza privilegian este significado.

Situación de Formulación, al realizarse la organización de los estudiantes en grupos de tres se identificó dificultad en los procesos de comunicación de la estrategia de solución, los estudiantes se limitaban a decir cual fracción representaba la relación solicitada en el enunciado de la situación pero no planteaban la explicación a partir de la utilización de los conocimientos previos sobre las fracciones. Por tal razón fue necesario que la maestra acompañara algunos grupos para guiar la forma de interacción y se lograra iniciar la reflexión sobre la estrategia que sería presentada por el grupo en la plenaria de discusión.

Situación de Validación, de los seis grupos en los que estaba organizada la clase cinco grupos presentaron la solución de la situación, a continuación se realiza el planteamiento de las respuestas dadas por los grupos con los respectivos argumentos (se cita fragmentos del registro de observación # 1)

Tabla 8 Situación de validación Situación # 1

Grupo	Solución	Registro de observación
GRUPO # 1	Fracción $\frac{5}{4}$	***Ma**: nosotros tenemos lo mismo que el grupo de Juan Carlos* ***P**: pero como encontraron la fracción, ¿quieres explicarnos?* *(la niña sale y escribe en el tablero)* $\boxed{\frac{5}{4} = 5 + 4 = 9}$ ***Ma**: si nosotros sumamos las cartulinas color blanco y las cartulinas color azul nos da el total de cartulinas, por eso escribimos esa fracción.*
GRUPO # 2	Fracción $\frac{4}{5}$	***MC**: Nosotros lo hicimos así (la niña dibuja en el tablero)*  ***MC:** cuatro quintos es la fracción de la comparación de las cartulinas, cada letra de la fracción representa un color de las cartulinas.*
GRUPO # 3	Fracciones $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$	***M:** bueno, primero voy a escribir lo que hicimos* *(el niño registra en el tablero)* $\boxed{\frac{5}{9} \quad \frac{4}{9}}$ ***P:** lee por favor, las fracciones que representaste.*

		***M**: Cinco novenos y cuatro novenos* ***P**: Miguel ¿Qué representa esta fracción?* *(la profesora encierra en el tablero la fracción $\frac{5}{9}$)* ***M:** las cartulinas blancas sobre todas las cartulinas juntas que son nueve, ¿está bien?* *(el niño escribe en el tablero $\frac{blancas}{todas\ las\ cartulinas}$)* ***P:** Miguel en este momento no estamos interesados en saber si la solución encontrada en el grupo está bien o mal, lo que nos interesa es analizar las estrategias y argumentos que ustedes utilizaron, luego llegaremos a la respuesta válida. Bueno Miguel y que representa la otra fracción* ***M**: las cartulinas azules sobre todas las cartulinas.* *(El niño escribe en el tablero $\frac{azules}{todas\ las\ cartulinas}$)*
GRUPO # 4	Fracción $\frac{5}{4}$	***J.C**: nuestro grupo dio la respuesta así porque el cinco representa las cartulinas blancas y el 4 las cartulinas azules.*
GRUPO # 5	Fracción $\frac{9}{5}$	***P**: y el grupo de Jorge Eliecer a qué solución llegaron (grupo # 5)* *(Jorge Eliecer sale y dibuja en el tablero)* 

		P: *bueno Jorge explica lo que realizaste* ***J.E****: dibuje nueve partes que son todas las cartulinas y pintamos las de color blanco que son 5 entonces la fracción es* $\frac{9}{5}$ ***P****: un momentico, entonces para ustedes en la fracción* $\frac{9}{5}$ *el numerador representa el total de cartulinas y denominador representa las cartulinas color blanco, las que están coloreadas, ¿Qué opina el resto del grupo, será que lo que explicó Jorge está representado correctamente?* ***M****: no porque la fracción debe ser* $\frac{5}{9}$ *, el numerador representa lo que se pinta y el denominador el total de partes.*
GRUPO # 6	Los estudiantes no presentan ninguna solución	

Respecto a las soluciones propuestas por cada uno de los grupos se puede plantear que tres de los cinco grupos se apoyaron en una explicación oral, dejando de la lado el apoyo gráfico, se centraron en realizar una la comparación del tipo parte-todo ($\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$) o del tipo parte-parte ($\frac{5}{4}$). En cuanto a los grupos que eligieron la representación gráfica nos encontramos con la utilización de un contexto continuo (rectángulo dividido en 9 partes de las cuales se han coloreado 5) generando la fracción $\frac{9}{5}$ y un contexto discreto (representación del todo por las nueve unidades y asignación del color blanco o azul) planteando la fracción $\frac{4}{5}$. Al realizar la socialización de los procedimientos en la plenaria de discusión fue necesario que la maestra planteara de manera explícita que la relación que se estaba solicitando en la situación correspondía a un número de la forma $\frac{a}{b}$ donde a indica las cartulinas blancas y b indica las cartulinas azules, es decir que la relación era $\frac{cartulinas\ color\ blanca}{cartulinas\ color\ azul}$. De esta manera fue posible que los estudiantes identificaran que de las soluciones propuestas por los grupos: $\frac{9}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$ únicamente era pertinente la fracción $\frac{5}{4}$.

Situación de Institucionalización, en el momento de la plenaria de discusión continuamente la maestra llevaba a los estudiantes a realizar un análisis, con el fin de establecer conexiones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural. Se logró que los estudiantes comprendieran que la situación involucraba el significado de la fracción como razón, es decir, representaba un índice comparativo, donde la relación de comparación entre las cantidades se podía definir de la forma: **parte- todo** o de la forma **parte- parte**. Se concluyó que si la la fracción se trabaja desde el significado de razón no existe una unidad que se deba repartir, por lo tanto la relación de comparación se puede realizar representando los objetos que se están comparando, utilizando un contexto discreto.

Finalmente se logró que los estudiantes identificaran que una característica importante de la fracción como relación corresponde a que las comparaciones entre las cantidades pueden realizarse de forma bidireccional, en este sentido, el numerador y denominador ya no tiene la restricción semántica de partes sombreadas y total de partes en las que se divide la unidad. De manera particular, los estudiantes comprendieron que las diferentes fracciones que se generaron en la discusión ($\frac{9}{5}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$) podían ser válidas dependiendo de la comparación que se solicitara.

6.1.2 Descripción y análisis de las resultados situación # 2

Esta situación fue realizada por 14 estudiantes de los 20 que conforman el grupo de intervención, en este día se presentó la inasistencia de 6 estudiantes. En la sede donde se realizó la investigación existe dificultad en cuanto a la asistencia regular de los estudiantes y su permanencia en el sistema escolar. Debido a problemáticas sociales y familiares. Un aspecto favorable a destacar en el desarrollo de la sesión es que los estudiantes participaron de manera más fluida en el momento de socialización en grupos.

La segunda situación estaba conformada por dos interrogantes, el objetivo era la comprensión del significado de la fracción como un índice comparativo a partir de la identificación de dos clases de comparaciones en un contexto discreto: la medida de una parte del conjunto con la medida del conjunto completo y las medidas de las partes que conforman el conjunto.

En la **situación de acción**, los estudiantes plantearon la solución del primer interrogante utilizando solamente un registro numérico; las fracciones obtenidas como respuesta correspondieron a: $\frac{6}{12}$ (7 estudiantes), $\frac{6}{18}$ (5 estudiantes) y $\frac{12}{6}$ (2 estudiantes). Las fracciones $\frac{6}{12}$ y $\frac{12}{6}$ está definiendo una comparación de la clase parte-parte y la fracción $\frac{6}{18}$ corresponde a una comparación parte-todo. A pesar que se logró identificar las posibles relaciones entre las cantidades esto no solucionó totalmente el interrogante, puesto que no se solicitaba que se expresara la relación de comparación sino que se identificara que parte del total de sobres correspondía a los sobres de color amarillo.

Respecto a la solución planteada por los estudiantes en relación al segundo interrogante de la situación se utilizaron dos tipos de argumentos para justificar que la relación planteada: *“por cada sobre amarillo hay dos sobres rosados” era correcta.* 9 estudiantes utilizaron una representación gráfica en un contexto discreto, 1 estudiante utilizó una representación gráfica bidimensional en un contexto continuo y 4 estudiantes plantearon sus argumento haciendo uso de la lengua natural.

En el trabajo individual desarrollado por los estudiantes para la solución del segundo interrogante sigue prevaleciendo la utilización de la representación gráfica, sin embargo la mayoría ya reconoce que las situaciones de comparación no pueden ser representadas de forma bidimensional, porque no existe una unidad que se deba dividir, sino que la representación se realiza comparando los objetos que conforman el conjunto.

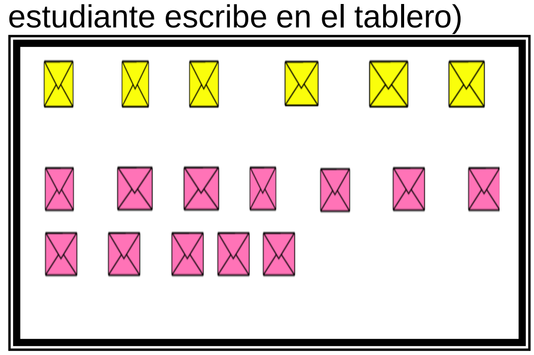
En la **situación de formulación**, los estudiantes interactuaron de manera más fluida, logrando explicar cómo realizaron la solución de la situación. Un aspecto importante a destacar es que en los grupos muchas veces al presentar la estrategia de solución los estudiantes aceptaban la solución dada por los compañeros que se han caracterizado por tener un mejor desempeño en el área de matemáticas, por tal razón en el momento de la plenaria de discusión la maestra tenía que elegir al integrante que representaría al grupo, para que de esta manera todos tuvieran la posibilidad de participar y confiaran en sus capacidades.

La **situación de validación**, se realizó a partir de la presentación de la solución dada por los cinco grupos en los que se organizó la clase. La maestra realizaba continuamente interrogantes para que los estudiantes identificaran que tipo de comparación expresaba la fracción que planteaban como solución. A continuación se realiza el planteamiento de las respuestas dadas por los grupos con los respectivos argumentos en relación al primer interrogante de la situación (se cita el registro de observación # 2) y luego se analizan de manera general las producciones de los estudiantes.

Tabla 9 Situación de validación Situación # 2

GRUPO	SOLUCIÓN	REGISTRO DE OBSERVACIÓN
GRUPO # 1	fracción $\frac{12}{6}$	**P**: Salga el grupo de Jessica, escuchemos muy atentos la explicación de la compañera (La niña sale y escribe en el tablero la fracción $\frac{12}{6}$) **Je**: profe nosotros decimos que la fracción es $\frac{12}{6}$ porque doce son los sobres rosados y seis los sobres amarillos. Entonces comparamos los sobres. **P**: tú dices que la relación que se establece es $\frac{12}{6}$. Pero recuerden que la fracción es una división indicada doce dividido 6, ¿qué número natural está representando? **Je**: dos **P**: entonces esta fracción que ella ha escrito es igual a dos. (La profesora escribe en el tablero $\frac{12}{6} = 2$). **JC**: profesora, Jessica está comparando al revés. **P:** ¿Cómo así? **JC**: si la fracción es $\frac{12}{6}$, entonces se comparó los sobres rosados con los sobres amarillos. Nosotros escribimos la fracción al revés así: seis doce avos.
GRUPO # 2	fracción $\frac{6}{18}$	**M**: Profe la relación es $\frac{6}{18}$ porque seis son los sobres de color amarillo y dieciocho son

		todos los sobres. **P**: El grupo de Mary propone una solución diferente al grupo de Jessica. Ellos realizan la comparación de sobres color amarillo comparado con todos los sobres. ¿Cuántos sobres hay? **M**: Dieciocho **P**: ¿Alguien tiene una relación diferente a las dos que están planteadas en el tablero?
GRUPO # 3	fracción $\frac{6}{18}$	**C**: nosotros tenemos lo mismo que el grupo de Mary. (La profesora se acerca a los grupos a verificar) **P**: ustedes tienen la misma respuesta pero tal vez puedan explicarlo de manera diferente ¿Quién quiere explicar si la relación $\frac{6}{18}$ es correcta? (sale Juan Camilo, representante del grupo # 3) **J**: la relación de comparación $\frac{6}{18}$ si es correcta porque se están comparando una parte que son los sobres amarillos y el todo que son el total de sobres.
GRUPO # 4	fracción $\frac{6}{12}$	**JC**: nosotros decimos que la respuesta es $\frac{6}{12}$ porque comparamos los sobres amarillos y los sobres rosados, que es la mitad de los sobres. **P:** ojo que ustedes a veces no ponen atención en el orden de la comparación solicitada y en

		la clase anterior llegamos a la conclusión que se pueden establecer varias relaciones dependiendo de orden asignado a la comparación.
GRUPO # 5	fracción $\frac{6}{18}$	**P**: De que otra manera se puede representar esta relación. **Jo**: Con gráficos **P**: ¿Cómo lo hizo tu grupo, Jorge? **Jo**: Graficando un cuadro con dieciocho partes y pintando seis **P**: Ah, otra vez... recuerdan que la clase pasada se dijo que este tipo de representaciones no puede usarse para representar relaciones de comparación. ¿Entonces como lo haríamos? A ver ayúdele otro compañero del grupo a Jorge **C**: Dibujando los sobres de cada color **P**: Carlos, si quieres represéntalo en el tablero (El estudiante escribe en el tablero) 

Al realizar la socialización de la solución dada al primer interrogante de la situación se evidencia que tres de los cinco grupos logran establecer la relación identificando que la comparación realizada es de tipo parte-todo, sin embargo solo hasta que la maestra realiza la intervención para que el análisis de la situación se centre en la parte que representa lo sobres amarillo del total de sobres y luego de la utilización de un ejemplo en donde se mantiene la relación que el numerador es la mitad del denominador se logra que los estudiantes comprendan que la respuesta del interrogante corresponde a: *los sobres amarillos son la tercera parte del total de sobres.* Respecto a las otras dos soluciones dadas por los grupos ($\frac{12}{6}$ y $\frac{6}{12}$) se identifica que los estudiantes al realizar las comparaciones no reconocen que las cantidades que representan las partes del conjunto pueden ser relacionadas de varias formas, dependiendo del orden en que se establezca la comparación.

En cuanto a la socialización de la respuesta dada por los estudiantes al segundo interrogante de la situación se encontró que todos los grupos consideran que la relación definida en el enunciado de la situación es correcta. Los argumentos presentados por los grupos son muy similares, ellos plantean que si realizan la organización de los sobres siguiendo la relación *"por cada sobre amarillo hay dos sobres rosados"* entonces obtienen 6 sobres amarillos y 12 sobres rosados que en total representan los 18 sobres. Por lo tanto para que la relación se considere correcta es necesario que la reunión de las partes conforme el todo.

Es importante mencionar que en el análisis a priori se analizó un posible desempeño esperado, el cual consistían en representar la relación enunciada como la expresión fraccionaria $\frac{1}{2}$ para luego compararla con la expresión $\frac{6}{12}$ que representaba la relación de comparación parte-parte. De manera que se llegara a la conclusión que ambas expresiones son equivalentes; sin embargo este desempeño no se presentó y tampoco fue propuesto por la maestra, porque en el momento de la plenaria se decidió hacer mayor énfasis en las clases de relaciones que se pueden establecer al estudiar el significado de la fracción como razón, es decir como índice comparativo. Además otras de las situaciones diseñadas en el marco de la secuencia tienen mayor pertinencia para abordar la reflexión de fracción como una expresión simbólica de una clase de equivalencia del número racional.

En la **fase de institucionalización** se realizó la formalización sobre las diferentes formas que puede ser representada una situación: registro gráfico, numérico, enunciado en palabras. También se profundizó sobre el significado de fracción como razón en otros contextos. Finalmente se realizó un acercamiento al planteamiento de conclusiones sobre el razonamiento utilizado para la solución de la situación, esto con la finalidad de iniciar un trabajo sobre procesos de comunicación matemática.

