DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS A ESTUDIANTES DE GRADO 6° DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA CIUDAD DE CALI

BRANLY DELGADO PÉREZ
DIEGO FERNANDO GÓMEZ BRAVO

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2017

DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y EVALUACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LOS CUADRILÁTEROS A ESTUDIANTES DE GRADO 6° DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA TÉCNICA CIUDAD DE CALI

BRANLY DELGADO PÉREZ
DIEGO FERNANDO GÓMEZ BRAVO
TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGÍSTER EN EDUCACIÒN

DIRECTORA DE TRABAJO DE GRADO
SANDRA PATRICIA PEÑA BERNATE
Mg. EN PSICOLOGÍA

UNIVERSIDAD ICESI
ESCUELA DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
SANTIAGO DE CALI
2017

AGRADECIMIENTOS

A los gestores y promotores del programa **Becas para la Excelencia Docente**, por brindar la oportunidad de avanzar en la construcción de la profesionalidad docente y contribuir al desarrollo de una nación más educada.

A los docentes del programa de Maestría en Educación de la Universidad ICESI, por todo el andamiaje intelectual, moral, investigativo y motivacional para lograr esta nueva etapa de nuestro desarrollo humano y profesional.

A nuestros compañeros y directivos de la Institución Educativa Técnica Ciudad de Cali por la paciencia, el apoyo y la convicción que los aportes hechos a los procesos de enseñanza y aprendizaje son base para la transformación cultural que beneficia a la comunidad en general.

A los estudiantes, por permitirnos entrar en su vida escolar y dejarnos proponerles prácticas matemáticas, las cuales hicieron con mucha voluntad y entusiasmo.

A nuestros compañeros del programa de Maestría, por sus saberes y su compañerismo, tan necesario en momentos de desfallecimiento.

A nuestras familias por entender, creer y darnos el apoyo incondicional durante la realización de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

El presente trabajo tiene el propósito de evaluar la efectividad de una unidad didáctica orientada al mejoramiento del proceso de razonamiento en la clasificación de cuadriláteros en estudiantes de sexto grado de la escolaridad colombiana. La unidad se diseña con base a los principios del Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS), las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, , los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Jaime (1993) y la tipología de tareas propuesta por García et al. (2015). La evaluación se hace usando el concepto de idoneidad cognitiva propuesto por el EOS y, se operacionaliza con base al modelo de Van Hiele. La metodología que sigue está determinada por la naturaleza de los estudios en Ingeniería Didáctica, secuenciada por un estudio preliminar, el diseño, la implementación y la evaluación de la unidad didáctica y, caracterizada por análisis cualitativos y cuantitativos de registros escritos y multimedia de los estudiantes.

Palabras claves: razonamiento geométrico, idoneidad cognitiva, clasificación de cuadriláteros, ingeniería didáctica, niveles de Van Hiele, grados de adquisición, tipología de tareas, Scratch.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de investigación se inscribe dentro de los estudios de ingeniería didáctica con soporte teórico fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición, que tiene en Juan Díaz Godino, su mayor exponente. Sin embargo, acoge conceptos y métodos provenientes de otras fuentes, como el modelo de Van Hiele, los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Jaime (1993) y la tipología de tareas de García et al. (2015).

Tiene la pretensión de diseñar, implementar y evaluar una unidad didáctica orientada al mejoramiento del proceso de razonamiento geométrico presente en las prácticas de clasificación de cuadriláteros que suceden en el grado sexto de la escolaridad colombiana. En particular, se centra en el abordaje de la clasificación con carácter jerárquico, es decir, el que permite la realización de procesos recursivos de clasificación, donde cada una de ellas se encuentra inmersa en las otras.

El diseño de la unidad tuvo en consideración los principios del EOS: su visión pragmática de la enseñanza, su postura ontológica de los objetos matemáticos y su concepción del aprendizaje. También se apropió de las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, que estaban inmersas en los test propuestos por investigadores como Jaime (1993), Corberán (1994), Fouz (2006) y Maguiña (2013). Además, usó la tipología de tareas propuesta por García et al. (2015), para darle estructura y orden a la secuencia, en coherencia con las contribuciones mencionadas. Como material manipulativo se usaron la regla graduada, el transportador y el software Scratch.

La implementación se realizó entre los meses de febrero y mayo del 2017, con intensidad de dos horas semanales. Inició con la aplicación de una prueba diagnóstico que arrojó información acerca de los saberes previos y el nivel de razonamiento en el que se encontraban los estudiantes. Luego se continuó con una secuencia de 13 tareas, que finalizó con una prueba escrita.

En la evaluación, se agruparon las tareas en siete unidades de análisis, a saber: definición del concepto de cuadrilátero, uso de Scratch, clasificación 1 (cuadriláteros convexos y cóncavos), clasificación 2 (trapecios y trapezoides), clasificación 3 (paralelogramos y trapecios no-paralelogramos), clasificación 4 y 5 (paralelogramos no-rectángulos / cuadrados y rectángulos no-cuadrados) y organiación jerárquica de las clasificaciones. Se usó el concepto de idoneidad cognitiva a posteriori, para valorar la efectividad del diseño e implementación de la unidad didáctica.

Finalmente, se declara que la pertinencia de esta investigación para la Maestría en Educación, radica en que persigue el mejoramiento de la intervención en el aula incorporando innovación en la educación matemática. Ya que implementa un esquema de diseño, análisis y evaluación de prácticas de enseñanza centradas en el aprendizaje y, el uso de herramientas TIC que proveen de un medio para la representación de objetos geométricos, tal como se expone en los objetivos del programa.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Según el informe que hace el ICFES con respecto a los resultados de la prueba de 2015, la competencia *razonamiento* se fortaleció en el grado 5° y 9° de la Institución Educativa Técnica Ciudad de Cali, es decir que más del 50% de los estudiantes de este grado respondieron bien a las preguntas correspondientes a esta competencia. Sin embargo, este comportamiento no ha sido la tendencia en los tres años inmediatamente anteriores. En el de grado 5°, en los años 2013 y 2014, por lo menos el 50% de los estudiantes no respondieron bien a las preguntas asociadas a esta competencia; para el grado 9°, la situación fue similar desde el año 2012 hasta 2014. La tendencia ha sido precisamente la falta de competencia en razonamiento matemático y, solo con el cambio reportado en 2015, no se puede asegurar que esta situación haya mejorado significativamente.

En el documento de análisis de pruebas Saber 2014, que se encuentra en la caja de materiales del Día E 2015, se expone con más detalle la descripción de los aprendizajes alcanzados por los estudiantes de los grados 3°, 5° y 9°. En la competencia *razonamiento* para grado 5° se establece que "el 54% de los estudiantes no compara ni clasifica objetos tridimensionales o figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes y propiedades". Este aprendizaje también se relaciona con el estándar del conjunto de grados 6° y 7°: "clasifico polígonos en relación con sus propiedades", lo que convierte a este análisis en una forma de identificar y delimitar un problema de aprendizaje, en este caso: el bajo nivel de razonamiento geométrico que tienen los estudiantes de estos grados en la Institución Educativa Técnica Ciudad de Cali.

Otra forma de identificarla es mediante las observaciones no sistemáticas que se han realizado en el grado 6° desde el año 2011, donde los estudiantes al momento de realizar una clasificación de polígonos recurren casi siempre al modelo instalado desde los primeros grados de la escolaridad, en el que se considera que las figuras geométricas tienen una clasificación no jerarquizada, donde un cuadrado no es un rectángulo ni éste a su vez es un paralelogramo.

Otro dato que suma evidencia al problema identificado, lo proporciona Vecino (2003) desde un plano más global. El afirma que en cualquier nivel se enseñanza se detectan carencias en el desarrollo de pensamiento espacial, entre ellas, la ausencia de, procesos de clasificación de figuras elementales, generalización y razonamiento deductivo.

En este contexto es que surge el interés por diseñar e implementar una unidad didáctica cuyo propósito sea la contribución al mejoramiento de los aprendizajes, en lo referido al proceso general de razonamiento que engloba la especificidad de la clasificación de cuadriláteros y sus procesos asociados: comparación, generalización y definición. Por su supuesto que esta unidad debe tener en cuenta aspectos tanto instruccionales como cognitivos y debe contar también con herramientas de análisis confiables que permitan valorar su efectividad.

Siguiendo esta ruta de caracterización del problema se llega a la formulación de la siguiente pregunta:

¿Cómo evaluar la efectividad de una unidad didáctica orientada al mejoramiento de los procesos de razonamiento en la clasificación de cuadriláteros en estudiantes de grado 6°?

3. OBJETIVOS

3.1 Objetivo general

Evaluar la efectividad de una unidad didáctica orientada al mejoramiento de los procesos de razonamiento en la clasificación de cuadriláteros en estudiantes de grado 6°.

3.2 Objetivos específicos

1. Diseñar una unidad didáctica orientada al mejoramiento de los procesos de razonamiento en la clasificación de cuadriláteros, de acuerdo a los principios o conceptos de los enfoques didácticos asumidos.

2. Establecer un mecanismo de análisis de la unidad didáctica, de acuerdo a los principios o conceptos de los enfoques didácticos asumidos en el marco teórico.

3. Analizar el desarrollo de la actividad matemática durante cada sesión de clase, de acuerdo al mecanismo establecido.

4. Aplicar el mecanismo establecido en la evaluación del diseño y la implementación de la unidad didáctica.

4. JUSTIFICACIÓN

A nivel internacional el último referente en evaluación de competencias matemáticas que tiene Colombia es la prueba PISA[1], implementada por la OCDE. Los resultados de la prueba realizada en el año 2012 revelaron que en Colombia, al igual que en todos los países latinoamericanos que participaron en la medición, los estudiantes de 15 años presentan niveles muy bajos de desempeño en el área de matemáticas. Este país ocupó el lugar 62 entre los 65 participantes, superando solo a Catar, Indonesia y Perú, y a su vez superado por Estonia y Eslovenia, países mucho más jóvenes en su fundación.

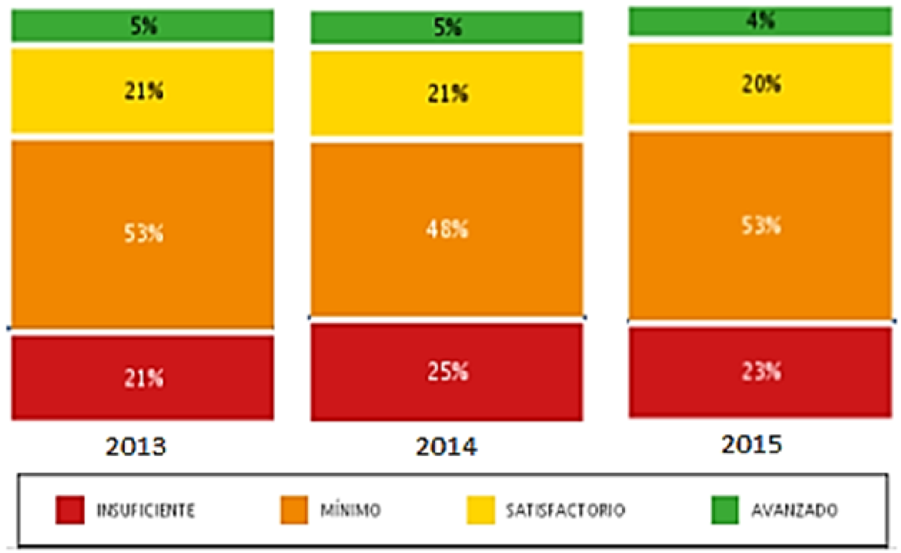
Los referentes de esta prueba, en lo que respecta a las matemáticas, son compatibles con los preceptos del currículo colombiano. El concepto de competencia matemática es el eje que articula el conocimiento y los procesos matemáticos que se evalúan (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2013). Esto mismo sucede en los referentes de calidad educativa de Colombia, donde se puede apreciar una estructuración del currículo a partir de la relación: conocimientos básicos, procesos generales y contextos de aprendizaje (MEN, 1998); y una adhesión al modelo de educación por competencias (MEN, 2006). Esta compatibilidad es lo que hace posible la asunción de los resultados de la prueba PISA 2012 como un referente de evaluación e investigación educativa en este país.

“De acuerdo con información del ICFES, entre el año 2006 y el 2013 disminuyó el porcentaje de estudiantes que se ubicaron en los niveles de logro medio y alto en el componente de matemáticas” (Ayala-García, 2015). Esto siguió ocurriendo en los años siguientes, al menos en el grado noveno, como lo muestra el siguiente gráfico:

---

[1] Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por sus siglas en inglés) que se aplica cada tres años a los países miembros y asociados de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE)

Figura 1. Distribución porcentual de estudiantes de grado 9° en Colombia, según sus niveles de desempeño en matemáticas. Tomado del informe de resultados Icfes 2016.



Pero, ¿qué sucedió en la Institución Educativa Ciudad de Cali?, ¿reflejó el mismo comportamiento del rango nacional en el grado quinto? Con respecto a este asunto hay que decir que la Institución no presenta una clara tendencia de disminución del porcentaje de estudiantes ubicados en los niveles satisfactorio y avanzado, lo que se observa son altibajos en todos los niveles, que no permiten establecer tendencias de retroceso o mejoramiento; lo único que puede decirse en términos generales es que ha habido un estancamiento en el desarrollo de la competencia matemática.

Estos resultados, junto a los que ya se mencionaron en el planteamiento del problema y la ausencia de prácticas de aula institucionales o sistemáticas que expliquen el fortalecimiento registrado en algunos componentes y procesos matemáticos en el último año, permiten reconocer la pertinencia de realizar estudios de diseño didáctico orientados a mejorar el nivel de competencia matemática, específicamente en los procesos de razonamiento geométrico relacionados con la construcción y clasificación de cuadriláteros en el grado sexto.

Según Vecino (2003), una parte de las carencias mencionadas antes se genera por la ausencia, en las prácticas de enseñanza, de modelos teóricos que den cuenta de los niveles de desarrollo del pensamiento espacial y contribuyan a su orientación. Un modelo que puede tenerse en cuenta para llenar este vacío es el clásico, pero aún vigente, “Niveles de Van Hiele”; así lo propone el mismo autor. Este es un modelo que establece cinco niveles jerárquicos de razonamiento que van desde los procesos de visualización y análisis hasta los de deducción y formalización; además, propone una serie de fases que orientan el diseño de las actividades de enseñanza de la geometría. Autores como Jaime (1993), Corberán et al. (1994), y Fouz (2006), entre otros, han desarrollado pruebas escritas y mecanismos para su análisis, que ayudan a determinar el nivel de desarrollo en el que se encuentra una persona en relación con el razonamiento geométrico.

Otra parte de las carencias mencionadas tiene su génesis en una promoción estática de la geometría que produce aprendizajes de conceptos que dependen de la posición de una figura geométrica en particular; así como de un predominio de la geometría métrica que genera la creencia de que hacer geometría es hallar perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos (Vecino, 2003).

Otro aspecto que aborda Vecino (2003) es la ausencia de materiales didácticos en las clases de geometría como una razón más que explica las carencias mencionadas, afirmando que este hecho es una “fuente inagotable de obstáculos didácticos que convierten al aprendizaje de esta materia en algo falto de consistencia y rigor”. Material concreto, como: poliminos, geoplano y tangram, entre otros; material virtual, como: logo, cabri, geogebra, y regla & compás, entre otros; desde hace varios años vienen ocupando los lugares que antes eran dominados por el uso de instrumentos como la regla, el transportador y el compás. Pero esto no es precisamente lo que ha venido ocurriendo en la institución en cuestión, donde la mayoría de las clases de geometría aún se siguen orientado con la sola ayuda de imágenes de fotocopia y, en el mejor de los casos, con el uso del proyector o los instrumentos tradicionales.

En particular, el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, está apoyado por prestigiosas organizaciones como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en inglés)[2], que en declaraciones hechas en 2004 afirma que el uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, dentro de un programa curricular bien articulado y bajo contextos de situaciones problema, puede mejorar el aprendizaje y el desarrollo de los procesos específicos y generales conexos al pensamiento matemático (Eduteka, 2004).

En Colombia también se ha expuesto este tipo de posturas. En las orientaciones curriculares que se trazaron en los documentos que hacen parte de la serie Lineamientos curriculares, se declara que las TIC son un nuevo contexto para el aprendizaje de las matemáticas, que favorece el desarrollo de procesos y habilidades cognitivas que van más allá del pensamiento matemático (MEN, 1999).

Las realidades y consideraciones expuestas aquí llevaron a asumir en este trabajo un estudio de diseño didáctico en relación al pensamiento espacial y los procesos de razonamiento geométrico, desde un enfoque ontológico y semiótico, que se describirá en el marco teórico. El estado del arte, situado en la intersección de estos dos componentes, ha sugerido el abordaje de las figuras geométricas desde un punto de vista relacional, semiótico y dinámico; lo que implica, por un lado, tener en consideración un modelo teórico como el de “los niveles de Van Hiele”, que permite direccionar el aprendizaje en términos de desarrollo de habilidades, y por otro, un

[2] La NCTM es una organización norteamericana que desde sus inicios en los años 80’s ha impulsado el desarrollo de estándares curriculares y de evaluación para el mejoramiento del aprendizaje de las matemáticas. Ver http://www.nctm.org/

recurso tecnológico acorde con la perspectiva epistemológica construida y que facilite la representación semiótica y el razonamiento geométrico.

5. MARCO TEÓRICO

5.1 Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática

Para la realización de un estudio empírico sobre los efectos de un diseño didáctico pensado para favorecer la comprensión de objetos matemáticos, es imprescindible, en la actualidad, la referenciación de un marco teórico cuya fundamentación se derive de la Educación Matemática, como campo de investigación. Pero, éste es un campo con aproximaciones teóricas e ideológicas muy diversas, algunas de ellas contrapuestas o incompatibles entre sí. Sin embargo, cada perspectiva aborda aspectos relevantes para las investigaciones en este campo, y su progreso exige el surgimiento de enfoques teóricos que unifiquen criterios y conceptos en aras de permitir análisis más complejos que den cuenta de los fenómenos estudiados.

En la tradición francesa, donde este campo de investigación es llamado Didáctica de las Matemáticas (DdM), las teorías que gozan de mayor prestigio son: la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría de los Registros de Representación (TRR) y la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC). En España también se ha venido trabajando, desde los años noventa, en una perspectiva de la DdM que integra conceptos y criterios de varias teorías, desde una nueva conceptualización; sus autores le han llamado Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (EOS). A continuación se expondrán los conceptos y las herramientas teóricas que emanan de este enfoque y que son relevantes para el estudio en cuestón.

5.2 Una ontología de los objetos matemáticos

El punto de partida para la constitución de una ontología de los objetos matemáticos en el EOS, lo da el enfoque antropológico de lo didáctico que considera la matemática como una actividad humana, que se desarrolla en el vientre de determinadas instituciones[3], con la puesta en funcionamiento de instrumentos específicos y la contribución de técnicas para realizar cierto tipo de tareas (Godino, 2005). Este tipo de actividad se conceptualiza como *práctica matemática,* que es "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

Según Godino y Batanero (1994), las prácticas no solo se dan a nivel personal, también suceden a nivel institucional, es decir, al interior de colectividades humanas que se identifican con la realización de un mismo tipo de tareas. El interés y la decisión de estas colectividades por involucrarse en una misma situación problemática genera unas prácticas sociales bien particulares, que usualmente están condicionadas por los recursos disponibles y las características de funcionamiento.

En este orden de ideas el EOS comparte la siguiente definición: un objeto matemático es "un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito". (Chevallard, 1991, p. 8). Esta definición se separa de las teorías realistas, que asumen los objetos matemáticos como entidades que

[3] El término "instituciones" se refiere a aquellas agrupaciones sociales que se involucran o se comprometen con la solución de una misma clase de situaciones problemáticas (Godino, Batanero & Moll, 2012).

tienen una realidad propia, independiente de las personas que los manipulan y el lenguaje que los nombra; en cambio, se ubica en el lado pragmático, donde los objetos se asumen como resultado de las prácticas sociales en relación a las matemáticas.

Se ha hecho referencia al origen pragmático y a la caracterización semiótica de los objetos matemáticos. A continuación se hará énfasis en la naturaleza y la tipología de los mismos.

Desde el EOS, todo aquello que intervenga o emerja de las prácticas matemáticas y sea susceptible de ser separado e individualizado, se puede considerar como un objeto matemático (Godino & Batanero, 1994). Por lo tanto existen objetos matemáticos personales e institucionales. Como ejemplos de objetos personales en los sistemas geométricos se pueden citar los siguientes: un dibujo que represente un paralelogramo, un algoritmo en pseudocódigo para la construcción de un paralelogramo, etc. Los objetos institucionales son los que aparecen en los libros de texto guía, en el curriculo de la institución o simplemente, los que el docente cuerde con sus estudiantes.

En acuerdo con el pensamiento de Wittgenstein, para el EOS los objetos matemáticos tienen una naturaleza convencional, pues ellos existen de la misma manera que las reglas convencionales (Font, Godino & Gallardo, 2013). Desde esta perspectiva, las matematicas "…is not an agreement of arbitrary opinions, but rather an agreement of practices that are subject to rules"[4] (Font, Godino & Gallardo, 2013, p.110).