6.1.3 Descripción y análisis de las resultados situación # 3 y # 4

Estas situaciones fueron realizadas por la totalidad de los estudiantes que conforman el grupo de intervención. Se observó un avance en relación a la comprensión de los enunciados de la situación, al plantear las relaciones los estudiantes tenían en cuenta el orden en que se solicitaba la comparación. También hubo una participación activa en la clase planteando los argumentos o las explicaciones de los procedimientos realizados para encontrar la solución de cada una de las situaciones. Se realiza el análisis de las dos situaciones puesto que están en estrechamente conexión. La definición de la relación de la tercera situación se convierte en el insumo fundamental para resolver la cuarta situación.

El objetivo de la tercera situación correspondía a expresar el significado de la fracción como razón a partir de la utilización de diferentes representaciones (numérica, verbal, pictórica). La cuarta situación tenía como finalidad que los estudiantes reconocieran relaciones de proporcionalidad. A continuación se realiza la descripción de los resultados obtenidos en relación a cada una de las situaciones propuestas en la Teoría de la Situaciones Didácticas.

En la **situación de acción** se identificó que la mayoría de los estudiantes lograron resolver las situaciones propuestas sin dificultad. De manera particular, se encontró que los 20 estudiantes plantearon correctamente la representación numérica de la **tercera situación**, definiendo que la fracción que representaba la relación *“Juan quiere invitar a la fiesta 5 niñas por cada 3 niñas”* correspondía a la fracción $\frac{5}{3}$. En cuanto a la representación gráfica, 17 estudiantes utilizaron un contexto discreto y 3 estudiantes utilizaron un contexto continuo. Los resultados obtenidos al resolver la situación de manera individual evidencian que los estudiantes se han logrado apropiar de los dos elementos fundamentales: el planteamiento de la relación de comparación a partir del orden establecido en el enunciado y la utilización de representaciones en contexto discreto.

Respecto a los resultados obtenidos al desarrollar la **cuarta situación** se tiene que, 13 estudiantes resolvieron de manera correcta la situación, encontrando que la cantidad de niños a invitar a la fiesta para que asistan 15 niñas es de 25 niños. Los procedimientos utilizados por los estudiantes que resolvieron de manera exitosa la situación correspondieron a registros gráficos (10 estudiantes) y numéricos (3 estudiantes). Los procedimientos gráficos consistieron en representar la cantidad de niñas haciendo grupos de tres niñas y a cada una le asignaron 5 niños. En cuanto a los procedimientos numéricos dos estudiantes plantearon la multiplicación 3 x 5 =15 y 5x5 =25, el otro estudiante usó una tabla de correspondencia (a continuación se transcribe el procedimiento y la respuesta propuesta por el niño)

Tabla 10 Procedimiento estudiante situación de acción

3 niñas	5 niños
6 niñas	10 niños
9 niñas	15 niños
12 niñas	20 niños
15 niñas	25 niños

“Los niños que van a la fiesta son 25”

La tabla presentada por el estudiante no utiliza la relación de comparación “niños a niñas” propuesta en el enunciado de la situación, pero la respuesta no se altera. Porque lo que se solicitaba era encontrar la cantidad de niños a invitar y no el planteamiento de la relación fraccionaria.

En cuanto a los 7 estudiantes que resolvieron de manera incorrecta la situación, no se explicita ningún argumento o procedimiento, solo se limitan a dar una cantidad al azar como respuesta sin un razonamiento evidente.

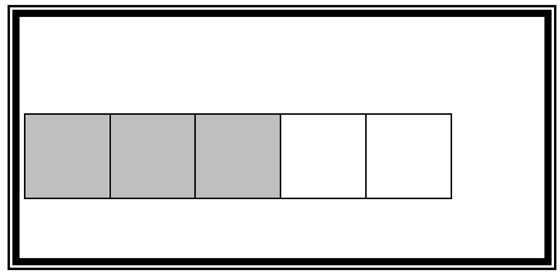
En la **situación de formulación** los estudiantes se organizaron en 6 grupos, los primeros cuatro grupos se conformaron por 3 estudiantes y los últimos dos se conformaron por 4 estudiantes. En general las interacciones que se dieron durante el trabajo en grupo siguieron caracterizándose por la aceptación de la respuesta de los estudiantes con desempeño sobresaliente, a pesar que en cada clase se trató de organizar grupos diferentes de trabajo, buscando que los estudiantes que tenían una aprendizaje un poco más lento se interesaran por participar y plantear explicaciones a partir de la utilización de los conocimientos previos.

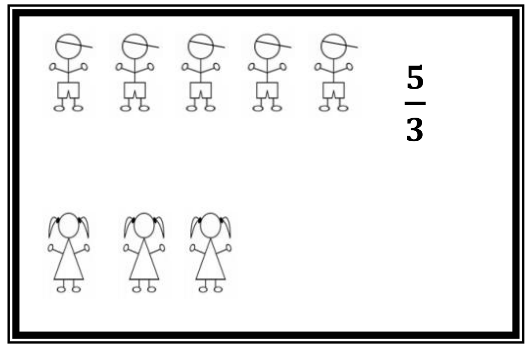
En la **situación de validación** realizada en esta clase se decidió que no todos los seis grupos presentarían la solución de las dos situaciones estudiadas en la plenaria general, por motivos de tiempo. A continuación se realiza el planteamiento de las respuestas dadas por 4 grupos con los respectivos argumentos en relación a la tercera situación y 2 grupos presentan la solución de la cuarta situación (se cita el registro de observación # 3) y luego se analizan de manera general las producciones de los estudiantes.

Tabla 11 Validación Situación # 3

GRUPO	SOLUCIÓN	REGISTRO DE OBSERVACIÓN
GRUPO # 1	$\frac{5 \text{ niños}}{3 \text{ niñas}}$	**P**: Daniela Mosquera quieres salir a representarlo de manera numérica. (La niña escribe en el tablero) $\boxed{\frac{\mathbf{5\ niños}}{\mathbf{3\ niñas}}}$ **DM**: cinco representa el número de niños y el tres representa las niñas por eso la relación la escribimos como cinco tercios. **P**: también podemos decir que la relación es “5 a 3”. Hay alguien que haya pensado una comparación diferente a la que represento Daniela.
GRUPO # 2	$\frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{3}$	**JC**: nosotros escribimos todas las relaciones que se pueden comparar **P:** por favor escríbelas en el tablero (Juan Carlos escribe en el tablero)

		$\boxed{\frac{5}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{3}}$ **P**: Lo que tú haces es una comparación del total de niños invitados a la fiesta. Pero realmente no sabemos cuántos van a ir a la fiesta, solo sabemos que cada que complete 5 niños tiene derecho a invitar 3 niñas. Entonces si hay cinco niños entonces tres niñas. Pero si hay 20 niños. ¿Cuántas niñas van? **JC**: Quince. **P**: ¿Cómo? **JC**: No profesora, doce **P**: Ah…. Hay si podemos establecer la relación de comparación del total de niños que irán a la fiesta. Pero en lo que planteó el grupo de Juan Carlos $\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{3}\right)$ no podemos establecer el total, porque solo conocemos la forma de comparacion que usara ‘’5 a 3’’ o “5 por cada 3”.
GRUPO # 3	Representación gráfica en contexto continuo	**P**: Jessica, por favor escribe en el tablero la forma como realizó tu grupo la representación gráfica de la tercera situación, porque la representación numérica de tu grupo es igual que la propuesta por Daniela.

		(Sale Jessica y dibuja en el tablero)  **P**: Ahora respecto a la representación gráfica que hace el grupo de Jessica de la situación que podemos decir. ¿Es correcta la representación rectangular dividida en cinco partes y coloreada tres? **M**: no, porque cuando comparamos no se puede usar el rectángulo con partes pintadas. **P**: No es posible, el grupo plantea la relación numérica bien pero la gráfica no. ¿Quién quiere pasar a plantear otra representación gráfica?
Grupo # 4	Representación gráfica en contexto discreto.	**J**: profe, voy a dibujar los niños y niñas “5 niños por cada 3 niñas” **P**: Ah la estrategia usada con la situación de los sobres (Joselin dibuja en el tablero)

		 **P**: recuerden que hasta ahora se ha dicho que la representación rectangular no sirve para representar la fracción como una relación de comparación entre dos cantidades. Ahora pasemos a socializar la última situación de la clase que está relacionada con la que acabamos de hacer.

Las respuestas planteadas por los grupos a la tercera situación respecto a la representación numérica de la relación, es correcta, todos logran establecer la comparación de “niños a niñas”. Un aspecto importante a mencionar es que uno de los grupos planteó otras relaciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{8}$ las cuales no eran pertinentes, puesto que no se estaba definido un todo que sirviera como elemento de comparación. Esto se aprovechó para aclarar que en este tipo de situaciones solo es posible plantear la regla general que puede ser utilizada para hallar otras expresiones fraccionarias que guarden la misma relación: “a por cada b”

Las representaciones gráficas utilizadas por los grupos en su mayoría correspondieron a contexto discreto, únicamente un grupo planteó la representación en contexto continuo, pero de inmediato los integrantes de los otros grupos realizaron la corrección argumentando que las situaciones de comparación entre dos cantidades no es posible usar la representación bidimensional de la unidad dividida con partes coloreadas.

Tabla 12 Validación Situación # 4

GRUPO	SOLUCIÓN	REGISTRO DE OBSERVACIÓN
GRUPO # 5	25 niños argumento de tipo gráfico	**P**: Bueno, ¿cuál es la solución de la cuarta situación? (los estudiantes gritan 25 niños) **P**: Pero a mí no me sirve el coro. Yo dije que grupo va a salir a presentar su argumento, uno que no haya participado en la anterior situación. Salga el grupo de Jhoan. **Jh**: Primero voy a dibujar y luego explico. (El niño dibuja) Niños ●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●● ●●●●● Niñas ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ ○○○ **Jh**: separamos las 15 niñas en cinco grupos y luego como en cada grupo de niños debe haber 5 entonces hay 25 en total. **P**: Jhoan, ¿por qué separaste las 15 niñas en cinco grupos y no en otra cantidad? **Jh**: porque si cuento de tres en tres cinco veces me da quince **P**: ah lo que tú hiciste fue dividir el total de niñas, quince entre tres y te dio como resultado cinco. Y luego que más hiciste, por favor explica de nuevo.

		Jh: a cada grupo de niñas le puse los cinco niños y así me dio 25 niños. **P**: Bueno la respuesta es 25 niños, pero ahora dime como expresas esta relación en fracciones. (El niño escribe $\frac{15}{25}$) **P**: Lee la relación que planteada. **Jh**: “Quince a veinticinco” **P**: ¿Están de acuerdo con la relación numérica que establece Johan? **E**: No **P**: ¿Por qué? **JC**: porque está comparando niñas con niños y en el problema piden niños con niñas
GRUPO # 6	25 niños argumento de tipo numérico	**P**: Bien, ahora como lo hago sin utilizar gráficas, por ahí yo observé un grupo multiplicando… Carlos cuéntanos lo que hizo tu grupo **C**: multiplicamos 5 x 5 y no dio 25, luego multiplicamos 3 x 5 y nos dio 15 (El niño escribe en el tablero) $\boxed{\frac{5}{3}\times\frac{5}{5}=\frac{25}{15}}$ **P**: pero, ¿por qué multiplicaste por 5 cada termino de la fracción? **C**: Porque en la tabla del 3 un número que

		mediera 15, y ese es 5 porque 3 x 5 =15 entonces el 5 lo utilice para multiplicar el 5 para que me diera la respuesta.

Las respuestas presentadas por todos los grupos a la cuarta situación fueron correctas[13], a pesar que en la situación de acción algunos estudiantes no lograron resolver de manera exitosa el problema. La interacción generada al interior de los grupos posibilitó que los estudiantes adquirieran una mayor comprensión de la situación y la utilización de la estrategia gráfica permitió que todos llegaran a la solución correcta, en este caso que la cantidad de niños es 25, si asisten 15 niñas a la fiesta. El grupo que expuso el argumento numérico, evidenció un razonamiento proporcional (hallar la cuarta proporcional), a partir de tres cantidades establecidas se encontró la cuarta cantidad. La lógica del razonamiento utilizado por los niños consistió en: dada una cantidad inicial (3 niñas) se buscó el número por el cual se debía multiplicar para llegar a la cantidad final (15 niñas), luego el número encontrado (5) se utilizó para multiplicar la otra cantidad dada como inicial (5), de esta manera se obtuvo el término faltante .

En el análisis a priori se consideró que un posible resultado esperado consistía en tomar la relación inicial “5 niños por cada 3 niñas” para ir construyendo nuevas relaciones que se acerquen a la cantidad deseada: (5 niños, 3 niñas), (10 niños, 6 niñas), (15 niños, 9 niñas), (20 niños, 12 niñas), (25 niños, 15 niñas). Sin embargo este razonamiento no se presentó como estrategia en ningún grupo. Solo un estudiante en el trabajo individual (situación de acción) trato de plantear una relación parecida utilizando una tabla. Es posible pensar que esto se debe a que los estudiantes están aún en un pensamiento concreto.

[13] Aunque en la plenaria general solamente dos grupos participaron presentando sus argumentos, la maestra indagó a qué solución había llegado todos los grupos antes de iniciar la plenaria de discusión. De los seis grupos, cinco usaron como estrategia la representación de la situación y un grupo utilizó la multiplicación por 5.

En la **situación de institucionalización** la maestra realizó el acercamiento a la definición del concepto de equivalencia de fracciones, desde la identificación que dos fracciones son equivalentes si representa la misma relación. Se explicitó el procedimiento para encontrar fracciones equivalentes a partir de la multiplicación o división del numerador y denominador por un mismo número. También se planteó el procedimiento para comprobar que dos fracciones son equivalentes utilizando la multiplicación en cruz (al multiplicar el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y luego el denominador de la primera por el numerador de la segunda fracción da el mismo resultado).

Es importante mencionar que el acercamiento a los conceptos no se realizó de manera rigurosa, es decir, utilizando la definición formal de la propiedad de relación de equivalencia en las fracciones[14] y la propiedad de complificación y simplificación de fracciones[15]; únicamente se explicó el procedimiento a partir de las fracciones involucradas en las situaciones.

---

[14] Relación de equivalencia**:** Dado los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es igual que la segunda cuando se verifica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

[15] Simplificación y complificación de expresiones fraccionarias: Si a y b son dos números naturales, donde b≠0; se simplifica la fracción $\frac{a}{b}$ si a y b tienen un máximo común divisor (M.C.D) k ≥ 2. En este caso habrá dos números c y d tal que $a = c \cdot k \quad y \quad b = d \cdot k$, lo cual se puede escribir:

$$\frac{a}{b} = \frac{c.k}{d.k} = \frac{c}{d}$$

6.1.4 Descripción y análisis de las resultados situación # 5

Esta situación se resolvió por 17 estudiantes de los 20 que conforman el grupo de intervención, en este día se presentó la inasistencia de 3 estudiantes. El desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la situación fue satisfactorio, a medida que avanzó la investigación los estudiantes se fueron apropiaron de la metodología de trabajo en clase y en las participaciones durante la plenaria de discusión se evidenciaba la utilización de argumentos centrados en aspectos numérico y no solamente gráficos.

El objetivo de la quinta situación correspondía a identificar si la relación de comparación pertenece a la misma clase de equivalencia. Para ello, era necesario que los estudiantes en un primer momento reconocieran que se estaba planteando dos relaciones de comparación y luego buscaran si estas eran equivalentes. A continuación se describen y analizan los resultados obtenidos en relación a cada una de las situaciones propuestas en la Teoría de la Situaciones Didácticas.

En la **situación de acción**, las respuestas presentadas por los estudiantes se basaron en la utilización de procedimientos gráficos, numéricos y explicaciones en palabras. De las 17 respuestas, solamente 3 estudiantes no lograron resolver de manera correcta la situación, puesto que ellos plantearon que la relación entre la cantidad de mesas y sillas alquiladas para la fiesta si correspondía a la expresión *"1 mesa por cada 4 niños".* En las respuestas de estos estudiantes no se evidencia la utilización de alguna estrategia, únicamente plantean en palabras que si están de acuerdo.