A continuación se expone una tipología de objetos primarios, que se sustenta desde la manera como en el EOS se interpretan los procesos matemáticos: como

[4] "…no es un acuerdo de opiniones arbitrarias, sino más bien un acuerdo de prácticas que están sujetas a normas"

secuencias de prácticas matemáticas que se ponen en correspondencia con cierto tipo de objetos matemáticos (Godino, Batanero & Moll, 2012).

“La constitución de los objetos lingüísticos, problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos primarios de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, etc.) y argumentación” (Godino, Batanero & Moll, 2012, p.57)

Esta tipología amplía la tradicional, que solo distinguía entre lo conceptual y lo procedimental, e integra otras entidades que suelen intervenir o emerger de las prácticas matemáticas, como son los argumentos junto al lenguaje usado para comunicar y validarlos. Esta propuesta de categorización tiene un carácter de recursión, en el sentido de que unos objetos pueden estar constituidos por otros; por ejemplo, en algunas demostraciones de ciertas proposiciones se usan algoritmos para justificar la cadena de argumentos. La recursión también se puede entender como la organización de los objetos para componer sistemas conceptuales o teorías, que a su vez pueden ser considerados como objetos más complejos.

A la red de objetos primarios que intervienen o emergen de un sistema de prácticas matemáticas específico, y de sus relaciones entre sí, se le conoce como c*onfiguración* (Blanco, Godino & Pegito, 2012). A aquellas que se refieren a objetos institucionales se les llama *configuraciones epistémicas* y a las otras, *configuraciones cognitivas*.

En el EOS, además de la tipología anterior, se establecen otras, que se expresan en forma de dualidades, como la ya descrita: personal/institucional. A continuación se hará referencia a la dualidad ostensivo/no ostensivo, por efectos de utilidad para el trabajo.

Los objetos ostensivos son aquellos que se pueden mostrar a alguien por vía directa, como los símbolos y los gráficos; los objetos no ostensivos, en cambio, son los que no pueden ser mostrados de forma directa, como los conceptos, las propiedades y los teoremas (Font, Godino & Gallardo, 2013). Los objetos no ostensivos necesitan de los ostensivos para ser mostrados y manipulados.

5.3 Una concepción sobre el significado y la comprensión matemática

El EOS adopta y desarrolla una herramienta teórica útil para construir una concepción de significado coherente con los principios epistemológicos y ontológicos esgrimidos en el anterior aparte. Se trata de lo que Hjelmslev (1943) llamó *función de signo* y Eco (1995), *función semiótica,* y que Godino, Batanero & Moll (2012) entienden como "*correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, representante) y un consecuente (contenido, representado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia*" (Godino, Batanero & Moll, 2012; p. 56).

Estas relaciones pueden darse en términos representacionales, cuando un objeto se sustituye por otro para cumplir un determinado propósito. Tal es el caso de un cuadrilátero representado gráficamente, que se sustituye por una representación algoritmica con el fin de establecer relaciones intrafigurales de paralelismo, perpendicularidad o congruencia. Pueden darse en términos instrumentales, cuando "un objeto usa a otro u otros como instrumento" (Godino, Batanero & Moll, 2012, p. 56) para hacer algo. Tal es el caso de un procedimiento que requiera de toda una serie de signos y reglas para ejecutarse de la mejor manera. También pueden darse en términos estructurales, cuando se trata de relaciones entre objetos emergentes y sus prácticas de origen, como es el caso de las construcciones de polígonos convexos mediante algoritmos ya definidos, que junto a procesos de razonamieno pueden dar origen al objeto “teorema de los ángulos externos de poligonos convexos”.

En este orden de ideas el significado de un objeto es concebido como un sistema de prácticas asociado a un campo de problemas del que éste emerge o interviene (Godino, 2005). Por lo tanto, en una función semiótica determinada el significado viene a ser el contenido que un sujeto o una institución atribuye a la expresión (objeto).

Así como los objetos y las prácticas matemáticas pueden ser personales o institucionales, sus significados también. Desde el punto de vista institucional existen cuatro tipo de significados, los de referencia, los pretendidos, los implementados y los evaluados (Godino, 2005). El significado de referencia es aquel que el profesor o la institución educativa consideran como el sistema de prácticas operativas y discursivas que debe ser asociado al objeto de enseñanza. El significado pretendido es el sistema de prácticas planificado en relación al objeto de enseñanza, es la contextualización del significado de referencia en la clase. El significado implementado es el que realmente se desarrolla en un proceso instruccional. Por último está el significado evaluado, que hace referencia a la selección que hace el profesor de las actividades de evaluación y los criterios de observación de las prácticas.

Desde el punto de vista del estudiante interesa los significados *declarado* y *logrado*. El primero se refiere a las prácticas de los estudiantes registradas en los procesos de evaluación; el segundo, a las prácticas que son conformes con los canones de referencia institucional, que también podría llamarse *aciertos de aprendizaje*. A aquellos significados declarados no conformes con la pauta institucional podría llamarse *errores de aprendizaje* (Godino, 2005).

Aquí se entiende por comprensión la adecuación que el sujeto hace de sus propios significados a los significados institucionales implementados con relación a un objeto en particular (Font, Godino & D'Amore, 2007). La postura pragmática del enfoque adoptado obliga a entender la comprensión más como una competencia que como un proceso mental, pues "*se considera que un alumno ha comprendido un determinado contenido cuando lo usa de manera competente en diversas prácticas*" (Font, Godino & D'Amore, 2007, p. 15).

5.4 Modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele

El modelo propuesto por los profesores holandeses Pierre M. Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, tiene un carácter dual. Por un lado, describe diferentes formas de razonamiento geométrico, que se constituyen en niveles de complejidad creciente; por otro lado, da orientaciones de enseñanza para favorecer el progreso de los estudiantes en relación a las prácticas de razonamiento (Vargas, 2013).

Según Jaime (1993), el proceso de evolución del modelo condujo a la siguiente caracterización de los niveles de razonamiento y descripción de sus propiedades globales.

5.4.1 Niveles de razonamiento

Nivel 1 (Visualización o reconocimiento)

- Los objetos son percibidos como una unidad, sin distinguir claramente sus componentes y cualidades.
- Los objetos se describen por su apariencia física o su posición, con un lenguaje que hace referencia a semejanzas con otros elementos familiares del entorno físico.

- No se generalizan las características a objetos de la misma clase.

Nivel 2 (Análisis)

- Se perciben los componentes y cualidades de los objetos.
- Se deducen las propiedades de los objetos por experimentación.
- Los objetos se describen por sus componentes y propiedades.
- Se generalizan las propiedades de los objetos de la misma familia.
- Las definiciones de un concepto son listas de sus características, que suelen omitir algunas necesarias.
- No se realizan clasificaciones inclusivas.
- Las justificaciones son muy someras o se basan en la comprobación de pocos casos.

Nivel 3 (Ordenación, clasificación o deducción informal)

- Se establecen relaciones entre figuras aparentemente distintas y se descubren nuevas a partir de la experimentación.
- Se concibe una definición matemática y se formula de forma más precisa.
- Hay clasificaciones inclusivas.
- Las justificaciones se realizan de manera general mediante deducciones informales.

Nivel 4 (Deducción formal)

- Se pueden demostrar teoremas mediante deducción formal.
- Hay entendimiento de la estructura axiomática de las matemáticas.
- Se pueden reformular los enunciados proposicionales, haciéndolos más simples produciendo corolarios. Tambien pueden formularse conjeturas.

Nivel 5 (Rigor)

- Se comprende la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y pueden concebirse distintos tipos de geometría.
- Se puede trabajar en geometría solo desde la abstracción, sin recurrir percepción.

5.4.2 Propiedades globales

Adicional a las caraterísticas propias de cada nivel, el modelo tiene también unas propiedades globales. A continuación se expondrán aquellas que son pertinentes para este estudio, según Jaime (1993), Fouz (2006) y Vargas (2013).

Jerarquización: la adquisición de un grado alto en un cierto nivel de razonamiento requiere del alcance de grados altos en los niveles anteriores. Como lo afirma Jaime (1993), estudios como los de Mayberry (1981), Usiskin (1982), Denis (1987), Tischler (1988) y Soon (1989), confirman esta propiedad y sugieren que los casos que lo contradicen son “un síntoma de algún problema o deficiencia en la metodología de asignación de niveles empleada” (p. 14).

Recursividad: los objetos que son explícitos en cierto nivel son implícitos en el nivel anterior. Por ejemplo: en el nivel 1 las figuras geométricas son objetos explícitos, pero sus componentes y propiedades se encuentran implícitos y, a su vez, estos se hacen explícitos en el nivel 2.

Especificidad del lenguaje: cada nivel está asociado a un tipo de lenguaje y a unos significados específicos. El progreso en los niveles supone una mejora en las prácticas discursivas y la construcción de significado.

Continuidad: el paso de un nivel a otro no se da por saltos bruscos, sino que hay una etapa de transición, donde el sujeto que aprende razona simultaneamente en dos niveles sucesivos, dando prevalencia paulatina al nivel superior.

5.5 Un modelo para el proceso de instrucción

Los niveles de Van Hiele constituyen un modelo teórico del aprendizaje y la enseñanza de la geometría; comparte con la teoría de Piaget propiedades como la jerarquización y la recursividad, pero se separa de ella en aspectos como la enseñanza, entre otros. En ella se sostiene que el paso entre niveles depende, además del trabajo personal del estudiante, del diseño instruccional que se ponga en funcionamiento (Vargas, 2013).

El modelo de Van Hiele propone una orientaciones didácticas para ayudar a los estudiantes a progresar en su razonamiento geométrico. Esta propuesta se basa en la caracterízación de cinco fases sucesivas del proceso de enseñanza y aprendizaje, a saber: 1) Información, 2) Orientación dirigida, 3) Explicitación, 4) Orientación libre y 5) Integración.

En la primera fase el profesor recibe información sobre los saberes previos de los estudiantes y los contextualiliza frente a las consignas de las tareas que les propone. En la segunda, los estudiantes desarrollan actividades matemáticas con el acompañamiento del profesor. La tercera, está caracterizada por los intentos de expresar las soluciones y discutirlas. En la cuarta, los estudiantes tratan de resolver nuevos problemas aplicando los conocimientos adquiridos en las anteriores fases y sin la ayuda directa del profesor. La última, se caracteriza por los esfuerzos de los estudiantes en organizar y estructurar los conocimientos, elaborando resumenes, cuadros sinópticos, mapas conceptuales, diagramas arbóreos, etc.