Respecto a las estrategias propuestas por los 14 estudiantes que lograron resolver la situación de manera correcta, se puede identificar que: 6 estudiantes utilizaron una representación gráfica de la situación en un contexto discreto y a partir de esto afirmaron que la relación presentada por Sofía no estaba bien, porque solamente se podían sentar 28 niños y no los 35 que se invitarían la fiesta. 3

estudiantes plantearon una explicación en palabras que en términos generales apuntaba al siguiente razonamiento: *"si a cada una de las 7 mesas le asignaban las 4 sillas, entonces faltarían más mesas para organizar las 7 sillas restantes, por tal razón la relación presentada por Sofía no era correcta".* Finalmente, 5 estudiantes realizaron un procedimiento numérico que correspondía a una multiplicación (4 estudiantes plantearon la expresión 4 x 7= 28) o una división (1 estudiante presentó la expresión 35 ÷ 7 = 5).

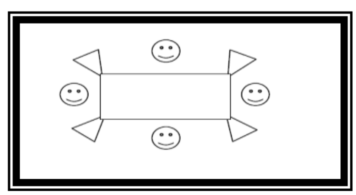
Es importante mencionar que de las respuestas correctas presentadas por los 14 estudiantes, solamente un estudiante explicitó que la relación debería ser: *"1 mesa por cada 5 niños".* Los demás se limitaron a responder que no estaban de acuerdo y plantearon algún procedimiento (numérico, gráfico, palabras) para justificar su solución.

Otro aspecto a resaltar en el análisis de las producciones de los estudiantes hace referencia a que ningún estudiante utilizó como estrategia durante la situación de acción el planteamiento de la expresión fraccionaria que representaba cada una de las relaciones involucradas en el enunciado, es decir, las fracciones $\frac{7}{35}$ y $\frac{1}{4}$. Al determinar estas fracciones los estudiantes se verían en la obligación de aplicar el concepto de fracciones equivalentes estudiado en la clase anterior. Pero esto solo fue posible en el momento de la institucionalización.

En la **situación de formulación**, los estudiantes se organizaron en 5 grupos (Tres grupos se conformaron por tres estudiantes y dos grupos de 4 estudiantes). Durante esta situación la maestra se acercó a cada uno de los grupos para escuchar las interacciones de los estudiantes y realizar preguntas con el propósito de profundizar en el análisis realizado al resolver de manera individual la situación.

En la **situación de validación**, se realizó la presentación de la solución dada por cada uno de los 5 grupos en los que se organizó la clase. Durante la plenaria de discusión la maestra intentó llevar a que los estudiantes identificaran que el concepto fundamental involucrado en la situación correspondía a la equivalencia de fracciones, sin embargo, no fue posible. La maestra, al finalizar las intervenciones de los estudiantes explicó otra forma de solución a partir de la aplicación de la propiedad de relación de equivalencia. A continuación se describen las soluciones dadas por los grupos a partir del registro de observación # 4 y luego se realiza el análisis respectivo.

Tabla 13 S. Validación Situación # 5

GRUPO	SOLUCIÓN	REGISTRO DE OBSERVACIÓN # 4
GRUPO # 1	Si estamos de acuerdo con la relación planteada por Sofía: "1 mesa por cada 4 niños"	**P:** ¿su grupo está de acuerdo con la relación planteada por Sofía? **J:** si, la relación "1 mesa por cada 4 niños" está bien. Yo voy a dibujar (La niña representa en el tablero la situación)  **J**: en el dibujo está la relación que dice Sofía. Cada niño se puede sentar en un lado de la mesa. Si dibujamos los cuatro niños por cada mesa siete veces nos dan todos los niños. **P**: Esto que está aquí en palabras lo pasaron a un dibujo, a una representación. Y la pregunta es ¿Cuántos niños es que va a invitar Sofía? ¿Cuántos dice allí? **J**: treinta y cinco. **P**: entonces, hay que pensar en que son

		35 niños y ¿Cuántas mesas van a alquilar? **J**: siete **P**: Van a alquilar siete mesas. Entonces, ¿tú dices que si estás de acuerdo porque se pueden organizar los 35 niños en las 7 mesas? **J**: si, siete mesas con 4 niños sirven
GRUPO # 2	No estamos de acuerdo con la relación planteada por Sofía: “1 mesa por cada 4 niños”	**P**: ¿Están de acuerdo o no están de acuerdo con que una mesa por cada cuatro niños es la relación correcta? **MA**: No, no creo, si lo hacen así, entonces sobran siete sillas. Porque si organizamos en cada mesa 4 niños y son siete mesas, nos da 28 niños. **P**: ¿Sobran siete sillas? **MA**: si, entonces tocaría “cinco niños por cada mesa” **P**: muy interesante, ustedes ya lograron identificar que se tiene que cambiar la relación. Y eso que está en palabras ¿cómo se representa en expresión fraccionaria? A ver ayúdele otro integrante del grupo. Que tal Laura Sofía, que en las últimas clases casi no ha participado. **LS**: la relación es “un quinto” **P:** no pero escríbelo en el tablero (La niña escribe $\frac{1}{5}$) **P**: bueno y si quisiera comparar la cantidad de mesas y sillas alquiladas, ¿Cuál es la fracción

		que representa esa relación? **LS**: siete treinta y cinco –avos **P**: muy bien Laura, (la profe escribe en el tablero $\frac{7}{35}$) Pero dejemos así que más adelante analizamos este aspecto. Ahora salga otro grupo.
GRUPO # 3	No estamos de acuerdo con la relación planteada por Sofía: "1 mesa por cada 4 niños"	**P**: Primero dinos, ¿si estás de acuerdo con que cuando yo alquilo siete mesas para 35 niños, la relación es "1 mesa por 4 niños"? **Y**: No **P**: ¿Por qué? **Y**: Porque son 35 sillas, 35 niños, pero solo siete mesas, entonces sobrarían siete sillas y siete niños, en donde meterían esos siete niños. No es lógico porque si esto lo hace siete veces (señala el dibujo presentado por el grupo de Juliana) daría 28 sillas y se necesitan 35 sillas. **P**: Entonces, ¿Harían falta qué? **Y**: mesas, tendrían que colocar otras dos mesas, pero como ya se dijo que alquilaron 7 entonces toca cambiar como se sientan los niños. **P**: este grupo también ya identificó que la relación no es correcta porque faltarían mesas, lo que debe cambiar es la forma en cómo se organizaran los niños. **Y**: en cada mesa se tienen que sentar cinco niños para que nos queden organizados los 35 niños en las mesas que alquilaron.
GRUPO # 4	No estamos de acuerdo con la	**P**: El grupo de Jhoan ¿está de acuerdo o

	relación planteada por Sofía: “1 mesa por cada 4 niños”	no está de acuerdo? **JH**: No **P**: ¿Por qué? **JH**: Porque en cada mesa, según nosotros quedarían cinco niños, porque si multiplico siete por 35 me da 5 (La profe escribe 7 x 35 = 5) **P**: ¿Siete por treinta y cinco le da cinco? **JH**: no, no. Es dividido, profe **P**: ¿Siete dividido treinta y cinco, seguro que es cinco? **JH**: si, es cinco **P:** mejor escribo en el tablero lo que está diciendo Jhoan: siete dividido treinta y cinco da cinco (La profesora escribe la división y la resuelve $7 \ \underline{\lfloor 35}$ 0,2) **P**: al dividir lo que dijo Jhoan obtenemos como respuesta un número decimal. ¿Y entonces? **JH**: No, profesora es treinta y cinco dividido siete **P**: ahora si, planteaste la división de manera correcta. Recuerden que el orden en la división importa. (35 ÷ 7 = 5) **JH**: Al dividir, entonces sería que en cada mesa deberían de ir cinco niños y no cuatro

		como lo dice Sofía. **P**: miren que ellos no dibujaron sino que pensaron en una división; bueno si hay 35 niños y hay siete mesas, pues dividamos los niños entre estas mesas, seria por cada mesa colocar cinco niños, no cuatro. Bueno salga el grupo que falta.
GRUPO # 5	No estamos de acuerdo con la relación planteada por Sofía: “1 mesa por cada 4 niños”	**JC**: profesora nosotros también decimos que la relación de Sofía no está de acuerdo. **P**: si pero por favor explica ¿Por qué? **JC**: nosotros multiplicamos la cantidad de mesas y sillas, y nos dio 28. Pero tenía que darnos 35, por eso decimos que está mal la relación. Que tiene que ser cinco sillas en cada mesa. **P**: Juan Camilo, escribe en números lo que acabas de decir (El estudiante escribe 7 x 4=28, 7 x 5=35)

De las respuestas presentadas en la plenaria de discusión, un grupo realizó un planteamiento incorrecto, puesto que se limitaron a realizar la representación gráfica de la relación inicial definida en el enunciado del problema sin analizar si la cantidad de mesas y sillas alquiladas conservaban la misma relación. A pesar que la maestra formuló algunos interrogantes para que se reconociera el error, no se logró que se cambiaran la solución. La respuesta generadas por los cuatro grupos restantes fueron correctas, las explicaciones se clasificaron en dos tipos: verbales y numéricas.

Respecto a las explicaciones de carácter verbal, se reconoció claramente que los estudiantes comprendieron que al organizar la cantidad de sillas y mesas alquiladas no se puede realizar manteniendo la razón "1 mesa por cada 4 niños", porque sobrarían siete sillas. En este sentido, los grupos determinaron que era necesario definir una nueva relación, representada por la expresión "1 mesa por cada 5 niños". Las explicaciones numéricas fueron propuestas a partir de una multiplicación y una división. En ambas estrategias se identificó la utilización de un razonamiento proporcional.

Teniendo en cuenta que los estudiantes no desarrollaron la situación desde la explicitación del concepto de fracciones equivalentes, fue necesario que en el proceso de **institucionalización** la maestra abordara la solución comparando las expresiones fraccionarias que representaban las relaciones descritas en el enunciado de la situación. Dicha comparación se realizó a partir de la aplicación de la propiedad de la relación de equivalencia, la cual se reduce a la aplicación de la multiplicación en cruz de los términos que conforman las fracciones.

Para finalizar el análisis de esta situación se debe mencionar que un elemento que hizo falta en el proceso de institucionalización correspondió a la aplicación de la propiedad de complificación y simplificación de expresiones fraccionarias. Era fundamental que se identificara que la fracción $\frac{7}{35}$ podía ser reducida a su mínima expresión a través de la simplificación (dividir entre 7) y de esta manera se obtenía la fracción $\frac{1}{5}$, la cual representaba la relación correcta "1 mesa por cada 5 niños". Esto no se logró por falta de tiempo. Sin embargo se tuvo presente para el desarrollo de otras situaciones.

6.1.5 Descripción y análisis de las resultados situación # 6 y # 7

Estas situaciones se resolvieron solamente por 15 estudiantes, el día en que se aplicaron se presentó la inasistencia de 5 estudiantes. De manera general, se puede plantear que en el desarrollo de estas situaciones la mayoría de los estudiantes presentaron dificultad. En la sexta situación se esperaba un mejor desempeño porque en días previos al inicio de la aplicación de la secuencia se había desarrollado un trabajo sobre el significado de la fracción desde la relación parte-todo, desde el proceso de medición en la comparación de superficies estableciendo un patrón de medida y una unidad referencial[16]. En la séptima situación se esperaba que los estudiantes usaran los conocimientos estudiados hasta el momento sobre la comprensión de las propiedades sobre la relación de la equivalencia y la complificación y simplificación de fracciones. Sin embargo, no se identificó la apropiación de los elementos descritos en las estrategias propuestas.

La sexta situación tenía dos finalidades, por un lado comprender el número racional como la cantidad que expresa la medida de una magnitud con respecto a otra tomada como unidad de referencia. El otro objetivo consistía en aplicar la propiedad para expresar una fracción impropia en un número mixto.

La séptima situación tenía como propósito reconocer el número racional como una clase de equivalencia de fracciones mediante la propiedad de complificación y simplificación. A continuación se describe y analizan los resultados obtenidos en el desarrollo de las situaciones.

En la **situación de acción**, 13 estudiantes plantearon únicamente las relaciones de comparación básicas, es decir, las descritas en el enunciado de la sexta situación: *"la cinta amarilla (A) es una vez y un cuarto de la cinta de color verde (B) y la cinta roja (C) es la mitad de la cinta color verde (B)" .* Las relaciones fraccionarias presentadas en el enunciado corresponden a las expresiones:

---

[16]Específicamente se utilizó una de las situaciones que conforman la secuencia didáctica propuesta por Pontón (2008) para la conceptualización inicial de las fracciones. La situación tenía como finalidad establecer relaciones entre superficies utilizando patrones de medida, con base en la relación parte - todo y realizando un proceso de cuantificación.

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{1}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4}}\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{B}$. Los otros estudiantes encontraron 3 relaciones (la dos básicas y una inversa, representada como $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{2C}$). Respecto a la dificultad presentada por los estudiantes para definir todas las relaciones, es posible pensar que se debe a no aplicar la estrategia de comparación directa (utilizar una de las longitudes como patrón de medida, a partir de un modelo concreto). Se supone que en situaciones de comparación de longitudes esta es la estrategia más natural para encontrar las relaciones.

Los resultados obtenidos en el desarrollo de la **séptima situación** fue preocupante, ningún estudiantes logró resolver de manera exitosa la situación. Todos los estudiantes afirmaron que la mesa con mayor cantidad de alimentos de sal en relación de comparación con los de dulce, correspondía a la mesa número tres. Respecto a esto es importante mencionar dos aspectos; en primer lugar, todos los estudiantes lograron definir correctamente las expresiones fraccionarias que representaban las relaciones del enunciado, es decir, encontraron que la primera mesa tenía como fracción $\frac{18}{12}$, la segunda mesa $\frac{9}{6}$ y la tercera mesa $\frac{27}{18}$; Sin embargo, no realizaron el razonamiento desde el concepto de equivalencia de fracciones para solucionar la situación.

En segundo lugar, los estudiantes realizaron el razonamiento de la comparación de fracciones desde los conocimientos aprendidos sobre la relación de orden en el conjunto numérico de los naturales, por tal razón, la comparación se estableció fijándose solamente en los numeradores de las fracciones que representaban cada mesa. Así que, como la mesa número tres tenía el numerador mayor, entonces esta era la mesa con más alimentos de sal.

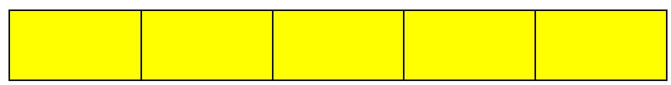
El fracaso en la solución de la situación séptima se debe en gran medida a que los estudiantes extrapolan a las fracciones las reglas y algoritmos de los números naturales. En este sentido, se identifica la influencia que el conocimiento de los números naturales ejerce sobre el proceso de aprendizaje de las fracciones, por tal razón este aspecto debe ser tenido en cuenta a la hora del diseño de las situaciones didácticas.

En la **situación de formulación**, los estudiantes se organizaron en cinco grupos. Al acercarse la maestra para obtener información sobre la solución planteada por cada estudiante, se dio cuenta de la dificultad generada en la realización de las dos situaciones y por lo tanto decidió dar algunas indicaciones generales y estrategias para que los estudiantes al interior de cada grupo buscaran de nuevo la solución de las situaciones.

La **situación de validación**, se realizó de manera diferente a la efectuada en las anteriores situaciones. La maestra decidió que para la solución de la sexta situación cada grupo debía plantear una de las relaciones encontradas entre las longitudes de las cintas. A continuación se realiza la presentación de las respuestas dadas por los grupos a partir del registro de observación y luego se analiza los procedimientos efectuados desde el contenido matemático movilizado.

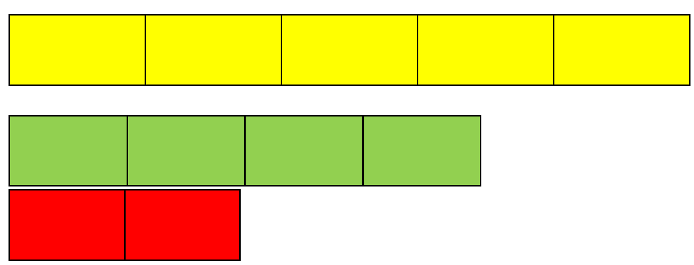
Tabla 14. Validación Situación # 6

GRUPO	SOLUCIÓN	REGISTRO DE OBSERVACIÓN
GRUPO # 1	$\mathbf{A = 1\frac{1}{4}B}$ $\mathbf{C = \frac{1}{2}B.}$	**P**: Entonces, ¿tú qué relación encontraste Johan? **JH**: “c es un medio de B”, es la mitad. **P**: escríbelo en números (El niño escribe $\mathrm{c} = \frac{1}{2}\ \mathrm{de\ B}$) **P**: bueno esa es una de las relaciones más evidentes porque nos la dan en el enunciado de la situación, así que escribe la otra que dan.

		(Escribe $\mathrm{A} = 1\frac{1}{4}\mathrm{B}$) **P**: ¿Cuántas B se necesitan para llenar una A? **JH**: Una y un cuarto **P**: Muy bien. Si yo quisiera medir la A utilizando la B, me doy cuenta que cabe una vez y otro pedacito, este pedacito no es la mitad, este pedacito que viene siendo (la profe señala en el tablero) **JH**: la mitad de la mitad. Un cuarto **P**: Un cuarto, porque este pedacito es este (la profesora divide la cinta que representa la longitud A en cuartos y señala el ultimo pedazo)  **P**: Jhoan te acuerdas como escribíamos las relaciones cuando trabajos el rompecabezas. **JH**: no **P**: sumando (la profesora escribe en el tablero $\mathrm{A} = 1\mathrm{B} + \frac{1}{4}\mathrm{B}$). Quiere decir que si yo comparo esta B con esta A, entonces seria una vez B más un cuarto de B. **JH**: ¿esto es lo mismo? **P**: si, si, así que no se vayan a confundir. ¿Qué tipo de número es este? ¿Quién se acuerda que lo estudiamos la semana pasada? **JH:** un número mixto **P**: Muy bien, es un número mixto. Si este es un número mixto, ¿a qué fracción impropia

		corresponde?, ¿cómo pasó uno y un cuarto a un número mixto? ¿Quién se acuerda como pasar de un mixto a una fracción? (estudiantes de otros grupos participan) **H**: multiplicando, uno por cuatro sobre cuatro (La profesora escribe en el tablero $1\frac{1}{4} = \frac{(1x4)}{4}$) **P**: pero le falta algo **M**: multiplico y luego sumo y me da una fracción **P**: entonces ¿qué fracción representa la relación que escribió Jhoan? **M**: cinco cuartos **P**: ahora si (la profesora escribe $1\frac{1}{4} = \frac{(1x4)+1}{4} = \frac{5}{4}$) **P**: ¿Que Quiere decir esto? **JH**: que la "A es cinco cuartos de B"
GRUPO # 2	**A =** $\mathbf{2C} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{C} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\,\mathbf{C}$	**P**: Bueno ya tenemos 2 relaciones, ¿Cuál será la tercera relación? Ahora ¿Cuántas C se necesitan para formar una A? (Se generan muchas respuestas) **P**: En coro no me sirve así que salga el grupo de Luis Carlos **LC**: Dos **P**: Dos, ¿y este pedacito que es de acá?

		LC: un medio **P**: la mitad, entonces Luis Carlos ¿cómo sería la relación entre la cinta A y C? **LC**: dos y medio de C. **P**: por favor escribe en números (El estudiante escribe $2\frac{1}{2}C$) **P**: dos y un medio de C ¿Qué es? **JO**: un número mixto **P**: Muy bien Jorge, es un número mixto. Bueno pero dejemos que Luis Carlos me diga a que fracción impropia equivale el número mixto $2\frac{1}{2}$ (Estudiantes expresan el procedimiento y Luis Carlos escribe en el tablero $\frac{2x2+1}{2}=\frac{5}{2}$) **LC**: la cinta A equivale a "cinco medios" de la cinta C
GRUPO # 3	**B =** $2C$	**P**: Qué otra relación podemos establecer ahora, ya comparamos la cinta A y B, C y B, A y C. Ahora comparemos la cinta B y la C, ¿Cuántas C necesito para llenar una B? Mary, ayúdame con esta relación. **P**: Entonces, B igual ¿A qué? **E**: Dos **MA**: necesito dos B para tener la cinta C **P**: seguro Mary, escribe en el tablero lo que dijiste

		(La niña escribe $C = 2B$, los demás compañeros gritan que está mal) **MA**: hay no, profe es al revés (la niña borra lo que había escrito y plantea la nueva relación como $B = 2C$) **P**: ¿Cuál es la relación? **MA**: B es dos veces la C
GRUPO # 4	**B=** $\frac{4}{5}$ **A**	**P**: Que es la B de la A **JV**: Cinco cuartos **P**: ¿Cinco cuartos? Jorge, quien tiene una longitud mayor la cinta B o la cinta A **JV**: la cinta A **P**: aprovechando que hemos dividido todas las longitudes en cuartos, mira y dime cuantos cuartos tiene la cinta B y cuantos la A.  **JV**: la B tiene 4 y la C tiene 5 **P**: entonces la relación correcta entre B y A ¿cuál es?

		JV: Cuatro de cinco **P**: Entonces B es igual a “cuatro quintos de A”. escribe en número la relación que encontraron (El estudiante escribe $B = \frac{4}{5}A$)
GRUPO # 5	C = $\frac{2}{5}$ $\mathbf{A}$	**P**: el grupo de Yurumí defina otra relación **Y**: Dos quintos **P**: de quien **Y**: C es igual a dos quintos de A. **P**: Excelente Yurani, es el grupo más veloz, pero como a mí no me sirve la respuesta y ya, sino que lo más importante es la explicación, por favor explíquenos como encontraron que C es igual a dos quintos de A. (La niña escribe en el tablero $C = \frac{2}{5}A$) **Y**: pues si miramos aquí (señala la cinta C dibujada en el tablero) la C cabe dos veces en la cinta A y como C tiene cinco pedazos entonces es dos quintos. **P**: bueno la ayudita dividiendo la cinta en cuartos les sirvió. Pero recuerden que la otra forma es que a partir de una relación dada yo puedo encontrar la relación inversa. Si hemos encontrado que la cinta A es cinco medios de la cinta C, entonces la relación inversa es que la cinta C es dos quintos de la cinta A. **Y**: ah lo que hacemos en cambiar el orden

Respecto a las respuestas de los grupos durante la plenaria general, se puede identificar que hubo dificultad en la determinación de las relaciones entre las longitudes de las cintas, porque los estudiantes utilizaron la comparación directa a partir de un razonamiento mental, es decir, sin utilizar un instrumento concreto, como la subdivisión de las longitudes a partir de una unidad patrón. Solo hasta que la maestra presentó la estrategia de dividir la longitud de la cinta C en cuartos se logró que los estudiantes analizaran otras posibles relaciones.

Para los grupos fue más fácil establecer las relaciones de comparación cuando la longitud era cuantificada con otra de menor longitud, por ejemplo, definir las relaciones entre la cinta A y las cintas C, B; en contraste con las comparaciones que involucraban cuantificar la longitud utilizando una mayor magnitud, por ejemplo comparar la cinta C con la cinta A.

Teniendo en cuenta que el orden en que se planteaba la relación entre las longitudes podía generar expresiones fraccionarias mixtas, los estudiantes realizaron sin dificultad la respectiva equivalencia, ejecutando correctamente el procedimiento para encontrar la expresión fraccionaria impropia. En clases previas se había estudiado esta propiedad, por tanto se identifica la apropiación de este concepto.

En cuanto a la **séptima situación**, la maestra guió todo el proceso para construir la solución de manera general, es decir, que no se realizó un análisis por grupos de las respuestas dadas. El análisis de los comportamientos observado en la **situación de validación** solo se limita a la descripción de los argumentos presentados por la maestra para que los estudiantes lograran comprender y resolver la situación.

En el desarrollo de la séptima situación, los estudiantes reconocieron las fracciones que representaban la relación entre la cantidad de alimentos de sal y dulce en las tres mesas, sin embargo, no fue posible que identificaran que las mesas utilizaban la misma razón, es decir, que los alimentos se organizaron conservando la relación “3 a 2”. Por tal motivo, la maestra sugirió que la comparación tenía que realizarse a partir de la relación entre el numerador y denominador de cada fracción y no solamente fijándose en los numeradores de manera independiente. La maestra explicó que una forma de establecer la comparación entre las fracciones era encontrando fracciones equivalentes, cuyos denominadores fueran iguales. Fue así que se planteó la estrategia de encontrar fracciones equivalentes a partir del proceso de simplificación. Los estudiantes tenían claro que la simplificación se realizaba dividiendo el numerador y el denominador entre un mismo número.   Aplicaron el procedimiento correctamente a partir de los criterios de divisibilidad siguiendo el orden lógico de los números primos.

En el desarrollo de esta situación se evidenció que la estrategia propuesta por la maestra permitió a los estudiantes activar sus conocimientos previos para encontrar la solución, es necesario enfatizar que la maestra no planteó de inmediato la solución del problema sino que definió un plan para que los estudiantes lo ejecutaran a partir del conocimiento sobre el proceso de simplificación de fracciones.

Al encontrar que las fracciones que representaban la relación de comparación en cada una de las mesas correspondía a la misma expresión, se definió el concepto de número racional. Los estudiantes encontraron otras fracciones equivalentes a $\frac{3}{2}$ partir del proceso de complificación y llegaron a la conclusión que existían infinitas clases de equivalencia.

En la **situación de institucionalización**, se realizó la formalización de la comprensión de la fracción como la expresión simbólica de una clase de equivalencia del número racional, es decir, se explicitó que las fracciones $\frac{18}{12}$, $\frac{9}{6}$ y $\frac{27}{18}$

correspondían a elementos de la clase de equivalencia del número racional $\frac{3}{2}$. También se definió que para encontrar el número racional que representaba la clase de equivalencia era necesario reducir la fracción a su mínima expresión[17]. Finalmente se comprendió que el concepto de relación de equivalencia era fundamental para definir los números racionales.

6.1.6 Descripción y análisis de las resultados situación # 8

Esta situación se desarrolló en un contexto de recetas. Se presentó la receta para realizar un pastel de chocolate para 8 personas y a partir de la lista de los ingredientes se solicitó que completaran seis tablas donde se presentaba una relación de comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de azúcar, huevos, cocoa y leche necesarios para realizar un pastel para 16, 24, 32 y 40 porciones. Finalmente se le solicitaba que resolvieran un interrogante cuya finalidad era buscaba que los estudiantes plantearan una conclusión sobre que lo sucedía en los ingredientes si se necesitaba preparar un pastel para 40 porciones.

Esta situación fue resuelta en dos sesiones cada una de dos horas. En la primera sesión asistieron 19 estudiantes y en la segunda asistieron 20 estudiantes. En general se puede plantear que el trabajo realizado durante las dos sesiones permitió alcanzar los objetivos propuestos en relación a la conceptualización del número racional como una clase de equivalencia de fracciones, la identificación de la fracción como una expresión de una razón constante y la generalización del procedimiento para obtener fracciones equivalentes.

---

[17] Encontrar una fracción conformada por una pareja de números primos relativos. $\frac{p}{q}$, $q \neq 0, \frac{p}{q} \in Q$ p, q son primos relativos si y solo si $(p, q) = 1$. $(Px + qy = 1)$ $x, y \in Z$.

A continuación se describe los resultados teniendo en cuenta los comportamientos observados en cada una de las sesiones en las que desarrollaron las situaciones a partir del trabajo desarrollado en los diferentes momentos de organización de la clase: individual (situación de acción), grupal (situación de formulación) y plenaria de discusión (situación de validación e institucionalización)

En la **primera sesión en la situación de acción**, la totalidad de los estudiantes resolvieron de manera correcta el punto A, en el cual se necesitaba definir la fracción de forma numérica y gráfica que representaba la relación de comparación entre la cantidad la cantidad de harina y la cantidad de azúcar, huevos, cocoa y leche propuestos en la receta. El desempeño satisfactorio de los estudiantes se debe a la comprensión alcanzada sobre el significado de fracción como razón, identificando correctamente las clases de comparaciones que se pueden determinar (parte-todo, parte-parte) y al reconocimiento que la representación gráfica solo es posible en un contexto discreto.

La situación B y C fue resulta correctamente por 8 estudiantes, ellos completaron la tablas con las relaciones correctas, identificaron cual había sido la variación del número de porciones y a partir de esto comprendieron que la fracción original debía ser multiplicada por 2, 3, 4, 5 respectivamente. De manera general se puede plantear que los 11 estudiantes que presentaron dificultad para hallar las relaciones fue producto del no reconocimiento de la variación en el número de porciones, así que ellos completaron la tabla sin seguir ningún criterio.

En la **situación de formulación**, los estudiantes se organizaron en seis grupos, al darse la interacciones se logró que los estudiantes identificaran que el punto central para resolver la situación B y C era la compresión de la variación entre la cantidad de porciones solicitadas. Es necesario mencionar que solo dos grupos explicitaron el procedimiento numérico realizado, plantearon la fracción original y aplicaron la propiedad de complificación de fracciones.[18] Los demás grupos se limitaron a completar la tabla siguiendo una secuencia numérica. En la situación B completaron la tabla a partir de los múltiplos de tres y dos, porque la relación estaba dada por la fracción $\frac{3}{2}$ y en la situación C utilizaron los múltiplos de tres y cinco, puesto que la relación se definía como la fracción $\frac{3}{5}$.

En la **situación de validación**, durante la plenaria general solo se presentó la solución de la situación B y C. Los estudiantes completaron la tabla de las relaciones identificando la nueva fracción que se generaba al duplicar, triplicar, cuadruplicar o quintuplicar las porciones. También explicitaron que la relación entre los ingredientes que se comparaba en cada tabla estaba dada por las expresiones "3 tazas de harina por cada 2 tazas de azúcar" y "3 tazas de harina por cada 5 huevos". Para evidenciar si los estudiantes habían logrado reconocer el concepto matemático involucrado en el desarrollo de la situación, la maestra indagó sobre la clase de fracciones que se habían encontrado en cada una de las tablas y la respuesta obtenida por la mayoría de los estudiantes fue que eran fracciones equivalentes porque se encontraban multiplicando la misma fracción por los números 1, 2, 3, 4, 5.

La **situación de institucionalización** realizada por la maestra se centró en dos aspectos: el primero correspondió a la representación simbólica del número racional involucrado en cada situación, es decir, presentó las clases de equivalencia del número racional $\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{5}$ utilizando la notación $\frac{3}{2}=\left\{\frac{3}{2},\frac{6}{4},\frac{9}{6},\frac{12}{8},\frac{15}{10}\ldots\right\}$ y $\frac{3}{5}=\left\{\frac{3}{5},\frac{6}{10},\frac{9}{15},\frac{12}{20},\frac{15}{25}\ldots\right\}$ con el fin que los estudiantes comprendieran que la fracción emerge como la expresión de una razón constante.

---

[18] El procedimiento realizado para la situación B fue el siguiente:

$\frac{3}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{4}$, $\frac{3}{2}\times\frac{3}{3}=\frac{9}{6}$, $\frac{3}{2}\times\frac{4}{4}=\frac{12}{8}$, $\frac{3}{2}\times\frac{5}{5}=\frac{15}{10}$.

El otro aspecto analizado consistió en la verificación de la equivalencia de las fracciones, para ello la maestra presentó otras expresiones para que se determinaran si era una clase de equivalencia de los números racionales estudiados ($\frac{3}{2}$ y $\frac{3}{5}$). Respecto a esto algunos estudiantes plantearon que era necesario multiplicar en cruz y si se obtenían los mismos resultados, entonces podía decirse que las fracciones eran equivalentes. En esta sesión la maestra definió la relación de equivalencia de fracciones planteando la notación matemática formal: Dado los números racionales de la forma $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ diremos que la primera es igual que la segunda cuando se verifica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a.d = b.c$.