Los principios del EOS y de los enfoques pragmáticos en general sugieren también una ruta de acción instruccional, que centra su atención en la actividad matemática del estudiante. Las tareas, que son las propuestas de trabajo del profesor, deben detonar la emergencia de objetos y significados personales, su circulación, negociación e institucionalización, en la actividad del estudiante (Garcia et al, 2015).

Según Goñi (2009), como lo comenta García et al. (2015), reconoce como tareas los ejercicios, las consignas de juego, síntesis o investigación, y los problemas mismos, entre otros. Hay tareas de memorización, ejercitación, modelación, problematización, tan complejas como se quiera. Unas requieren una demanda cognitiva mayor que otras, por eso se requiere de una tipología de tareas que resulte práctica para el diseño de secuencias.

La propuesta instruccional de García et al. (2015) consiste en el diseño y la organización secuencial de tareas de reproducción, conexión y reflexión, en el marco de una unidad didáctica. Las primeras, son las que exigen del estudiante la aplicación de procedimientos rutinarios o propiedades con las cuales se encuentra familiarizado. Las segundas, son aquellas que instan a que el estudiante haga representaciones semióticas en al menos dos sistemas diferentes, con sus respectivos tratamientos (cambios de representación en el mismo sistema) y conversiones (cambios de representación en distintos sistemas), establezcan relaciones, propongan soluciones y justifiquen los procesos y resultados. Las últimas, son aquellas que exigen del estudiante avanzar hacia la metacognición, explicitando sus estrategias de resolución y, mediante la creatividad, proponer nuevas formas de resolución.

El modelo de instrucción que aquí se define está orientado por los principios de los enfoques pragmáticos, es decir que su apuesta es hacia la institucionalización de significados personales. La propuesta didáctica del modelo de Van Hiele se tiene en cuenta solo para el diseño de las tareas, pero sin seguir su orden estrictamente secuencial. Los estudiantes pueden comenzar una sesión de clase con una orientación dirigida, luego pasar a la explicitación, recibir, en acto seguido, retroalimentación, para luego finalizar con la fase de integración; sin haber pasado por la fase de orientación libre. De García et al. (2015) se asume la secuencialidad de las tareas, pero solo se trabajarán aquellas que son de reproducción y conexión. Las tareas de reflexión tienen un orientación fuerte hacia la metacognición y su relación con el proceso de resolución de problemas, por este motivo no se tuvieron en cuenta. La unidad didáctica objeto de este estudio es extensa y el tiempo para su análisis es escaso, por eso es necesario restringir las condiciones de diseño e implementación sin dejar por fuera los principios esenciales de las teorías asumidas.

5.6 Una noción teórica para valorar la efectividad de los diseños instruccionales

Existe una serie de estudios (Contreras et al., 2005; Godino et al., 2005; Godino, Contreras & Font, 2006) citados por Godino et al. (2006), que revelan la utilidad de ciertas nociones propuestas desde el EOS para el análisis y la valoración de experiencias de enseñanza. Una de ellas es la noción de Idoneidad didáctica, concebida como “el criterio global de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción” (Godino et al., 2006, p. 4), que articula de forma coherente y equilibrada las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional; su principal indicador empírico es el grado de acercamiento entre los significados logrados y los pretendidos/implementados, según lo plantea Godino et al. (2006).

Godino et al. (2006) llaman al principal indicador empírico Idoneidad cognitiva, que “expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados” (p. 4). Esta descripción revela dos momentos de análisis, uno a priori, referido al antes del desarrollo de la clase o unidad didáctica y otro, a posteriori, referido al después. Este estudio asume el segundo momento, la idoneidad cognitiva a posteriori, para realizar el análisis y la valoración de la efectividad de la unidad didáctica.

6. MARCO METODOLÓGICO

6.1 Naturaleza de la investigación

Este trabajo se enmarca dentro de lo que se ha considerado como investigación de intervención educativa, la cual depende esencialmente de un marco teórico que fundamente el diseño, implementación en contextos de clase e interpretación de los resultados (Godino et al, 2013). Así mismo, requiere de un marco metodológico adecuado a la naturaleza de este tipo de investigaciones y en particular, que permita la especificación de la orientación y evaluación del diseño instruccional objeto de estudio. De los estudios que se han realizado hasta el momento en el campo de la investigación de intervención educativa se destacan dos vertientes metodológicas: la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y la Ingeniería Didáctica (ID). La primera, de origen anglosajón, aspira a producir, sin una teoría de referencia, tareas curriculares para apoyar el aprendizaje y la emergencia de teorías de diseño educativo. La segunda, de origen francés, aspira a provocar la emergencia de fenómenos didácticos y a la vez, elaborar recursos para la enseñanza, todo a partir de una teoría de referencia, que en este caso es la Teoría Didáctica de las Situaciones (TSD).

Desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática se considera a la Educación Matemática como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por lo tanto, no es de extrañar que desde tal enfoque se proponga también una metodología de investigación para los trabajos en intervención educativa. Godino et al. (2013), hacen un trabajo de comparación y análisis de los dos modelos mencionados, para al final sugerir que la ID se puede interpretar como un caso particular de IBD, donde se ha tomado como referencia la TSD; que puede haber entonces una ID referenciada en otra teoría didáctica. En este caso, se propone el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Este trabajo adopta el paradigma metodológico de la ID con referencia al EOS.

En coherencia con el EOS, esta investigación se divide en cuatro fases: 1) Estudio preliminar, 2) Diseño de la unidad didáctica, 3) Implementación de la unidad didáctica y 4) Evaluación de la unidad didáctica (Godino et al, 2014).

1) Estudio preliminar. Se refiere a la delimitación y el análisis del contenido de enseñanza, en términos de objetos y significados institucionales, que se toman como referencia para el diseño instruccional.

2) Diseño de la unidad didáctica. Aquí se trata de seleccionar, adaptar o diseñar las tareas en el marco de una secuencia y realizar un análisis *a priori* de las mismas, indicando las reacciones esperadas y sus respectivas intervenciones de control por parte del docente.

3) Implementación de la unidad didáctica. Es la ejecución de la clase diseñada, en la cual se observan las interacciones entre los componentes del triángulo didáctico (Saber-Docente-Estudiante) y se evalúan los aprendizajes logrados.

4) Evaluación de la unidad didáctica. Corresponde a la etapa de análisis de resultados y conclusiones, donde se establece un contraste entre lo preconcebido en el diseño y lo constatado en la implementación.

6.2 Caracterización de la población y descripción de la muestra.

La población objeto del estudio la constituye el grupo 6-1 de la sede central de la Institución Educativa Técnica Ciudad de Cali, ubicada en comuna 11 de la ciudad de Cali, departamento del Valle del Cauca, Colombia. Este grupo lo integran 36 estudiantes, con los cuales se trabajó entre los meses de febrero y mayo del año lectivo 2017, contando con una intensidad de dos horas semanales.

La secuencia de tareas se aplicó en el marco del desarrollo curricular institucional, es por este motivo que todo el grupo participó de una u otra manera de las actividades programadas. No obstante, debido a la falta de regularidad en la asistencia de los estudiantes, tanto a las sesiones dentro de la jornada oficial como a las no oficiales, lo que no permitía un análisis pertinente, se tomó la decisión de extraer una muestra de estudiantes que cumplieran con el estándar mínimo de 10 tareas realizadas de las 13 programadas. Finalmente resultaron 22 estudiantes cumpliendo el requerimiento; algunos de ellos sin realizar la prueba diagnóstico. Este grupo tiene una media de 11 años de edad, con una dispersión en desviación estándar de 0.7, que lo hace una muestra bastante homogénea en edad.

6.3 Recolección y análisis de datos

La recolección de datos se hizo mediante la aplicación de pruebas escritas, al inicio y al final de la secuencia, y los registros escritos y multimedia de las de tareas aprendizaje.

Según Maguiña (2013), una revisión exhaustiva de los trabajos de investigación, que tienen como referencia el modelo de Van Hiele, permite concluir que la herramienta privilegiada para la recolección de datos es la entrevista. Sin embargo, cuando se trata de investigaciones cuyo objeto de estudio es un grupo numeroso de estudiantes y donde no se dispone del tiempo que demanda la aplicación de esta herramienta, se debe recurrir a formas más eficientes de capturar información. Según Jaime (1993), en Mayberry (1983), Gutierrez, Jaime & Fortunity (1991) y Gutierrez et al. (1991), se ha implementado test escritos, con items de respuesta libre o combinados con items de selección múltiple.

Todos los datos se analizarán de forma cualitativa, porque interesa hacerle seguimiento, tanto al proceso de adquisición de los niveles de razonamiento, como a los aprendizajes asociados. Sin embargo, los datos que surjan de las pruebas diagnóstico y final, al igual que de las dos últimas tareas, se analizarán también de forma cuantitativa, debido a la importancia que tienen estas actividades en el desarrollo de la secuencia y a la exigencia del método asumido para operativizar el concepto de idoneidad cognitiva.

El análisis de los items de selección múltiple no revisten mayor dificultad, pues estos, según como se diseñen, evidencian el uso de un razonamiento fijado en un cierto nivel; pero, cuando se trata de un item de respuesta libre, se tiene la ventaja de poder analizar el proceso de transición de un nivel a otro de razonamiento. Para lograr esto se debe obrar aplicando un método confiable que permita establecer los grados de adquisición de un nivel de razonamiento. En Maguiña (2013) se asume el método usado en Jaime (1993) para determinar grados de adquisición de los niveles de razonamiento, el mismo que se adoptó en este trabajo.

6.4 Descripción del método

Originalmente los Van Hiele formularon que el paso de un nivel al siguiente se producía por saltos; pero, trabajos posteriores llevaron a concluir que esta formulación no explicaba el uso de razonamientos en alternancia de niveles sucesivos. Jaime (1993) afirma que la consideración de la continuidad en la adquisición de los niveles de razonamiento produce mejores resultados de investigación. El método adoptado en este trabajo se fundamenta en esta consideración, definiendo distintos grados de adquisición de los niveles como dominios progresivos transicionales.

6.4.1 Grados de adquisición de los niveles de Van Hiele

Se describen a continuación las características de cada uno de los grados de adquisición, Jaime (1993, pp. 265-266):

- Adquisición nula: no se emplean las características de este nivel de razonamiento.
- Adquisición baja**:** empieza la consciencia de las características, métodos y exigencias propios del nivel, pero es muy pobre la utilización que se hace de ellas. Es frecuente que el estudiante abandone el nivel para trabajar en el nivel anterior.
- Adquisición intermedia: el empleo de los métodos de este nivel es más frecuente y preciso, sin embargo, ante la aparición de alguna dificultad y considerando que el dominio no es completo, se realiza un retroceso al nivel anterior intentando regresar al actual luego. Por lo tanto, en este proceso encontramos saltos entre dos niveles consecutivos de razonamiento.
- Adquisición alta: se tiene como nivel de trabajo habitual el actual, aunque muy de vez en cuando se produce el retroceso al nivel anterior. En algunas ocasiones se hace uso inadecuado de las herramientas propias del nivel de razonamiento.

- Adquisición completa: hay dominio total de las herramientas y métodos de trabajos propios de este nivel de razonamiento.

6.4.2 Tipología de respuestas

Los grados de adquisición se establecen de acuerdo con la siguiente tipología, también definida por Jaime (1993, pp. 267-268):

Tipo 1: Ítems sin respuesta, con respuestas no codificables o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento, que no proporcionan ninguna información sobre su forma de utilizar los niveles de razonamiento inferiores.

Tipo 2: Respuestas matemáticamente incorrectas y muy incompletas, pero en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres que, además, contienen errores matemáticos o que no contestan directamente a la pregunta planteada.

Tipo 3: Respuestas matemáticamente correctas pero muy incompletas, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento. Se trata, por lo general, de respuestas muy breves y pobres, aunque no contienen errores matemáticos.

Tipo 4: Respuestas que reflejan claramente características de dos niveles de razonamiento consecutivos. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición entre niveles, pues entremezclan dos niveles de razonamiento consecutivos en sus respuestas a un ítem (generalmente en función de la dificultad de las preguntas). Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.

Tipo 5: Respuestas bastante completas pero matemáticamente incorrectas, que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.

Tipo 6: Respuestas bastante completas y matemáticamente correctas que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay "saltos" en el razonamiento deductivo seguido, porque tienen pequeños errores, etc.

Tipo 7: Respuestas matemáticamente correctas y completas que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

6.4.3 Ponderación y asignación de rangos

Se asignan los siguientes porcentajes para cada tipo de respuesta:

Tabla 1. Ponderación de los tipos de respuesta. Tomada de Jaime (1993).

Tipo de respuesta	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación (%)	0	20	25	50	75	80	100

En una determinada tarea o prueba escrita se seleccionan los ítems relacionados a un nivel de razonamiento para su resolución, se asignan los porcentajes según el tipo de respuesta y se obtiene el promedio para cada estudiante. En este caso se agruparan las tareas por cada clasificación de cuadriláteros, se obtendrá el promedio de cada estudiante y se ubicará en el rango correspondiente, como indica la siguiente tabla:

Tabla 2. Rangos de ponderación para los grados de adquisición. Tomado de Jaime (1993)

Grados	Nulo	Bajo	Intermedio	Alto	Completo
Rangos de ponderación	$0 \leq Gr \leq 15$	$15<Gr<40$	$40 \leq Gr<60$	$60 \leq Gr<85$	$85 \leq Gr \leq 100$

6.4.4 Niveles de idoneidad cognitiva *a posteriori*

Para poder establecer el nivel de idoneidad cognitiva a posteriori del diseño e implementación de la secuencia de tareas se requiere de una definición operativa y funcional.

Con base en el modelo propuesto por Jaime (1993) y usado por Maguiña (2013), se plantea la siguiente correspondencia:

Tabla 3. Descriptores de los niveles de idoneidad cognitiva *a posteriori.* Elaboración propia.

Niveles de idoneidad cognitiva *a posteriori*	**Descriptores**
Alta	Más del 60% de los estudiantes logra alcanzar por lo menos un grado alto de adquisición de razonamiento de nivel 3
Media	Más del 60% de los estudiantes logra alcanzar por lo menos un grado alto de adquisición de razonamiento de nivel 2
Baja	Más del 60% de los estudiantes logra alcanzar a lo más un grado intermedio de adquisición de razonamiento de nivel 2

7. ESTUDIO PRELIMINAR

Este capítulo se centra en la caracterización curricular, epistemológica y didáctica de la secuencia de tareas objeto de estudio. Como producto de este estudio se lograrán establecer las siguientes características:

- Identificación de los procesos y desempeños asociados a la clasificación de cuadriláteros, según el currículo colombiano.
- Organización jerárquica de la clasificación de cuadriláteros.
- Configuración epistémica de la unidad didáctica.
- Asociación de significados de referencia con los niveles de Van Hiele.
- Caracterización de los materiales didácticos en el desarrollo de la unidad.

7.1 Perspectiva curricular

El problema de investigación de este trabajo se circunscribe al campo de los sistemas geométricos, específicamente, al desarrollo del pensamiento espacial, que desde los lineamientos curriculares “es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales” (MEN, 1998). Esto a la luz del EOS se interpreta como un sistema de prácticas personales donde se construyen, manipulan, relacionan y se transforman objetos no ostensivos referidos al espacio, y se ponen en relación con objetos ostensivos que facilitan la operatividad y la comunicación. En consecuencia, los sistemas geométricos emergen y se institucionalizan en las prácticas colectivas de pensamiento espacial.

Según estas orientaciones se sugiere enfocar el currículo hacia al desarrollo de pensamiento espacial, direccionado desde la interacción con el espacio intuitivo hasta la construcción de espacios abstractos, que en este caso sería el espacio euclidiano. Mover, dibujar, construir, simbolizar y conceptualizar, son acciones que se privilegian en las orientaciones curriculares, por encima de "la contemplación pasiva de figuras y símbolos" (MEN, 1998, p. 37). El desarrollo de una geometría activa, que ponga al sujeto como el protagonista de su propio proceso de aprendizaje, es lo que se orienta desde el MEN, lo cual va en coherencia con la postura del EOS.

En el ámbito normativo, específicamente en los estándares básicos de competencia formulados por el MEN para el área de matemáticas, se puede observar que los sistemas geométricos se encuentran estructurados en dos ejes temáticos: las relaciones inter e intrafigurales y las relaciones espaciales; tal como se afirma en Sepúlveda, Ospina & González (2005). El primer eje se refiere al estudio de las figuras y los cuerpos geométricos, atendiendo a la identificación de elementos y propiedades, y al establecimiento de relaciones tanto al interior de cada figura como entre ellas. El segundo, se refiere básicamente a las transformaciones en el espacio y la métrica implícita en ellas.

En el eje de las relaciones inter e intrafigurales es que se centra este trabajo, más precisamente, en el proceso específico "Clasificar polígonos en relación con sus propiedades", que en el plan de área de la institución focalizada se encuentra organizado en el grado sexto. En este orden de ideas, se apuesta a una clasificación jerárquica de cuadriláteros, que corresponde al nivel 3 de Van Hiele, donde el estudiante establece relaciones incluyentes entre figuras y dá argumentos informales para dichas inclusiones.

Tabla 4. Desempeños asociados al proceso de clasificación de cuadriláteros. Elaboración propia a partir de MEN (2006)

FOCO		P. ESPACIAL	P. NUMÉRICO	P. MÉTRICO
Clasificación de cuadriláteros	GRADOS 4° Y 5°	Comparar y clasificar figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características.	Identificar y usar medidas relativas en distintos contextos.	Diferenciar y ordenar, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos).
		Identificar, representar y utilizar ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.		

	GRADOS 6° Y 7°	Clasificar polígonos en relación con sus propiedades.	Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.	Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

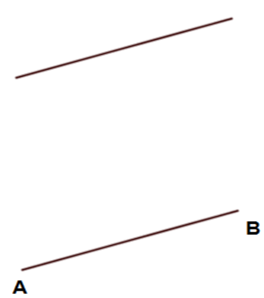
La clasificación de polígonos se relaciona, entre otros, con los siguientes procesos: Identificación de atributos, construcción, elección de criterios de clasificación, comparación y ordenación cualitativa o cuantitativa (Muñoz-Catalán et al., 2013). En la tabla 4 están organizados todos los procesos del pensamiento espacial que se encuentran relacionados con la clasificación de polígonos, tal como se ha referenciado. Estos son la base para la conformación de la rejilla de análisis de los datos recogidos en la implementación del diseño didáctico. Esta organización tiene en cuenta los conjuntos de grados inmediatamente anteriores al grado focalizado, con el propósito de establecer los significados previos de referencia.

7.2 Perspectiva epistemológica

La geometría como campo de estudio especializado, se ha transformado a lo largo de la história, desde los tiempos prehelénicos, donde tenía fuertes bases empíricas, hasta la contemporaneidad, con una estructura axiomática y formal. La inclusión, aspectos como el movimiento, los sistemas algebraicos y de referencia, y la axiomática, entre otros, han contribuido al desarrollo de este campo en varias vertientes, entre ellas, las geometrías analítica, proyectiva, métrica y no euclidianas (Corredor, 2012).

Por su lado, la geometría escolar es una amalgama de objetos y significados que provienen de varias de estas vertientes. Tal es el caso de los objetos *punto*, *recta, ángulo* y *polígono*, cuyas representaciones ostensivas institucionales se muestran en la tabla, que frecuentemente suelen ser representados por objetos que habitan la realidad física, produciendo así significados personales muy alejados de los institucionales, y recordando a su vez que a este nivel las bases empíricas de la geometría primitiva todavía están presentes en las prácticas matemáticas escolares.

Tabla 5. Representaciones de un segmento de recta. Elaboración propia.

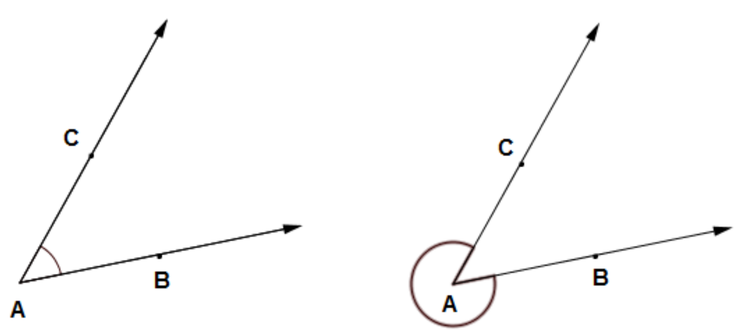
Figura	Simbolo	Expresión
	$\overline{AB}$	Segmento de recta

Por eso es conveniente caracterizar el tipo de geometría que mediante el diseño instruccional se quiere promover. En la perspectiva curricular se observa que el dinamismo geométrico está presente tanto en lo orientacional como en lo normativo. Este hecho motiva la exploración del objeto ángulo visto como “la cantidad de giro necesaria para trasladar una línea a la posición de otra” (Casas, Luis & Luengo, 2005, p. 203). También se observa la demanda que tiene la medición de segmentos y ángulos para las construcciones de figuras planas. Estas características ubican la perspectiva epistémica en la geometría euclidiana métrica y motiva a su vez el uso de Scratch, que permite construir polígonos produciendo algorítmos constituidos por sucesiones de recorridos y giros.