En la segunda sesión, se desarrolló las situaciones D, E, F, G. Los resultados obtenidos fueron satisfactorios, en la **situación de acción** se encontró que 16 estudiantes resolvieron correctamente las situaciones D, E, F, completaron cada una de las tablas identificando las nuevas fracciones que definían la relación entre los ingredientes a partir de la variación del número de porciones. 4 estudiantes presentaron dificultad en la solución de las situaciones D, E, F, debido a errores multiplicativos. Respecto a los resultados obtenidos en la ejecución de la situación G se encontró que 9 estudiantes lograron responder el primer interrogante explicando que para preparar un pastel para 40 personas Sofía tenía que multiplicar por cinco los ingredientes de la receta. 8 estudiantes plantearon que los ingredientes se multiplicaban, aumentaban, cambiaban, pero no especificaron la cantidad y 3 estudiantes no lo resolvieron. Es importante resaltar que el segundo interrogante de la situación no fue resuelto por ninguno de los estudiantes, puesto que este remitía al planteamiento de una conclusión.

En la **situación de formulación** los estudiantes se organizaron en seis grupos y confrontaron las respuestas de las fracciones obtenidas en las tablas. La maestra solicitó que en el cuaderno se planteara la clase de equivalencia del número racional encontrado al comparar los ingredientes, a partir de la notación simbólica presentada en la clase anterior, además como grupo debían formular una conclusión para dar respuesta a los interrogantes de la situación G.

En la **situación de validación**, cada grupo presentó la solución de una de las situaciones, las interacciones entre la maestra y los estudiantes se centró en determinar que las fracciones generadas por la variación del número de porciones de la receta original se podían representar de la forma $\frac{a}{b}, \frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \ldots \frac{na}{nb},$ y que dichas fracciones conservaban la relación de equivalencia: “1 a 3” (situación D) “3 a 1” (situación E) “3 a 4” (situación F).

En la socialización de la situación E, los estudiantes identificaron que las fracciones $\frac{6}{2}, \frac{9}{3}, \frac{12}{4}, \frac{15}{5}$representan el número entero 3, porque la fracción original tenía como denominador 1. Este planteamiento llevó a que la maestra institucionalizara nuevas propiedades de los números racionales.

Las conclusiones formuladas por cada uno de los grupos fueron de dos clases. La primera correspondió al reconocimiento de la variación de la receta original para obtener una receta para 40 porciones, respecto a esto se puede plantear que la totalidad de los grupos comprendieron que los ingredientes tenían que ser multiplicados por cinco, por tanto, todos los ingredientes aumentaban pero conservaban la misma relación entre ellos. La segunda conclusión estaba anudada al objeto matemático estudiado, los estudiantes analizaron que las fracciones encontradas correspondían a fracciones equivalentes, es decir fracciones que *“representaban lo mismo”* porque se habían generado multiplicando la fracción que representaba la relación inicial por el factor de variación de la receta. También identificaron la propiedad de relación de equivalencia a partir del siguiente razonamiento: *“si se multiplica las fracciones en cruz el resultado es el mismo”.* Otro aspecto a resaltar consiste en que todos los estudiantes comprenden que existen infinitas clases de equivalencia del número racional. A continuación se trascriben las conclusiones presentadas por los seis grupos:

Tabla 15 Validación Situación # 8

GRUPO	PRIMERA CONCLUSIÓN	SEGUNDA CONCLUSIÓN
1	“Sofía tiene que multiplicar los ingredientes que le dio su mamá por 5 entonces tendrá un pastel del tamaño suficiente para los 40 invitados a la fiesta”	“la fracción tiene infinitas fracciones equivalentes si nosotros las multiplicamos y las dividimos en el mismo número”
2	“Cuando multiplicamos 8 x 5 nos da 40 entonces tenemos que multiplicar por 5 la relación de la harina con la leche, cocoa, vainilla”	“La conclusión es que de un solo punto podemos encontrar muchas fracciones equivalentes multiplicando y dividiendo la fracción por números iguales”
3	“La conclusión que se puede hacer en la preparación de la receta para 40 personas es que tiene que multiplicar cada cantidad de cada receta porque se necesita agregar más harina, huevos, leche, vainilla, cocoa. Se aumenta multiplicando por 5”	“Haciendo comparaciones de una fracción se sacan un poco de fracciones equivalentes porque son diferentes pero representan lo mismo”
4	“Sofía tiene que multiplicar por 5 para que prepare su receta”	“Las fracciones de la tabla son equivalentes porque representan lo mismo”
5	“Sofía tiene que multiplicar por 5 los ingredientes que le dio su mamá para que ella pueda hacer el pastel para 40 personas”	“La conclusión es que podemos sacar infinitas fracciones multiplicando”
6	“Lo que sucede con los ingredientes es que Sofía tiene que aumentar más y multiplicarlo por 5”	“todas las fracciones equivalentes cuando se multiplican dan lo mismo $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 24$”

En la **situación de institucionalización**, la maestra se centró en demostrar que dos magnitudes variables podían asumir valores diferentes pero recíprocamente unidos siempre por la misma relación. También realizó la formalización de dos nuevas propiedades de los números racionales: la primera corresponde a la comprensión que todo número entero puede ser expresado como un número racional cuyo denominador es uno. La segunda propiedad es que *"la fracción $\frac{a}{b}$ representa un entero cuando a es múltiplo de b"*

6.1.7 Descripción y análisis de las resultados situación # 9 y # 10

Estas situaciones se realizaron con la finalidad de evaluar los aprendizajes logrados después de implementar la secuencia didáctica a partir de los elementos propuestos en la Teoría de las Situaciones Didácticas en relación a la acción, formulación, validación e institucionalización.

Las situaciones solamente se resolvieron de manera individual y a partir de los resultados obtenidos se analizó si hubo avance en la comprensión del número racional a partir del significado de fracción como razón. Los objetivos de las situaciones eran comparar dos relaciones en contexto de mezclas y de intercambios a partir de la utilización de fracciones equivalentes. A continuación se describen los resultados obtenidos al plantear las situaciones evaluativas.

Para la solución de la novena situación se esperaba que los estudiantes en un primer momento reconocieran que la relación de comparación estaba definida por las expresiones fraccionarias $\frac{5}{3}$ y $\frac{20}{8}$, luego utilizaran la estrategia de igualar las cantidades a partir del concepto de fracciones equivalentes y de esta manera compararan la intensidad de sabor en las dos naranjadas.

Esta situación fue desarrollada correctamente por 17 de los 20 estudiantes participantes de la intervención didáctica. Todos los estudiantes lograron representar correctamente la relación de comparación a partir de la expresión fraccionaria, la solución fue propuesta a partir de procedimientos numéricos y en palabras.

Se presentaron dos clases de procedimientos numéricos para encontrar las fracciones equivalentes que permitían igualar las relaciones, 8 estudiantes utilizaron un procedimiento que consistió en construir nuevas relaciones a partir de la relación inicial definida en el enunciado, *"5 vasos de agua por cada 3 vasos de jugo de naranja"* y *"20 vasos de agua por cada 8 vasos de jugo de naranja"*, a partir de la organización de la información en una tabla con una estructura parecida a la octava situación.

Tabla 16 Relaciones naranjada A

CANTIDAD DE AGUA	CANTIDAD DE JUGO	FRACCIÓN
5	3	$\frac{5}{3}$
10	6	$\frac{10}{6}$
15	9	$\frac{15}{9}$
20	12	$\frac{20}{12}$
25	15	$\frac{25}{15}$

Tabla 17 Relaciones naranjada B

CANTIDAD DE AGUA	CANTIDAD DE JUGO	FRACCIÓN
20	8	$\frac{20}{8}$
40	16	$\frac{40}{16}$
60	24	$\frac{60}{24}$

El segundo procedimiento numérico fue utilizado por 6 estudiantes, este correspondió a la definición de las clases de equivalencia a partir del proceso de complificación. Los estudiantes dejaron registrado las multiplicaciones efectuadas para encontrar la relación que permitió comparar la intensidad de las naranjadas.

$$\frac{5}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{6}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{15}{9} \qquad \frac{5}{3} = \left\{\frac{10}{6}, \frac{15}{9}, \frac{20}{12}, \dots\right\}$$

$$\frac{5}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{20}{12} \qquad \frac{20}{12} \text{ y } \frac{20}{8}$$

En los dos procedimientos numéricos luego de obtener las nuevas relaciones que igualaban las cantidades pasaron a realizar un análisis sobre la intensidad del sabor a partir de la cantidad de agua comparada con la cantidad de jugo de naranja. Concluyendo que *“la primera naranjada tenía más sabor porque tenía más jugo en comparación con la cantidad de agua”.*

De los procedimientos numéricos llama mucho la atención que ningún estudiante planteó la igualación de las relaciones por el proceso de simplificación, a pesar que esta estrategia fue utilizada y analizada en la séptima situación de la secuencia, todos optaron por encontrar las relaciones de equivalencia a través de la complificación de las relaciones.

Tres estudiantes resolvieron la situación a partir de una explicación en palabras, plantearon que la primera forma de realizar la naranjada tenía mayor intensidad porque al comparar la cantidad de agua y jugo, había más del doble de jugo que de agua. A continuación se trascriben los registros:

1. *" La bebida que para mi sabe más a naranja es la primera opción 5 vasos de agua por 3 vasos de jugo porque tendría más del doble de jugo que de agua, y la opción 20 vasos de agua por 8 vasos de jugo tiene más de la mitad de agua por eso casi no sabe a naranja"*
2. *"lo que yo digo que sabe más a naranja es en el que Sofía dice que prepara 5 vasos de agua y 3 vasos de jugo porque tiene menos cantidad de agua para que sepa más a naranjada"*
3. *"la naranjada que tiene 5 vasos de agua y 3 de jugo sabe más porque tiene el doble de jugo y la otra naranjada tiene menos del doble de jugo, esa tiene más agua y por eso no sabe casi a naranja"*

En cuanto a los 3 estudiantes que tuvieron dificultad en la solución de la situación plantearon que las dos formas de realizar la naranjada tenían el mismo sabor porque las fracciones que representaban las relaciones eran equivalentes. Esta respuesta no fue argumentada desde la utilización de procedimientos numéricos, solamente se limitaron a definir la relación desde la notación fraccionaria y escribir la respuesta en palabras. La ausencia de un registro numérico del procedimiento no permite identificar si la dificultad está anudada a la comprensión del concepto de equivalencia o a la parte operativa para hallar fracciones equivalentes.

La **décima situación** tuvo resultados muy parecidos a la situación anterior. La totalidad de los estudiantes logró definir la relación de comparación de la oferta de cada supermercado; 16 estudiantes resolvieron correctamente la situación identificando que el supermercado “El Rendidor” ofrecía una mejor oferta, por lo tanto Sofía y Juan deberían comprar los dulces en este lugar.

Los procedimientos utilizados por estos estudiantes fueron en su totalidad numéricos, 9 estudiantes construyeron tablas para representar las relaciones y 7 estudiantes definieron las clases de equivalencia de los números racionales a partir de la complificación de fracciones. A continuación se presentan los procedimientos numéricos identificados:

El primer procedimiento los estudiantes construyeron las siguientes tablas

Tabla 18 Supermercado El Rendidor

Productos pagados	Productos llevados	Fracción
2	3	$\frac{2}{3}$
4	6	$\frac{4}{6}$
6	9	$\frac{6}{9}$
8	12	$\frac{8}{12}$

Tabla 19 Supermercado Caribe

Productos pagados	Productos llevados	Fracción
3	4	$\frac{3}{4}$
6	8	$\frac{6}{8}$
9	12	$\frac{9}{12}$
12	15	$\frac{12}{15}$

En el segundo procedimiento los estudiantes dejaron indicadas las multiplicaciones de cada fracción que definía la relación de comparación entre los supermercados y luego especificaron las clases de equivalencia a partir de la notación simbólica utilizada en el desarrollo de la secuencia.

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \frac{10}{15} \dots\right\}$$
$$\frac{3}{4} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \frac{15}{20} \dots\right\}$$

Los procedimientos numéricos propuestos por los estudiantes los llevaron a analizar que el supermercado “El Rendidor” ofrecía una mejor oferta porque al pagar la misma cantidad de paquetes de dulces este supermercado daba más paquetes en relación al supermercado “El Caribe”. El análisis los estudiantes lo realizaron a partir de la comparación de la fracciones

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Es importante mencionar que ningún estudiante analizó la situación desde la identificación de la misma cantidad de productos llevados en relación a los productos pagados, es decir, si se quería llevar 12 productos en cuál de los supermercados se pagaba una cantidad menor. Este análisis se identificaba al comparar las fracciones

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

Esta comparación permitió determinar que en el Supermercado Caribe se tenía que pagar un producto más que en el otro Supermercado si se quería llevar 12 paquetes de dulce.

En cuanto a los 4 estudiantes que resolvieron de manera incorrecta la situación, utilizaron una explicación en palabras, donde presentaban que los supermercados tenían la misma oferta, así que Juan y Sofía podían comprar en cualquiera de los dos supermercados. A continuación se transcriben las respuestas dadas:

"*Es lo mismo solo cambia el número te va a salir a lo mismo porque siempre le regalan una"*

"Las dos son iguales porque son la misma oferta de regalar una"

"Ninguna parte es la misma oferta en los dos supermercados lo único que cambia es el precio y allí no se dice"

“Es lo mismo porque si se paga dos y lleva tres le están dando de oferta solo una y se pagan tres y lleva cuatro también le están dando de oferta una. Solo se podría decir que una tendría mejor oferta cuando el precio sea diferente pero en la situación no se muestran precios”

Los argumentos presentados por los estudiantes permiten identificar que solo se centran en la comparación descrita en el enunciado del problema sin analizar lo que sucedería al variar la cantidad de productos comprados en relación a los productos llevados, es decir, encontrar relaciones de equivalencia. Por otro lado los estudiantes asocian las situaciones de comparación en contexto de oferta solo al precio y no a la identificación del intercambio que resulta con mayor ventaja.

Al analizar los procedimientos desarrollados por los estudiante para solucionar las dos situaciones se identifica que la mayoría de los estudiantes utilizaron el concepto de relación de equivalencia como estrategia de solución, por tal motivo se puede decir que se avanzó en la comprensión del número racional a parir de la definición de la fracción como una expresión simbólica de infinitas clases de equivalencia del número racional. También se puede plantear que se logró institucionalizar ciertos procedimientos como la forma de calcular de manera rápida las fracciones equivalentes a partir de la complificación o simplificación, y se inició a los estudiantes en el análisis de situaciones en el marco de las relaciones de proporcionalidad.

6.2 CONCLUSIONES

Al realizar el diseño, implementación y análisis de los resultados de la secuencia didáctica se pueden plantear las conclusiones en relación a dos aspectos: los objetivos específicos de la investigación y la perspectiva de formación como maestra en ejercicio. A continuación se realiza la referencia a cada aspecto mencionado.

6.2.1 Conclusiones respectivas a los objetivos

Respecto al **primer objetivo** se puede concluir que el diseño de la situación didáctica a partir del significado de la fracción como razón permitió identificar que el concepto de equivalencia puesto en juego en las situaciones donde la fracción representa una relación de comparación entre las cantidades de la misma o diferente naturaleza en un contexto continuo o discreto, se convierten en un recurso fundamental para la construcción del número racional. Así como, la base de la comprensión y construcción del número natural es el conteo y el sistema de numeración, se puede decir que el mecanismo constructivo de los racionales corresponde a la partición y la relación de equivalencia.

Si se analizan otros subconstructos básicos del número racional se encuentra que el concepto de equivalencia se hace presente en los subconstructos de cociente, medida y operador. La relación de equivalencia en estos subconstructos solo puede ser comprendida en el marco de la estructura multiplicativa. Por tal razón, el desarrollo de la secuencia didáctica objeto de esta investigación permitió que los estudiantes descubrieran la estrecha conexión del número racional con la estructura multiplicativa.

En relación al **segundo objetivo** se identificó que la implementación de la secuencia didáctica tuvo un efecto positivo en el aprendizaje del número racional, se logró constatar la hipótesis respecto a que el significado de la fracción como razón lo que refleja es la relación existentes entre dos cantidades o la comparación entre algún número de un objeto y algún número de un segundo objeto y no el fraccionamiento de una objeto o cantidad.

Al desarrollar las situaciones se evidenció que las representaciones gráficas en dos dimensiones (diagramas rectangulares o circulares) frecuentemente utilizadas por los estudiantes para definir la fracción, poco a poco fueron siendo remplazadas por representaciones en un contexto discreto y finalmente se utilizaron únicamente representaciones numéricas; llegando a generalizar que la fracción usada como índice comparativo entre dos cantidades, no puede ser comprendida como la parte coloreada de una unidad dividida en partes iguales.