7.2.1 El objeto *Ángulo*

Casas, Luis & Luengo (2005) afirman que, en términos generales, las definiciones de *ángulo* se pueden clasificar en tres tipos: "ángulo como región del espacio, ángulo como par de líneas y ángulo como giro" (p. 202). Los mismos autores dicen que aquellas definiciones que son de los dos primeros tipos tienen problemas de precisión, pues hacen referencia a dos ángulos, como lo vemos en la figura 2, y se hace necesario introducir otros elementos para referirse a uno en particular, ya sea a través de los arcos o la nomenclatura clásica ∡BAC y ∡CAB. El tercer tipo de definiciones abogan por una visión dinámica y permite la referencia a un solo ángulo; además, le otorga un sentido de orientación evocado por el movimiento de las manecillas del reloj, que es representado por los signos "+" y "-". Sin embargo, hay un problema: la dificultad de representar, en edades tempranas, el *giro* en un dibujo, dada la naturaleza dinámica de este objeto.

Figura 2. Ángulos formados por dos semirrectas que coinciden en su origen.

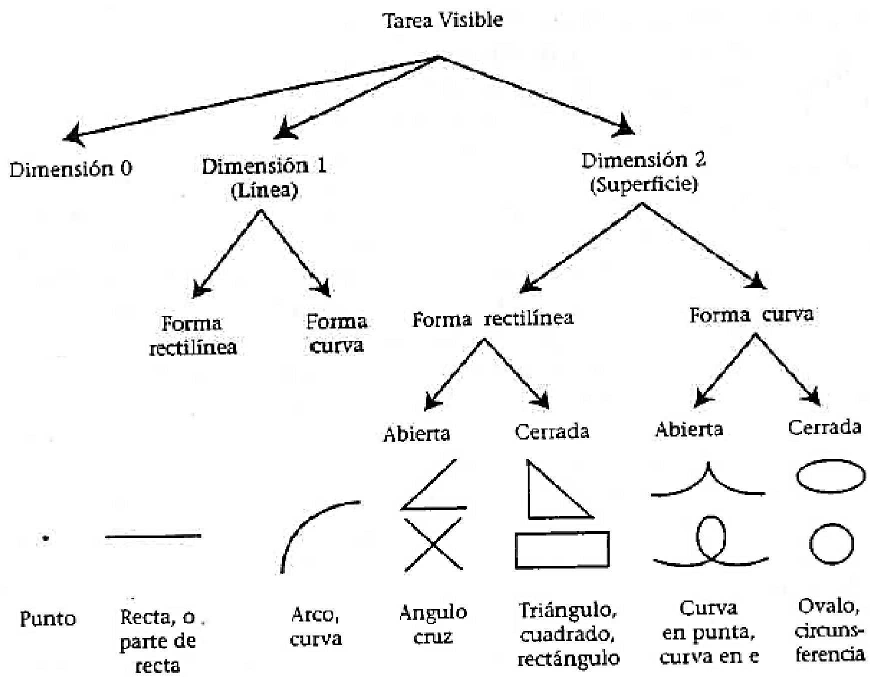


7.2.2 El objeto *Cuadrilátero*

Desde los trabajos realizados por Piaget (1972) y Noelting (1979), según Duval (2004), se concibe la *figura* como una representación visual lograda a partir de un contraste generado sobre materiales como pizarra, papel, pantalla de video, etc. Estas *figuras* experimentan variaciones de tipo cuantitativo, específicamente en el número de dimensiones, y otras de tipo cualitativo, específicamente en la forma. Cada cruce de estas variaciones genera una *unidad figural elemental*.

Según Duval (2004), "una *figura geométrica* es siempre una configuración de al menos dos *unidades figurales elementales*" (p. 159). De esta forma, un ángulo, visto como la configuración de dos semirrectas que tienen un origen común, es una figura geométrica de dimensión 1; pero, un ángulo, visto como una región limitada por dos semirrectas que comparten el origen, es una unidad figural elemental de dimensión 2 (figura 3). Lo mismo sucede con los triángulos, cuadrados y rectángulos. Si se asumen como superficies completamente limitadas, entonces resultan ser unidades figurales elementales de dos dimensiones, pero si son concebidos como el contorno de estas superficies, entonces son figuras geométricas que se constituyen de segmentos de recta unidos en sus extremos de forma sucesiva.

Figura 3. Clasificación de unidades figurales elementales. Tomado de Duval (2004).



En general, hay dos maneras de concebir un *polígono*, como una figura geométrica plana conformada por varios segmentos de recta (lados)[5] unidos por sus extremos, de forma consecutiva, encerrando una superficie (cita) o, como una superficie encerrada por varios lados. En la segunda, no se usan términos para expresar la distinción entre el contorno y la superficie encerrada, como si se hace entre la circunferencia (contorno) y el círculo (superficie). Para no provocar ambigüedades y ser consecuente con la apuesta didáctica de este trabajo[6], se opta por la pimera concepción. De esta forma, un *cuadrilátero* se concibe como un polígono de cuatro lados.

---

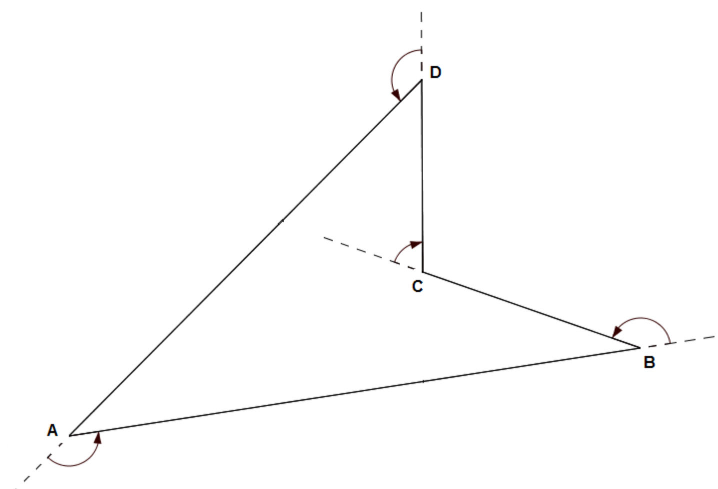
[5] En apego a la concepción de figura aquí expuesta, se acepta la premisa que un segmento de recta se puede representar mediante el registro de una trayectoria en línea recta sobre una superficie, a lo cual se llamará *recorrido*. Por lo tanto, los lados de un polígono son el resultado de recorridos rectos.

[6] Construcción de cuadriláteros a partir de prácticas de recorrido y giro, representación algorítmica y búsqueda de patrones de regularidad.

7.2.3 Otros objetos

El *vértice* se concibe como el punto de unión entre dos lados de un polígono. Los lados que generan un vértice reciben la etiqueta de *lados consecutivos.* Así mismo, en un cuadrilátero, a los lados que no generan vértices se conocen como *lados opuestos*. Un término muy usado por los estudiantes de grado quinto es el de *punta*, para referirse a los vértices de un cuadrilátero, cuyos giros alrededor de ellos van en el mismo sentido, como se muestra en la figura 4, donde las puntas son los vértices A, B y D.

Figura 4. Vértices y "puntas" de un cuadrilátero cóncavo. Elaboración propia.



Por otro lado, son llamados *lados paralelos* a aquellos que siendo opuestos, corresponden a recorridos en sentidos opuestos o, que los giros necesarios para ir de un lado a otro son complementarios (sus medidas suman 180°). Mientras los *lados perpendiculares* son aquellos que siendo consecutivos, corresponden a recorridos que requieren de un giro de 90° entre uno y otro.

7.2.4 El concepto de clasificación

Mederos (2007) aplica un modelo llamado "Operación Clasificación de Conceptos" para el caso de los cuadriláteros. Según este modelo, clasificar un concepto significa producir una partición en el conjunto de objetos a los que se refiere el concepto; por lo tanto, no podría ser clasificación una operación que genere dos definiciones distintas para un mismo objeto. De esta concepción se deduce que para cada criterio hay una clasificación, luego una sola clasificación no es suficiente para construir una tipología estructurada que abarque todos las posibles clases de objetos a los que se refiere el concepto.

De Villiers (1994) manifiesta que, en términos generales, el proceso de clasificación en geometría puede ejecutarse desde dos modalidades. Por un lado, la clasificación puede ser particional (exclusiva) o jerárquica (inclusiva). En la primera, se agrupan los objetos a partir de unas propiedades muy precisas que no dan pie a ambigüedades, pero que tampoco facilita los procesos de deducción ni la economía de pensamiento. En la segunda, se agrupan los objetos desde propiedades más flexibles, que permiten la inclusión y fortalecen los procesos de razonamiento deductivo. Por otro lado, la clasificación puede ser *a priori* o *a posteriori*, según sea el propósito, es decir, si se busca la construcción de nuevos conceptos por vía *generalización* o *especialización* o, lo que se busca es la organización de conceptos, cuando estos ya se han examinado con antelación.

A diferencia de Mederos (2007), De Villiers (1994) no propone una definición de *clasificación*, lo que le interesa es *el cómo* de dicho proceso. Sin embargo, se puede inferir que este autor concibe la *clasificación* como un proceso global de organización y generación de conceptos matemáticos. En cambio, Mederos (2007) la concibe como una operación y a su vez admite la posibilidad de realizar clasificaciones sucesivas con el propósito de darle una organización lógica a todos los conceptos subordinados al inicial. Una manera de conciliar estas concepciones es pensar que la única clasificación posible es la particional, pero que un conjunto de clasificaciones pueden dar origen a una organización jerárquica de conceptos.