Por otro lado, el estudio de la fracción como razón posibilitó que los estudiantes reconocieran que las relaciones de comparaciones entre las cantidades podían ser definidas a partir de comparaciones de la forma parte-todo, parte-parte, todo-todo, dependiendo del tipo de situaciones que se plantean. Esta característica llevó a reconocer que el numerador y denominador en esta clase de situaciones pueden ser intercambiables porque representan el orden en el que se efectuó la relación de comparación, ya no tienen el significado estricto de partes coloreadas de la unidad y partes divididas de la unidad.

Al resolver las diferentes situaciones de la secuencia, la fracción emergió como la expresión de una razón constante. Esto llevó a que los estudiantes comprendieran que en la relación de comparación " a es a b", simbolizado por la expresión $\frac{a}{b}$, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ pueden ser dos magnitudes variables que pueden asumir valores distintos pero recíprocamente unidos siempre por la misma relación. Es decir, se identificó que al encontrar expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{2b}, \frac{3a}{3b}, \frac{4a}{4b}, \ldots \frac{na}{nb}$, estas fracciones conservaban la misma relación de equivalencia.

El descubrimiento planteado pone en evidencia que la comprensión y estudio del número racional no puede estar por fuera de las relaciones de equivalencia que lo define, es decir, que está anudado a un modelo matemático de proporcionalidad, el cual generalmente no es incluido, ni analizado en las situaciones de aprendizaje que se proponen en el aula.

> Los estudios sobre la proporcionalidad y sobre los racionales tienden a converger. Se destaca ahora aspectos centrales de la noción de fracción cuya construcción se realiza en el seno de las relaciones de proporcionalidad. De la misma manera en que los números racionales reflejan los fenómenos de fracturar, también tienen un carácter de proporcionalidad. Así, los números racionales, en sus diversos subconstructos, pueden ser comprendidos como estructuras multiplicativas. Esto se revela de manera particular en los subconstructos de razón y operador. Pero (…) las nociones de operador escalar y de operador función penetran las nociones de partición y conforman la base matemática objeto/acción para la noción de equivalencia de los números racionales. Kieren (citado por Block, 2001, p.229)

Lo anterior lleva a reconocer que la noción de razón se encuentra en la intersección de dos temas, la proporcionalidad y los números racionales desde una perspectiva didáctica.

Respecto al **tercer objetivo** es posible concluir que los estudiantes avanzaron en la comprensión del número racional. Al analizar los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica en el problema sexto, séptimo y octavo se identifica que la mayoría de los estudiantes presentaron una marcada dificultad en la determinación de la relación existente entre las magnitudes y el reconocimiento que un cambio en una de las magnitudes producía un cambio en la otra, debido a que no habían realizado un proceso de construcción del significado de fracción como razón. Luego de aplicar la secuencia didáctica se identificó que los estudiantes al enfrentarse a situaciones que exigían la comparación de magnitudes y el reconocimiento de relaciones de proporcionalidad utilizaron como estrategia de solución la determinación de fracciones equivalentes, noción que subyace al significado de la fracción como razón.

Al desarrollar cada una de las situaciones los estudiantes reconocieron relaciones y patrones numéricos que los llevaron a comprender que para generar una familia de fracciones equivalentes se necesitaba multiplicar o dividir el numerador o denominador por el mismo número.

Se logró que los estudiantes avanzaran en la comprensión del número racional como el representante canónico (irreductible) de infinitas clases de equivalencia y la fracción como la expresión simbólica de una equivalencia del número racional. De esta manera se posibilitó que los estudiantes determinaran que existe una diferencia entre estos dos conceptos[19].Realizar la conceptualización de las relaciones fraccionarias es iniciar la construcción de uno de los registros numéricos más potentes para conceptualizar la estructura de los racionales.

Finalmente, respecto al **cuarto objetivo** se puede concluir que la sistematización de los resultados obtenidos al aplicar la secuencia didáctica posibilitó reflexionar sobre la importancia de organizar y analizar las interacciones de la clase desde el modelo propuesto por la Teoría de las Situaciones didácticas. En particular, los comportamientos observados en las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización permitieron comprender que el conocimiento cumple diferentes funciones, puede ser usado como medio de acción, como medio de comunicación, como medio de prueba, o como un medio de formalización teórica.

Al intentar plantear una posible resolución de la situación el estudiante usa sus conocimientos previos, a partir de estos infiere las decisiones y crea las

[19] De manera formal, la diferencia de estos dos conceptos radica en que los números racionales son definidos como elementos de un campo infinito consistente de clases de equivalencias infinitas y los elementos de estas clases de equivalencia son las fracciones.

estrategias de resolución que son aceptadas o rechazadas según su eficacia. El conocimiento aquí funciona como un recurso implícito que solo puede ser identificado y comprendido por el maestro. En las primeras aplicaciones de las situaciones de la secuencia, los estudiantes planteaban las estrategias de solución apelando únicamente a la definición de fracción como partes de una unidad, luego fueron identificando la fracción como una relación de comparación e incluyendo nuevas propiedades del número racional.

En la comunicación de la estrategia de resolución utilizada por el estudiante a partir del trabajo entre pares, algunos aspectos del conocimiento puesto en juego se convierten en un recurso explícito desde la utilización de un lenguaje informal. Respecto a este, durante la aplicación de la secuencia los estudiantes tuvieron dificultad en la comunicación de la estrategia de manera espontánea, puesto que se limitaban solamente a dar la respuesta sin una explicación apoyada en la explicitación de los conocimientos previos utilizados. Luego de la intervención de la maestra para orientar la fase de formulación a lo largo de las primeras situaciones se logró que los estudiantes participaran de una manera más fluida y reconocieran el conocimiento previo puesto en juego.

En el momento de organización de la clase en la plenaria general al exponer o enunciar la estrategia construida para la solución, el conocimiento se presenta como un medio de prueba, es decir como la oportunidad de convencer al otro de la validez del conocimiento construido. Finalmente, en el momento de la institucionalización el maestro le otorga al conocimiento construido por los estudiantes el estatus teórico, es decir, lo nombra y define a partir del vinculo con los saberes culturales.

En la aplicación de las situaciones de la secuencia los estudiantes durante el trabajo en equipo analizaron, discutieron y construyeron una solución de la situación que presentaron durante la plenaria general, la cual fue puesta a prueba a partir de los argumentos matemáticos utilizados. En este momento de la clase la maestra continuamente orientó las interacciones a partir del planteamiento de interrogantes que permitieran explicitar el conocimiento matemático que se esperaba movilizar con la situación. Al finalizar cada sesión de clase la maestra organizó y sintetizó las producciones de los estudiantes a partir de la formalización teórica del conocimiento estudiado. De manera particular, se puede plantear que en el desarrollo de la secuencia se realizó la definición de la fracción como razón determinando las relaciones de comparación entre las cantidades y sus diferentes formas de representación (gráfica, numérica, verbal). También se generalizó algunas propiedades del número racional como: la relación de equivalencia, la complificación y simplificación de las fracciones, la expresión fraccionaria impropia en expresión fraccionaria mixta, entre otras.

Para finalizar, se debe mencionar que la utilización de algunos elementos de la Ingeniería Didáctica como metodología propia de la didáctica de las matemáticas se convirtió en un instrumento fundamental para estructurar y materializar esta investigación de carácter experimental en el aula. El análisis a priori y el análisis a posteriori permitieron en un primer momento anticipar y controlar los posibles comportamientos de los estudiantes y su significado; en un segundo momento facilitaron la confrontación de la hipótesis a partir de los resultados obtenidos y observados en la fase de experimentación de la secuencia didáctica, para validar la pertinencia y potencia en relación al aprendizaje de concepto matemático del número racional.

6.2.2 Conclusiones desde la perspectiva de formación

El desarrollo de este trabajo posibilitó comprender la complejidad de los elementos que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático número racional, llevando a reconocer la necesidad urgente de redimensionar la manera de abordarse este objeto en el contexto escolar para lograr así desarrollar procesos de conceptualización en los estudiantes que les permitan construir un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana.

Por otro lado, se logró la apropiación de elementos conceptuales para el diseño y aplicación de secuencias didácticas que tienen como propósito la construcción del conocimiento matemático, donde se identifica explícitamente la necesidad de utilizar contextos de participación colectiva que posibiliten la interacción entre los tres elementos involucrados en todo proceso educativo (estudiante – maestro – saber); un contexto propicio para ello son las situaciones que se dan en el marco de secuencias didácticas, puesto que estas ponen en acto el despliegue de procesos de exploración, formulación de hipótesis, confrontación, validación y generalización.

Es importante tener en cuenta que cuando se diseña una secuencia didáctica es necesario reconocer que una situación pone en acto varios objetos matemáticos en estrecha interconexión que deben ser explicitados en su resolución, y paralelamente, una solo situación no es suficiente para generar aprendizaje; se requiere de un conjunto de situaciones que expliciten todas las variables posibles e interconexiones con otros conceptos matemáticos. El problema del aprendizaje de los objetos matemáticos y su conceptualización requieren de continuidad en el mismo ciclo de escolaridad y otros ciclos si realmente se espera que los estudiantes construyan competencias matemáticas y dominen las situaciones problemas a las cuales se ven enfrentados.

6.3 RECOMENDACIONES

Después de analizar los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia se puede sugerir que se involucren otras situaciones donde la fracción como razón se utilice para realizar comparaciones del tipo todo-todo, a partir del concepto de escala; situaciones del tipo parte-todo desde el concepto de porcentaje y probabilidad. Respecto a esto es necesario definir que el porcentaje puede considerarse como un caso particular de la fracción como razón, es decir, que puede ser comprendido como una regla de correspondencia “$n\ de\ cada\ 100$" y como una relación de comparación entre conjuntos estableciendo subconjuntos de cien partes. La probabilidad puede ser comprendida a partir del planteamiento de una escritura fraccionaria donde se compara el número de casos favorables del evento, con respecto al número de casos posibles.

Otras situaciones que permiten la comprensión de la fracción como razón corresponden contextos geométricos, a partir de conceptos como homotecia y semejanza de figuras. Al incluir situaciones desde los conceptos mencionados los estudiantes pueden reconocer y comprender que los racionales en su función de expresar la relación con respecto al tamaño de dos magnitudes o conjuntos se encuentran en una variedad de aplicaciones en la vida cotidiana, las matemáticas y otras ciencias.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

- Block, D. (2001). La noción de razón en las matemáticas de la escuela primaria. Un estudio didáctico. *Unpublished Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México*.

- Block, D. (2007). El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Un reporte iberoamericano, México, Díaz de Santos de México, Clame*, 455-470.

- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

- Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

- Flores, R (2010). Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria. Tesis de Maestría. México: Instituto Politécnico Nacional.

- Gairin, J (1998) Sistema de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.
- Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A., Lacasta, E., &Wilhelmi, M. R. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño.

- Icfes (2010). Prueba saber 2009, informe ejecutivo. En: *http://www.icfes.gov.co/investigaciones/informe-de-resultado-de-evaluaciones-nacionales/saber-3-5-y-9.*

- Icfes (2010). Resultados de Colombia en TIMSS 2007, Resumen Ejecutivo. En: *http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/timss*

- Icfes (2013) Resultados de Colombia en PISA 2012, Resumen Ejecutivo. En http://www.icfes.gov.co/investigacion/evaluaciones-internacionales/pisa

- Fernández, A., & Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *5*(2), 397-416.

- Llinares, S., & Sánchez, M. (1988). *Fracciones: la relación parte-todo*. Madrid: Síntesis.

- Llinares, S. (2003). *Fracciones, decimales y razón*. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C, Chamorro. (ed.) Didáctica de las Matemáticas (pp. 187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

- MEN. (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá: Editorial Magisterio.

- MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas M. d. E. Nacional (Ed.). Bogotá: MEN.

- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, *8*(2), 157-182.

- Pontón, T. (Abril 2003). La argumentación en la movilización de los números fraccionarios. *III Encuentro Nacional por la Calidad de la Enseñanza de las Matemáticas*. Popayán, Colombia.

- Pontón, T. (2008). Una propuesta multirregistro para la conceptualización inicial de las fracciones. Tesis de Maestría. Cali: Universidad del Valle.

- Pontón, T. (2012). La comprensión de enunciados de problemas en la enseñanza y el aprendizaje inicial de los números racionales. Tesis de doctorado no publicada. Cali: Universidad del Valle.

- Posada, M y otros autores (2005). *Interpretación e implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas.* Gobernación de Antioquia. Secretaria de Educación.

- Restrepo, G. (1994) *Fundamentos de la Matemática*. Cali: Centro Editorial Universidad del Valle.

- Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas.

- de Almeida, I. C., & Moreno, L. D. (2011). Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales (CO). En *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*.

- Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. *Reflexiones teóricas para la educación matemática*, *5*, 13.

- Vasco, C. (2012). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5º grado. En Areta, J. (Ed). *Los fraccionarios en primaria: retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido* (pp. 19-54). Barranquilla: Editorial Universidad del Norte.

ANEXO A

INSTRUMENTO PRUEBA DIAGNÓSTICA

Resuelve cada situación planteado los procedimientos o argumentos que te permitieron encontrar la solución.

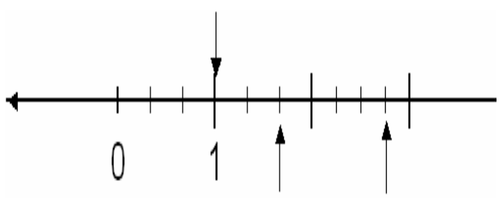
1. Representa en forma de fracción los siguientes enunciados:

a. Dos quintas partes del rectángulo está coloreado. ___

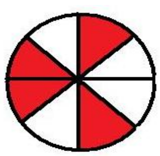
b. María se comió las tres cuartas partes de la pizza. ____

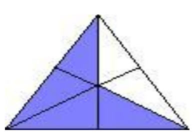
c. La mitad de los estudiantes son niñas. _____

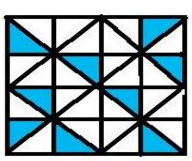
2. ¿Qué fracciones están representadas en la recta numérica?



3. ¿Qué fracción se representa en cada gráfica?

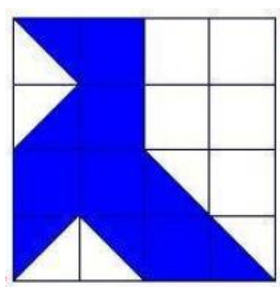
a. 

b. 

c. 

4. . Luis desea repartir tres cañas de azúcar de la misma longitud entre seis niños. ¿Qué cantidad de caña de azúcar le corresponde a cada niño?

5. En la parcela de la familia Molina se realizó la siembra de dos tipos de caña de azúcar como lo muestra la figura. La parte sombreada corresponde a la siembra de caña cristalina y el resto corresponde a la siembra de caña violeta. ¿Qué fracción del área total de la parcela se destinó a la siembra de caña cristalina?



6. Para el trabajo en la finca La Esperanza se tienen dos tractores. Un tractor recorre 3 metros en 5 minutos y el otro tractor recorre 4 metros en 6 minutos. ¿qué tractor trabaja más rápido?

7. Para la fumigación de la cosecha de la caña un agricultor utiliza 2 litros de agua por cada 5 gramos de un herbicida. Si para fumigar una hectárea utiliza en total 30 gramos del herbicida ¿Cuántos litro de agua gasta? (Completa la tabla)

Litros de agua	2		6		10	
Gramos herbicida	5		15		25	

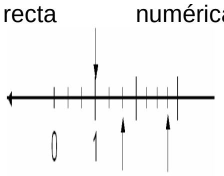
8. Para producir 224 kg de azúcar en un Ingenio se necesita procesar dos toneladas de caña (2000 kg). ¿Cuántas toneladas de caña se utiliza para producir 672 kg de azúcar?

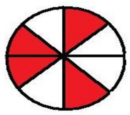
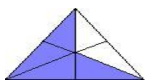
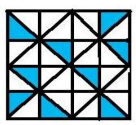
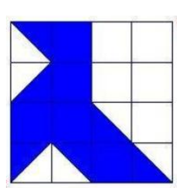
9. En el valle del Cauca de cada 120 toneladas de caña producida se utiliza el 30% para la producción de biocombustibles. ¿Qué cantidad de toneladas de caña se destina a la producción de biocombustible.