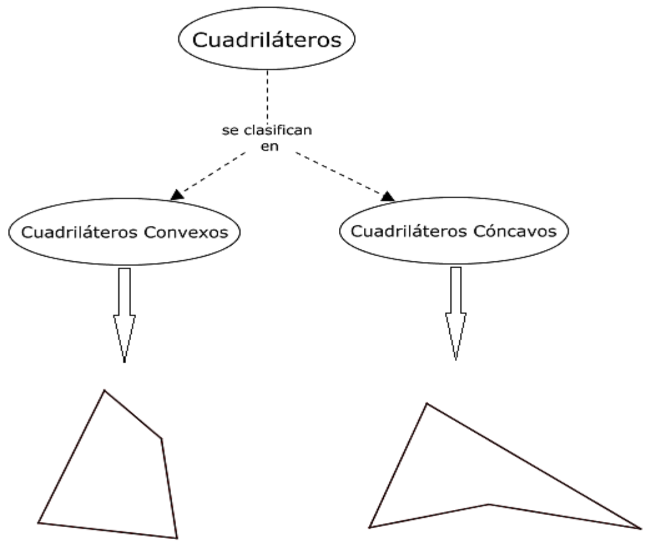
El camino escogido en este estudio es, precisamente, el de la organización jerárquica, por perseguir a la vez, precisión en las definiciones y coherencia con las prácticas del nivel 3 de Van Hiele “Ordenación y clasificación”. Además, aunque todos los estudiantes ya han tenido una experiencia, en mayor o menor medida, con algunos cuadriláteros, se asumirá una clasificación *a priori* de tipo *especialización,* lo cual coincide con la concepción de Mederos (2007): de lo general a lo paticular. Todo con el propósito que el estudiante logre formular definiciones inclusivas y realizar deducciones informales.

7.2.5 Clasificación de cuadriláteros

Clasificación 1
Objeto: Cuadrilátero
Criterio: Sentido de los ángulos de giro.

Un *cuadrilátero convexo* es aquel cuyos ángulos de giro en su recorrido van en el mismo sentido. El cuadrilátero que no cumple esta propiedad se dice que es *cóncavo* (figura 5). Otro critero de clasificación es el de la coincidencia entre la cantidad de vértices y “puntas” que tiene el cuadrilátero.

Figura 5. Clasificación 1. Elaboración propia.



Clasificación 2

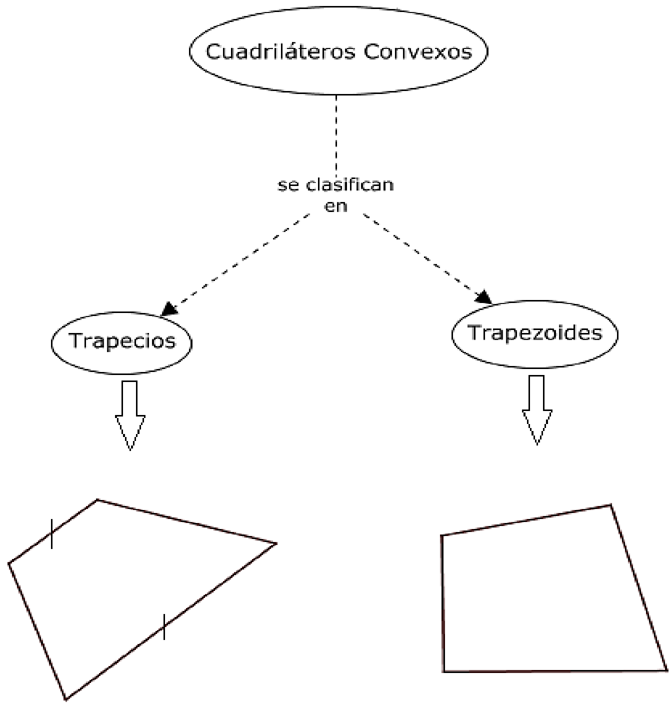
Objeto: Cuadrilátero convexo.

Criterio: paralelismo entre lados opuestos.

Un *trapecio* es un cuadrilátero convexo en el cual al menos un par de lados opuestos son paralelos[7]. *Trapezoide* es el nombre que reciben los cuadriláteros convexos que no poseen parejas de lados opuestos paralelos (figura 6).

[7] La propiedad de tener al menos un par de lados opuestos paralelos la dio por primera vez Maraldo (1980), que en contraposición a sus contemporáneos permitió la inclusión de los paralelogramos dentro de los trapecios (Mederos, 2007).

Figura 6. Clasificación 2. Elaboración propia.



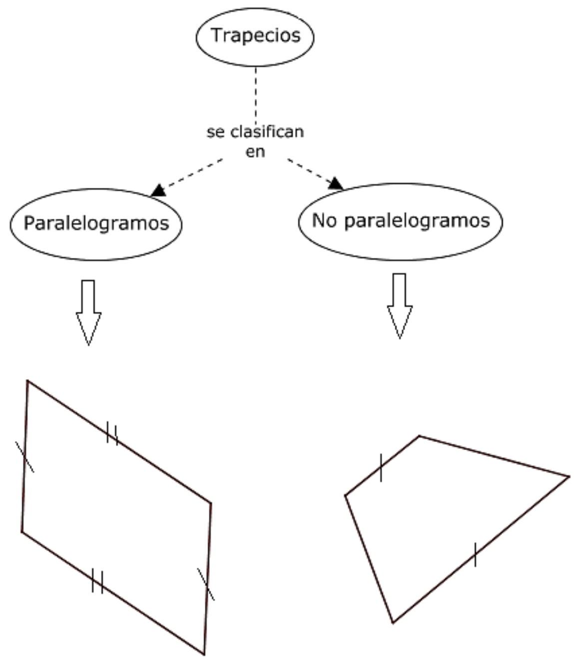
Clasificación 3

Objeto: Trapecio

Criterio: paralelismo entre lados opuestos.

Un *paralelogramo* es un trapecio con dos parejas de lados opuestos paralelos. Aquellos trapecios que no cumplan con esta propiedad simplemente se conocen como *trapecios no paralelogramos* (figura 7).

Figura 7. Clasificación 3. Elaboración propia



Clasificación 4

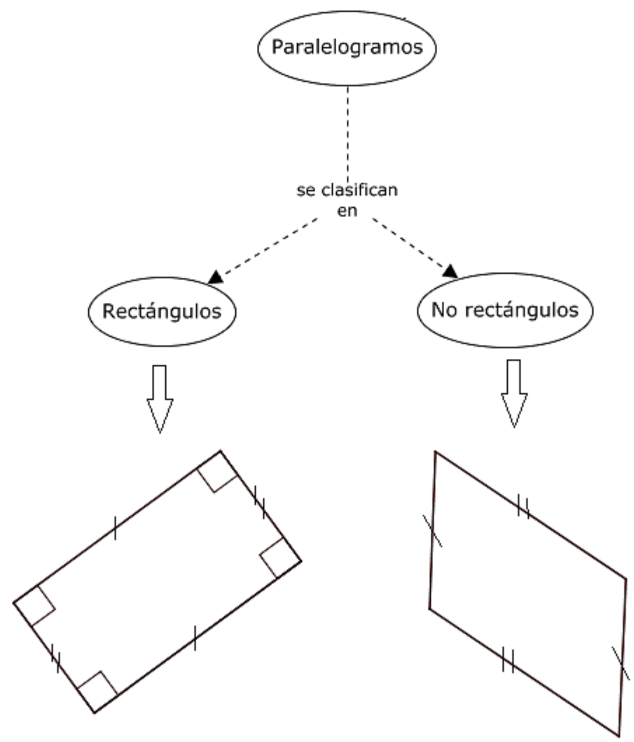
Objeto: Paralelogramo.

Criterio: perpendicularidad entre las parejas de lados consecutivos.

Un *rectángulo* es un paralelogramo cuyos lados consecutivos son perpendiculares entre sí. Aquellos paralelogramos que no cumplen esta propiedad se conocen como *paralelogramos no rectángulos*[8] (figura 8).

[8] Los llamados *rombos* no se destacan en esta organización, quedando contenidos en la clase de los paralelogramos no rectángulos. La razón proviene de la concepción de Mederos (2007), quien dice que en las clasificaciones hay que evitar las intersecciones no vacías.

Figura 8. Clasificación 4. Elaboración propia.



Clasificación 5

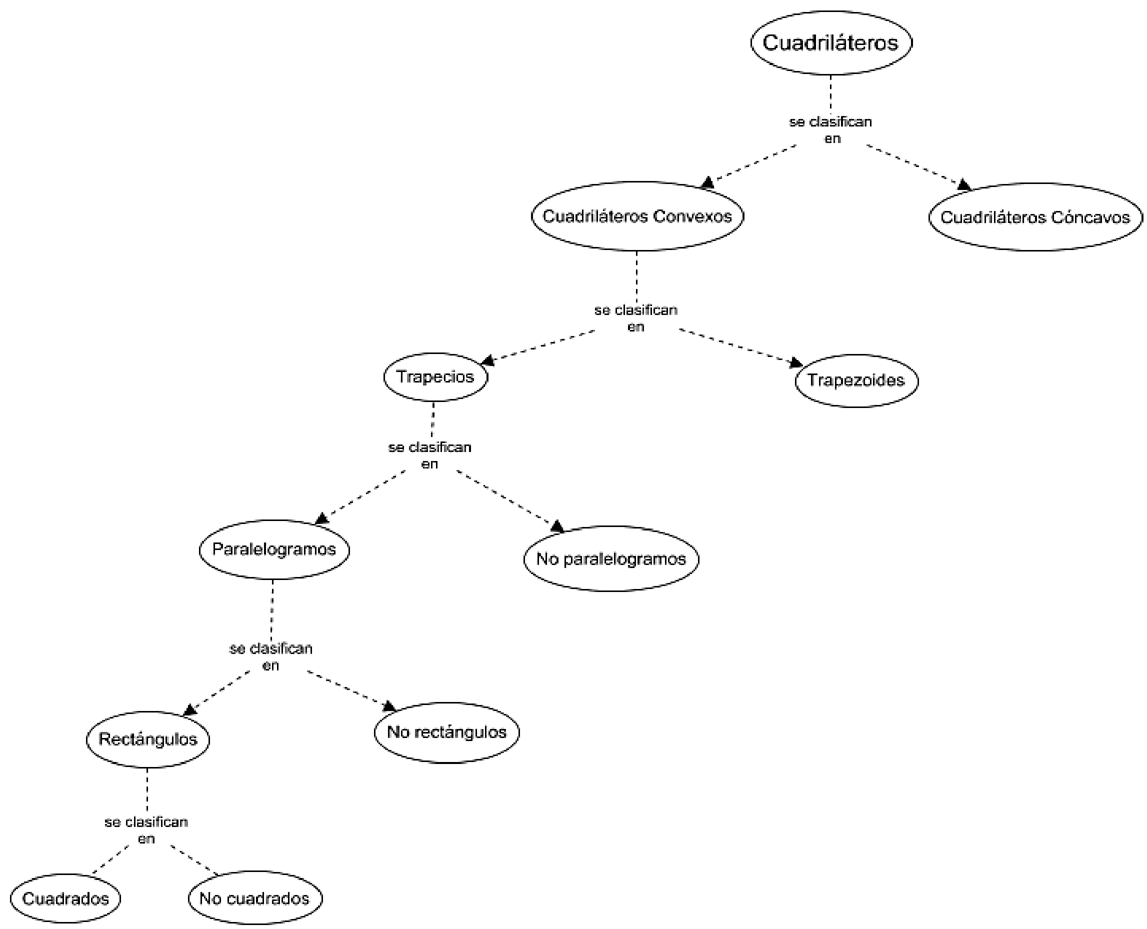
Objeto: Rectángulo.