10. La población estimada del corregimiento de Amaime según el DANE corresponde a 6200 habitantes, de los cuales las dos quintas partes de la población corresponde a menores de edad. ¿Qué cantidad de los habitantes son menores de edad?

ANEXO B

Rejilla de análisis prueba diagnóstica

Situación	Categoría	Indicador	Número de estudiantes con respuestas correctas	Número de estudiantes con respuestas incorrectas	Número de estudiantes que no responden
1. Representa en forma de fracción los siguientes enunciados: **a.** Dos quintas partes del rectángulo está coloreado. ___ **b.** María se comió las tres cuartas partes de la pizza. ____ **c.** La mitad de los estudiantes son niñas. _____	**Representación de la fracción utilizando diferentes registros semióticos: verbal, figural, numérico.**	Representa la fracción a partir de un enunciado verbal.	18 estudiantes 90%	2 estudiantes 10%	0
1. ¿Qué fracciones están representadas en la recta numérica?  		Identifica la fracción representada en la recta numérica.	2 estudiantes 10%	14 estudiantes 70%	4 estudiantes 20%

2. ¿Qué fracción se representa en cada gráfica?   		Representa la fracción a partir de la utilización de contextos continuos.	11 estudiantes 55%	9 estudiantes 45%	0
3. Luis desea repartir tres cañas de azúcar de la misma longitud entre seis niños. ¿Qué cantidad de caña de azúcar le corresponde a cada niño? **4.** 	**Fracción como cociente.**	Identifica la fracción como una división en situación de reparto	14 estudiantes 70%	6 estudiantes 30%	0
5. En la parcela de la familia Molina se realizó la siembra de dos tipos de caña de azúcar como lo muestra la figura. La parte sombreada corresponde a la siembra de caña cristalina y el resto corresponde a la siembra de caña violeta. ¿Qué fracción del área total de la parcela se destinó a la siembra de caña cristalina? 	**Fracción desde la relación parte-todo.**	Determina relaciones fraccionarias a partir de la comparación entre áreas sombreadas en una figura.	11 estudiantes 55%	6 estudiantes 30%	3 estudiantes 15%

<table>
<tr>
<td>6. Para el trabajo en la finca La Esperanza se tiene dos tractores. Un tractor recorre 3 metros en 5 minutos y el otro tractor recorre 4 metros en 6 minutos.

¿Qué tractor trabaja más rápido?</td>
<td rowspan="3">Fracción como razón.</td>
<td rowspan="3">Establece comparaciones entre dos magnitudes de igual o diferente naturaleza.</td>
<td>1 estudiante

5%</td>
<td>16 estudiantes

80%</td>
<td>3 estudiantes

15%</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Para fumigación de la cosecha de la caña un agricultor utiliza 2 litros de agua por cada 5 gramos de un herbicida. Si para fumigar una hectárea utiliza en total 30 gramos del herbicida

¿Cuántos litros de agua gasta?

(Completa la tabla)
<table>
<tr><td>Litros de agua</td><td>2</td><td></td><td>6</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>Gramos herbicida</td><td>5</td><td></td><td>15</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>15 estudiantes

75%</td>
<td>4 estudiantes

20%</td>
<td>1 estudiante

5%</td>
</tr>
<tr>
<td>8. Paraproducir 224 kg de azúcar en un Ingenio se necesita procesar dos toneladas de caña (2000 kg). ¿Cuántas toneladas de caña se utiliza para producir 672 kg de azúcar?</td>
<td>2 estudiantes

10%</td>
<td>14 estudiantes

70%</td>
<td>4 estudiantes

20%</td>
</tr>
<tr>
<td>9. En el valle del Cauca de cada 120 toneladas de caña producida se utiliza el 30% para la producción de biocombustibles. ¿Qué cantidad de toneladas de caña se destina a la</td>
<td>Fracción como porcentaje.</td>
<td>Calcula el porcentaje de un número.</td>
<td>0</td>
<td>13 estudiantes

65%</td>
<td>7 estudiantes</td>
</tr>
</table>

producción de biocombustible?					35%
10. La población estimada del corregimiento de Amaime según el DANE corresponde a 6200 habitantes, de los cuales las dos quintas partes de la población corresponde a menores de edad. ¿Qué cantidad de los habitantes son menores de edad?	**Fracción como operador.**	Reconoce la fracción como operador multiplicativo que transforma una cantidad.	0	13 estudiantes 65%	7 estudiantes 35%

ANEXO C

UNIVERSIDAD ICESI

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

Secuencia didáctica para el aprendizaje del número racional en grado sexto de la Educación Básica a partir del significado de la fracción como razón.

Angélica María Ortega Gálvez

INSTRUCCIONES:

El desarrollo de las situaciones propuestas a continuación se realizará a partir de las siguientes instrucciones:

1. Resolver de manera individual cada situación planteando en el espacio asignado los procedimientos numéricos, gráficos o argumentos que permiten encontrar la solución.
2. Formar grupos de tres estudiantes para presentar y explicar los procedimientos y estrategias utilizadas para resolver la situación problema.
3. Elegir un integrante del grupo de trabajo para que presente ante la clase el procedimiento o la estrategia válida seleccionada por el grupo para resolver la situación problema.

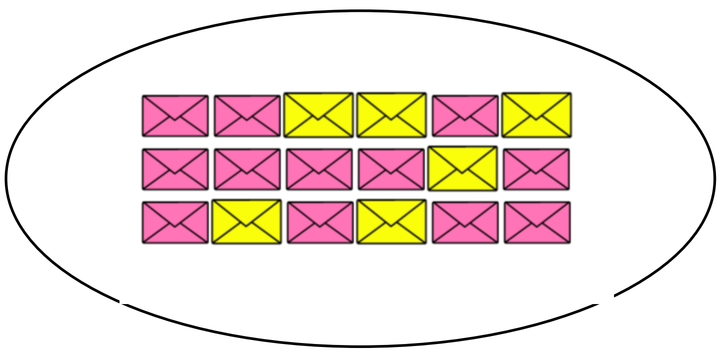
Juan y Sofía organizarán una fiesta de cumpleaños. Para ello se han distribuido las tareas de la siguiente manera: Juan se encargará de las invitaciones y la decoración, Sofía se encargará de los alimentos y bebidas. Ayuda a Juan y Sofía a resolver las situaciones que se les presentan durante la organización de la fiesta. Puedes utilizar procedimientos gráficos, numéricos y verbales.

SITUACIÓN 1

Para realizar las tarjetas de invitación a la fiesta Juan tiene 9 cartulinas, de las cuales 5 son de color blanco y 4 de color azul. Expresa, mediante una fracción, la relación existente entre el número de cartulinas color blanco respecto al número de cartulinas color azul.

SITUACIÓN 2

Juan ha comprado varios paquetes de sobres para las tarjetas invitación. Cada paquete trae sobres de dos colores diferentes como lo muestra la figura. Responde las preguntas propuestas.



a. ¿Qué parte del total de los sobres son de color amarillo?

b. Juan plantea la siguiente relación: ***"por cada sobre amarillo hay dos sobres rosados"*** ¿Es correcta esta comparación? Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 3

Juan quiere invitar a la fiesta 5 niños por cada 3 niñas. ¿Qué relación se puede establecer entre la cantidad de niños comparados con la cantidad de niñas invitadas a la fiesta? Represente de manera gráfica y numérica la relación (niños a niñas).

SITUACIÓN 4

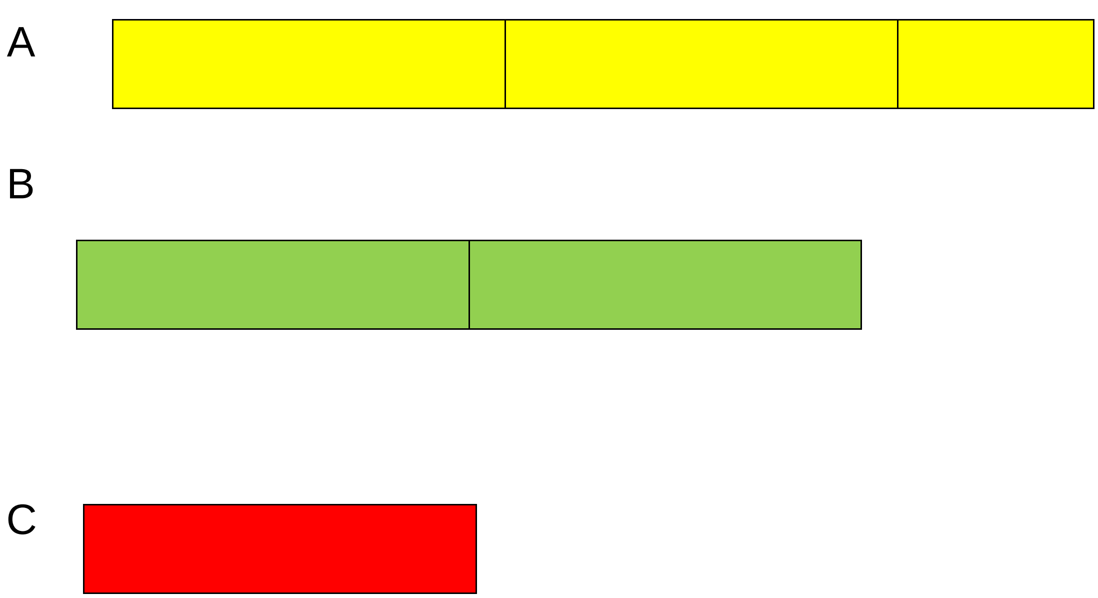
Sofía está de acuerdo con la cantidad de niños a invitar a la fiesta según el modelo propuesto por Juan, 5 niños por cada 3 niñas. Si Sofía quiere que asistan 15 niñas a la fiesta ¿cuántos niños deberán invitar?

SITUACIÓN 5

Juan alquilará para la fiesta 7 mesas y 35 sillas. Sofía plantea que la relación entre la cantidad de mesas comparada con la cantidad de sillas se puede definir como: ***"1 mesa por cada 4 niños"***. ¿Estás de acuerdo con la afirmación planteada por Sofía? Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 6

Para realizar un adorno Juan tiene tres cintas de diferente color y longitud. La cinta amarilla (A) es una vez y un cuarto de la cinta de color verde (B) y la cinta roja (C) es la mitad de la cinta color verde. ¿Qué relación se puede establecer entre cada una de las longitudes de las cintas?



SITUACIÓN 7

Sofía organizará algunos alimentos de sal y dulce en tres mesas de diferentes tamaños. En la primer mesa colocará 18 deditos de queso por cada 12 chocolatinas, en la segunda mesa colocará 9 pasteles de pollo por cada 6 galletas y en la última mesa colocará 27 empanadas por cada 18 bombones. **Escribe de forma numérica la relación descrita y luego determina qué mesa crees tú tiene más alimentos de sal.**

SITUACIÓN 8

Para preparar el pastel Sofía utilizará la receta del pastel de chocolate que realiza su mamá.

RECETA PASTEL DE CHOCOLATE

8 personas

Ingredientes

3 tazas de harina.
2 cucharadas de polvo para hornear.
2 barras de mantequillas.
4 cucharadas de esencia vainilla.
2 taza de azúcar.
5 huevos.
1 taza de leche.
9 cucharadas de **cocoa**.

Modo de preparación

En un recipiente mezcla la mantequilla con el azúcar, agrégale uno a uno los huevos, la harina cernida con el polvo para hornear, la cocoa y bate, enseguida agrega la leche y la esencia de vainilla, sigue batiendo hasta incorporar todo completamente. En un molde engrasado vierte la mezcla y mete al horno durante 30 o 45 minutos a una temperatura de 250° C. Decóralo con crema chantilly o crema de chocolate como tú prefieras.

a. A partir de la receta utilizada por la mamá de Sofía para preparar un pastel de 8 porciones, establece una relación entre la cantidad de harina y la cantidad de azúcar, de huevos, de esencia de vainilla, de cocoa y de leche. Según el ejemplo propuesto.

CANTIDAD	**REPRESENTACIÓN NUMÉRICA**	**REPRESENTACIÓN GRÁFICA**
Tres tazas de harina por cada dos tazas de azúcar	$\frac{3}{2}$	
Tres tazas de harina por cada 5 huevos		
Tres tazas de harina por cada 4 cucharadas de esencia de vainilla		
Tres tazas de harina por cada 9 cucharadas de cocoa		
Tres tazas de harina por cada taza de leche		

b. Realiza la comparación entre la cantidad de harina y azúcar necesaria para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32, 40 porciones.

PORCIONES DEL PASTEL	CANTIDAD DE HARINA	CANTIDAD DE AZÚCAR	$\frac{Cantidad\ de\ harina}{Cantidad\ de\ azúcar}$
8			
16			
24			
32			
40			

c. Realiza la comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de huevos necesarios para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32, 40 porciones.

PORCIONES DEL PASTEL	CANTIDAD DE HARINA	CANTIDAD DE HUEVOS	$\frac{Cantidad\ de\ harina}{Cantidad\ de\ huevos}$
8			
16			
24			
32			
40			

d. Realiza la comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de cocoa necesaria para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32, 40 porciones.

PORCIONES DEL PASTEL	**CANTIDAD DE HARINA**	**CANTIDAD DE COCOA**	$\frac{Cantidad\ de\ harina}{Cantidad\ de\ cocoa}$
8			
16			
24			
32			
40			

e. Realiza la comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de leche necesaria para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32, 40 porciones.

PORCIONES DEL PASTEL	**CANTIDAD DE HARINA**	**CANTIDAD DE LECHE**	$\frac{Cantidad\ de\ harina}{Cantidad\ de\ leche}$
8			
16			
24			
32			
40			

f. Realiza la comparación entre la cantidad de harina y la cantidad de esencia de vainilla necesaria para preparar un pastel para 8, 16, 24, 32, 40 porciones.

PORCIONES DEL PASTEL	**CANTIDAD DE HARINA**	**CANTIDAD DE ESENCIA DE VAINILLA**	$\dfrac{Cantidad\ de\ harina}{Cantidad\ de\ esencia\ de\ vainilla}$
8			
16			
24			
32			
40			

g. Sofía necesita preparar la receta para aproximadamente 40 personas. ¿Qué sucede con las cantidades de cada ingrediente? ¿Qué conclusión se puede plantear?

SITUACIÓN 9

Las bebidas que se darán en la fiesta son limonada, naranjada, té y gaseosa. Para preparar la naranjada Sofía tiene dos maneras de realizarla. Una consiste en agregar 5 vasos de agua y 3 vasos de jugo de naranja, la otra manera es agregar 20 vasos de agua y 8 vasos de jugo de naranja. ¿Cuál de las dos bebidas crees tú que sabe más a naranja? Justifica tu respuesta.

SITUACIÓN 10

Para realizar las compras de los alimentos que se consumirán en la fiesta Sofía y Juan visitan varios supermercados para observar las ofertas y descuentos que estos ofrecen. Dos supermercados ofrecen ofertas en la sección de dulces. En el Supermercado el Rendidor la oferta del día es “***Pague 2 lleve 3”*** y en el Supermercado Caribe la oferta es “***Pague 3 lleve 4”*** ¿Cuál supermercado ofrece una mejor oferta y por qué?

ANEXO D

REJILLA CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS SITUACIONES

SITUACIÓN	CATEGORIAS	INDICADORES
PRIMERA SITUACIÓN	Significado de la fracción como razón.	• Identifica el significado de la fracción como razón a partir de la comparación entre dos partes de un todo.
. SEGUNDA SITUACIÓN	Significado de la fracción como razón.	• Determina la relación de comparación entre una parte y el todo y entre dos partes de un todo
TERCERA SITUACIÓN	Representación de la fracción como razón	• Expresa el significado de la fracción como razón a partir de la utilización de diferentes representaciones: numérica, verbal, pictórica.
CUARTA SITUACIÓN	Igualdad de razones Razonamiento proporcional	• Reconoce relaciones de proporcionalidad.

QUINTA SITUACIÓN	Comparación de razones	• Identifica si la relación de comparación pertenece a la misma clase de equivalencia.
SEXTA SITUACIÓN	Significado de la fracción como razón en contexto de medición. Expresión fraccionaria impropia a expresión fraccionaria mixta	• Comprender el número racional como la cantidad que expresa la medida de una magnitud con respecto a otra tomada como unidad de referencia. • Aplicar la propiedad para expresar una fracción impropia en un número mixto.
SEPTIMA SITUACIÓN	La fracción como una clase de equivalencia	Reconoce el número racional como una clase de equivalencia de fracciones mediante procesos de amplificación o simplificación.
OCTAVA SITUACIÓN	Fracciones equivalentes	• Conceptualiza el número racional como una

	Relación proporcional	clase de equivalencia de fracciones a partir de la relación de comparación entre dos cantidades en contexto de recetas. • Identifica la fracción como una expresión de una razón constante. • Generaliza el procedimiento para obtener fracciones equivalentes.
NOVENA SITUACIÓN	Fracción como razón en contextos de mezclas. Fracciones equivalentes	• Compara dos relaciones a partir de la utilización de fracciones equivalentes.
DÉCIMA SITUACIÓN	Fracción como razón en contexto de ofertas. Fracciones equivalentes	• Utiliza el significado de fracción como razón para comparar situaciones de intercambio y tomar decisiones.

ANEXO E

MODELO DE TRANSCRIPCIÓN DE UNA SESIÓN DE CLASE

REGISTRO DE OBSERVACIÓN # 1

Día de realización: septiembre 26 de 2014

Hora de inicio de la observación 7:30 am **Hora de finalización** 9:30 am

Generalidades: La observación se realiza en el grado 6-1 de la Institución Educativa Semilla de la Esperanza. Institución de carácter oficial ubicada en el corregimiento de Amaime zona rural del municipio de Palmira. El total de estudiantes en ese grado es 20, conformado por 8 niños y 12 niñas, cuyas edades se encuentra en un rango entre 11 a 15 años. Este día solo asistieron 17. En esta clase se da inicio a la implementación de las situaciones de la secuencia didáctica a partir del desarrollo de la primera situación.

P: hoy vamos a solucionar la primera situación, para ello primero van a leer las instrucciones es decir los pasos que van a realizar. (Lee la instrucción de la hoja entregada a los estudiantes) ¿Quién me explica con sus palabras cuál es el trabajo solicitado para resolver las situaciones que vamos a empezar a desarrollar en la clase? (observa a los estudiantes)

P: a ver Jhoan, explique qué es lo que se debe hacer.

J: primero leemos y resolvemos solos el problema, luego trabajamos en grupo contando como encontramos la respuesta y luego sale uno al tablero para mostrar lo que hicimos en grupo.

P: gracias Jhoan, recuerden que deben resolver de manera individual cada situación planteando los argumentos o procedimientos que te permiten solucionar la situación problema. Luego usted se tiene que reunir en grupo de tres personas y va a explicarle a sus compañeros como soluciono la situación y luego van a elegir a uno de los compañeros para que presente ante la clase la solución. ¿Entendieron? (un estudiante habla en voz alta)

C: si, pero profe ¿dónde escribimos?

P: en el cuaderno, recuerden que la hoja debe estar pegada. (Realiza la lectura en voz alta de la situación

Juan y Sofía organizarán una fiesta de cumpleaños. Para ello se han distribuido las tareas de la siguiente manera: Juan se encargará de las invitaciones y la decoración, Sofía se encargará de los alimentos y bebidas. Ayuda a Juan y Sofía a resolver las situaciones que se les presentan durante la organización de la fiesta. Puedes utilizar procedimientos gráficos, numéricos y verbales.

SITUACIÓN 1

Para realizar las tarjetas de invitación a la fiesta Juan tiene 9 cartulinas, de las cuales 5 son de color blanco y 4 de color azul. Expresa, mediante una fracción, la relación existente entre el número de cartulinas color blanco respecto al número de cartulinas color azul.

P: ¿Cuál es el primer paso que deberían hacer? ¿Resolverlo cómo? (Los estudiantes responden en coro)

E: de manera individual

P: muy bien (Los niños trabajan de manera individual en el cuaderno, registrando los procedimientos, la maestra se desplaza a lo largo del salón para verificar que los estudiantes estén resolviendo el problema, algunos niños realizan preguntas buscando validar si lo que están haciendo les ayuda a solucionar la situación)

P: ¿Quién falta por terminar? (Varios niños levantan la mano, por lo tanto la profesora da otros minutos más para que la totalidad de los estudiantes terminen la situación)

E: ¿profe nos organizamos ya en grupos?

P: si

(los niños se organizan en los grupos de manera autónoma. Los grupos quedan conformado de la siguiente manera: grupo # 1: Johan, Mary, Juliana; grupo # 2: Maicol, María Camila y Julieth; grupo # 3: Miguel, Daniela, Yesica; grupo # 4: Juan Camilo, Juan David y Juan Carlos; grupo # 5 Joselyn , Jorge Eliecer, Carlos; grupo # 6 Jorge Guatusmal y Héctor)

P: vamos a contarle a cada uno de los integrantes cuál es la solución que usted le dio a la situación y ¿por qué? Cada uno le cuenta a sus compañeros cómo lo hizo y van a elegir quien va a salir a presentar la solución.

(Los niños trabajan por grupos explicando los procedimientos)

P: ¿Qué grupo quiere salir a presentar la solución de la situación a la que llegaron luego de presentar su trabajo individual?, recuerden que deben explicar los procedimientos.

(La profesora de nuevo lee la situación)

M: profesora, ¿puedo salir con el cuaderno?

P: claro, salga pues, Miguel el tablero es todo suyo. (Sale un integrante del grupo # 3)

M: bueno, primero voy a escribir lo que hicimos (el niño registra en el tablero la siguientes fracciones $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$**).**

P: lee por favor, las fracciones que representaste.

M: Cinco novenos y cuatro novenos

P: Miguel ¿Qué representa esta fracción? (la profesora encierra en el tablero la fracción $\frac{5}{9}$)

M: las cartulinas blancas sobre todas las cartulinas juntas que son nueve, ¿está bien? (el niño escribe en el tablero $\frac{blancas}{todas\ las\ cartulinas}$)

P: Miguel en este momento no estamos interesados en saber si la solución encontrada en el grupo está bien o mal, lo que nos interesa es analizar las estrategias y argumentos que ustedes utilizaron, luego llegaremos a la respuesta válida. Bueno Miguel y que representa la otra fracción

M: las cartulinas azules sobre todas las cartulinas. (El niño escribe en el tablero $\frac{azules}{todas\ las\ cartulinas}$)

P: bueno el grupo de Miguel lo soluciono así. Gracias Miguel, siéntate por favor. Ahora cual grupo quiere salir.

C: profesora, uno lo puede presentar en gráficas

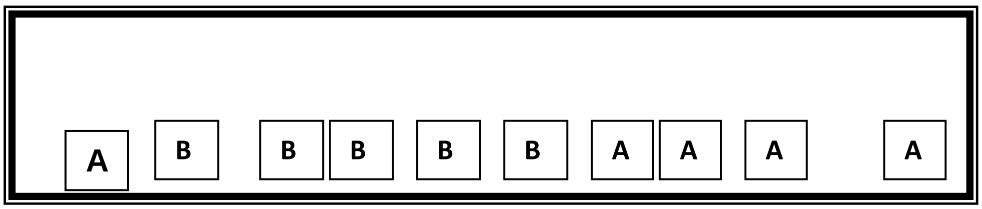
P: yo les dije a ustedes lo resuelven como crean conveniente. ¿Qué grupo va a salir?

(Sale Juan Carlos, un integrante de grupo # 4 y escribe en el tablero la fracción $\frac{5}{4}$)

J.C: nuestro grupo dio la respuesta así porque el cinco representa las cartulinas blancas y el 4 las cartulinas azules.

P: ahora salga el grupo # 2

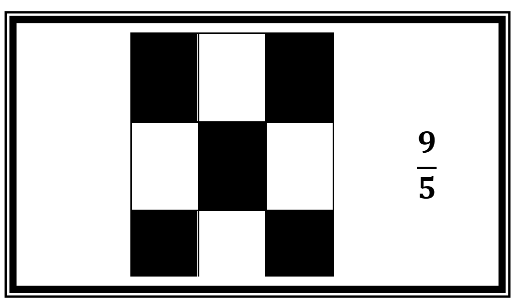
MC: Nosotros lo hicimos así (la niña dibuja en el tablero)



MC: cuatro quintos es la fracción de la comparación de las cartulinas, cada letra de la fracción representa un color de las cartulinas.

P: y el grupo de Jorge Eliecer a qué solución llegaron (grupo # 5)

(Jorge Eliecer sale y dibuja en el tablero)



P: bueno Jorge explica lo que realizaste

J.E: dibuje nueve partes que son todas las cartulinas y pintamos las de color blanco que son 5 entonces la fracción es $\frac{9}{5}$

P: un momentico, entonces para ustedes en la fracción $\frac{9}{5}$ el numerador representa el total de cartulinas y denominador representa las cartulinas color blanco, las que están coloreadas, ¿Qué opina el resto del grupo, será que lo que explicó Jorge está representado correctamente?

M: no porque la fracción debe ser $\frac{5}{9}$, el numerador representa lo que se pinta y el denominador el total de partes.

P: ¿Quién está de acuerdo con lo que dice Miguel?

(Varios niños levantan la mano)

P: muy bien tienes toda la razón, si se representa la fracción utilizando una gráfica, el numerador indica las partes sombreadas y el denominador indica las partes en las que se divide la unidad. Más adelante veremos que no toda las situaciones que involucran fracciones se puede representar gráficamente. Hasta ahora tenemos cuatro soluciones de la situación, de los dos grupos que faltan tiene algo diferente.

(Una integrante del grupo # 1 levanta la mano)

Ma: nosotros tenemos lo mismo que el grupo de Juan Carlos

P: pero como encontraron la fracción, ¿quieres explicarnos?

(la niña sale y escribe en el tablero)

$$\boxed{\frac{5}{4} = 5 + 4 = 9}$$

Ma: si nosotros sumamos las cartulinas color blanco y las cartulinas color azul nos da el total de cartulinas, por eso escribimos esa fracción.

P: chicos, que piensan respecto a lo planteados por los grupos, ¿Qué representación corresponde a la relación solicitada?

(Los estudiantes gritan)

P: quiero que en la guía resalten la siguiente frase: la relación existente entre el número de cartulinas color blanco y el número de cartulinas color azul. (La profe escribe en el tablero $\frac{C.\ blanco}{C.\ azul}$) la relación está indicada de la siguiente manera: el numerador indica las cartulinas color blanco y el denominador indica las cartulinas color azul. Entonces cual de todas las representaciones es la correcta?

MC: la del grupo de Juan Carlos

C: y también el grupo de Mary

P: pero es que el grupo de Mary planteó un argumento que no da cuenta de la relación solicitada. La relación que se está pidiendo en la situación es un número de la forma $\frac{a}{b}$ donde a indica las cartulinas blancas y b indica las cartulinas azules. Quiere decir que el grupo que plantea la solución correcta es el de Juan Carlos.

M: Profe y nosotros lo hicimos con todas las cartulinas también puede hacerse así $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$

P: tú grupo planteó una relación válida pero que no se estaba pidiendo, es que uno puede establecer varias comparaciones a partir de la situación presentada.

¿Cuál es la comparación que representa las dos fracciones que planteó el grupo de Miguel?

J: ellos compararon las cartulinas blancas con el total de cartulinas y las cartulinas azules con el total de cartulinas.

C: profe y el grupo de María Camila también está bien porque ellos escribieron la fracción $\mathbf{\frac{4}{5}}$

P: en esa solución es igual que lo propuesto por el grupo de Miguel, es válida pero no pertinente a la solución de la situación, quien me dice ¿Por qué?

M: pues se comparó las cartulinas azules y blancas, pero nos pedían al contario

P: quiero que quede algo muy claro en la clase de hoy (la profesora borra una parte del tablero para tener espacio donde escribir) Cuando la fracción representa una relación de comparación entre dos cantidades, puede determinarse dos tipos de comparaciones: **parte- todo** y **parte- parte**. (Escribe en el tablero $\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}$) aquí la fracción tiene el significado de razón, es decir, que la fracción está representado un índice de comparación.

(Algunos niños estaban muy dispersos)

P: a ver Maicol como usted está tan atento, diga cuál de las fracciones escritas a partir de la situación representa la relación **parte-parte.**

(El niño no responde)

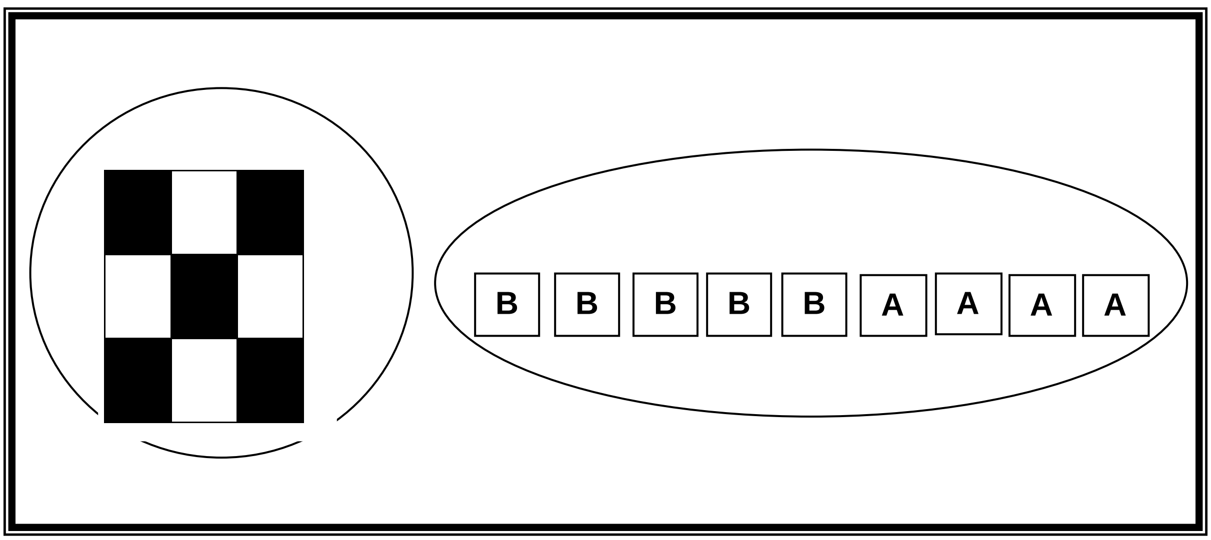
P: ¿quién le ayuda a Maicol a responder lo que pregunté?

JC: profe la fracción $\frac{5}{4}$ y $\frac{4}{5}$ son **parte-parte**

P: claro que sí, porque se están comparando la cantidad de cartulinas de cada color. Bueno y entonces ¿qué fracción representará la relación **parte- todo?**

Y: la fracción $\frac{5}{9}$ y $\frac{4}{9}$ son **parte- todo**

P: ahora pensemos en lo siguiente, si el significado que estudiamos hoy corresponde a la fracción como razón, como lo podemos representar de manera gráfica. Miremos lo que está escrito en el tablero (la profesora encierra el dibujo representado por el grupo de María Camila y el grupo de Jorge Eliecer)



P: en la representación propuesta por el grupo de Jorge Eliecer, ¿Qué se está representando?

JC: una unidad dividida en nueve partes y coloreadas cinco

P: ¿y en esa representación se puede ver la comparación que se solicita en la situación?

(los estudiantes no responde)

P: cuando la fracción se trabaja desde el significado de razón, no existe una unidad que se deba repartir, la relación de comparación se puede realizar representando los objetos que se están comparando. Entonces, ¿cuál de las dos representaciones nos sirven?

M: la que dibujaron las cartulinas azules y blanca.

P: correcto (la profesora señala en el tablero el dibujo de las cartulinas). Para finalizar la situación necesito que cada uno escriba en el cuaderno la solución correcta a la que llegamos y que además escriba todas las relaciones de comparación que se pueden establecer.

(Suena el timbre)

P: de tarea queda escribir una conclusión de la situación.