Criterio: congruencia de lados.

Un *cuadrado* es un rectángulo cuyos lados son congruentes entre sí. Aquellos rectángulos que no cumplen esta propiedad se conocen como *rectángulos no cuadrados.*

Finalmente, se tiene la organización jerárquica que se ilustra en la siguiente figura:

Figura 9. Organización jerárquica de los cuadriláteros



7.3 Perspectiva didáctica

Ya se caracterizó la orientación didáctica del diseño instruccional en cuestión, pero aun falta la caracterización de los materiales que se van a usar durante el desarrollo de la unidad; también falta la configuración de los significados de referencia en asocio con los niveles de Van Hiele.

7.3.1 Materiales propuestos para el desarrollo de la unidad didáctica

Con el término *material didáctico* se hace referencia a "todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que puedan ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje" (Alsina, Burgués y Fortuny, 1991, p. 13). Esta definición coincide con lo que Godino, Batanero y Font (2003) entienden por *recurso didáctico*. En adición, estos autores establecen una diferenciación entre aquellos recursos que se constituyen en ayudas para el estudiante, en términos de sustitución de funciones del profesor, como el tablero, libros de texto, tutoriales virtuales, etc., y aquellos como los objetos físicos, gráficos, textuales, semióticos, etc., que "funcionan como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático" (Godino, Batanero y Font, 2003 p. 128). A estos últimos les llaman *materiales manipulativos*.

Desde esta perspectiva, las tareas se constituyen en recursos de ayuda, mientras que los instrumentos de medida, las figuras, tanto en dibujos como en material concreto, y el programa computacional Scratch, son considerados materiales manipulativos. En esta unidad se hará énfasis en el uso de material concreto, como lo son las láminas de cartulina con forma de figuras geométricas; también en el uso de instrumentos de medida, como lo son la regla graduada y el transportador o graduador. A estos se les conoce con el nombre de *manipulativos tangibles*, precisamente porque posibilitan la manipulación táctil. Por su parte, Scratch, que tendrá un lugar especial en el desarrollo de la secuencia, puede ser incluido dentro de los materiales llamados *manipulativos virtuales gráfico-textuales*. A continuación se hará una caracterización de este material.

Scratch es un software desarrollado por el equipo "Lifelong Kindergarten" del laboratorio de medios del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts); un entorno de programación con un lenguaje amigable basado en bloques de instrucción que encajan unos con otros en secuencia lógica. Este material manipulable “permite a niños y jóvenes crear sus propias historias interactivas, juegos y simulaciones y, a continuación, compartir esas creaciones en una comunidad en línea con otros jóvenes programadores de todo el mundo” (Brennan & Resnick, 2012, p.1), como lo citó López (2014). El usuario debe saber usar, entre otros, los conceptos de plano cartesiano, punto, segmento, ángulo, desplazamiento y rotación, para poder elaborar los algoritmos que dan vida a las creaciones. Pero la herramienta también puede ser usada para construir significados sobre estos objetos geométricos, tomando como contexto las prácticas asociadas a la resolución de problemas o el desarrollo de proyectos.

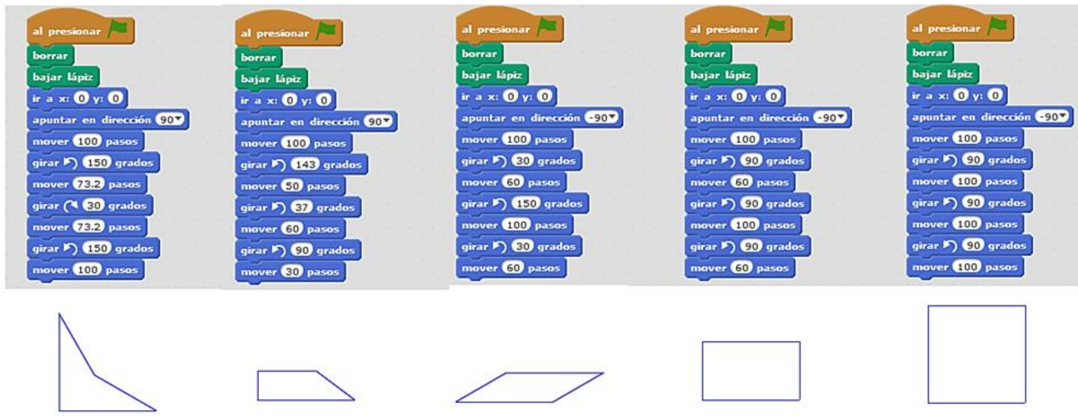
Este software es una evolución de la geometría de la tortuga, y al igual que ella, está escrito en el lenguaje de programación LOGO. En este entorno el objeto “punto” tiene una representación visual provista de orientación, que al moverse puede generar representaciones de figuras geométricas; estas a su vez pueden transformarse (traslación, rotación, reflexión, homotecia). Tales condiciones generan un modelo de geometría sintonizado con la realidad del movimiento y que provee un ambiente virtual para el desarrollo de actividades genuinamente matemáticas, pero con características distintas al entorno de lápiz y papel (Papert, 1982).

Otros programas que se desarrollaron a partir de la idea de la Tortuga, como Cabri, Regla&Compás y Geogebra, encubrieron el proceso de programación, con el propósito de evitarle al aprendiz la engorrosa labor de diseñar algorítmos que condujeran a la construcción de figuras. No obstante, Scratch, al igual otros, siguieron su propia ruta de evolución, con posibilidades muy variadas de aplicación en la educación.

Según Godino, Batanero & Font (2004) estos materiales tienen a su vez, un carácter instrumental, porque son utilizados para “manipular” objetos geométricos, y un carácter semiótico, porque proveen de un medio para la representación de objetos geométricos. Además, la interacción con ellos favorecen el desarrollo de habilidades como: la visualización, el análisis de patrones, el establecimiento de conexiones y la retroalimentación (National Council for Educational Technology, 1995), (citado por Ministerio de Educación Nacional, 1999). También es importante mencionar el desarrollo del razonamiento lógico-matemático, tan decisivo a la hora de diseñar un algorítmo con condicionales, resolver problemas o comunicar ideas matemáticas.

El interés por el uso de Scratch se centra en el tipo de geometría que permite dinamizar, que va en la misma vía descrita en la perspectiva epistemológica, sintonizada con la realidad del movimiento corporal. Con este software, para construir un polígono se debe primero imaginar el movimiento de un ente, tener conciencia de la orientación, tomar mediciones de sus desplazamientos y giros, y por último elaborar un código que permita dibujar la figura, como se puede ver en la figura 10. El carácter semiótico y su potencial para facilitar el desarrollo de las habilidades antes mencionadas, son materia de interés para los estudios sobre la idoneidad mediacional de la secuencia de tareas, pero ese no es el objeto de estudio de este trabajo, así que, solo se tendrán en cuenta para el diseño y quizá, se hagan algunos comentarios a manera de perspectivas de investigación.

Figura 10. Ejemplos de cuadriláteros y sus códigos de ejecución en Scratch. Elaboración propia.



7.3.2 El aspecto semiótico

Las prácticas matemáticas que tienen lugar en el desarrollo de las tareas propuestas para la emergencia, circulación e institucionalización de los objetos geométricos en el marco de este estudio, se dan, en términos de Duval (2004), en dos registros de representación: figural y discursivo. El primero, es usado para designar *figuras* (objetos ostensivos) y visualizar sus propiedades y relaciones; el segundo, para expresar construcciones, propiedades, definiciones y justificaciones.

Es de admisión común la consideración de que los registros figurales tienen una base empírica y que por tanto se constituyen en soporte intuitivo para las prácticas geométricas, particularmente en la resolución de problemas, donde cumplen un papel heurístico (Duval, 2004). En la secuencia de tareas lo que se pretende es generar en los estudiantes la emergencia de nuevos objetos geométricos, que se desprendan del soporte intuitivo y faciliten, además de los análisis intra e interfigurales, el paso al registro discursivo.

7.3.3 Significados de referencia

En la tabla 6 se muestra la configuración epistémica en términos de prácticas institucionales asociadas a los objetos geométricos. En la tabla 7 se configuran los niveles de Van Hiele en términos de significados de referencia. Es necesario aclarar que se tomaron como referencia los tres primeros niveles por dos razones. La primera es que la caracterización del tercer nivel coincide con las prácticas de razonamiento que se pretenden poner en juego en la clasificación de cuadriláteros. La segunda es que por experiencias de investigación se sabe que los estudiantes con edades entre 14 y 16 años escasamente alcanzan el nivel 4 (Corberán, 1994). Estas configuraciones se elaboraron teniendo como referencia la perspectiva curricular y los trabajos de Corberán (1994) y Maguiña (2013), y su importancia radica en su definición de la ruta a seguir en el diseño de las tareas, así como el principal referente para la identificación de significados personales.

Tabla 6. Configuración epistémica de la unidad didáctica. Elaboración propia con base a los trabajos de Corberán (1994) y Maguiña (2013)

Objetos		**Prácticas geométricas**
Elementos linguísticos	Representaciones gráficas de los cuadriláteros.	-Identificación de relaciones intrafigurales entre los elementos de un cuadrilatero. -Asociación de algorítmos de construcción con las representaciones gráficas.
	Representaciones algorítmicas de los cuadriláteros.	
Elementos conceptuales	Lado, vértice, ángulos internos y externos.	Asociación estos objetos a prácticas de recorrido y giro en el contexto de una construcción geométrica.
	Perpendicularidad y paralelismo.	Deducción de estas propiedades a partir de los algorítmos de construcción de trapecios, paralelogramos y rectángulos
	Cuadrilátero, cuadrilátero convexo, trapecio, paralelogramo, rectángulo y cuadrado.	-Detección de patrones de regularidad observados en las representaciones algorítmicas. -Uso de estos patrones para definir y clasificar cuadriláteros.
Proposiciones	Enunciados construidos a partir de la clasificación de los cuadriláteros.	Establecimiento del valor de verdad de una proposición con base a la relación entre cuadriláteros, usando los criterios de clasificación de referencia.
Procedimientos	Medidas de lados y ángulos externos.	Uso de transportador y regla graduada en milímetros y centímetros para medir ángulos exteriores y lados de cuadriláteros, y usar

		estos valores en el diseño de algorítmos de construcción.
	Algoritmos de programación.	-Diseño algorítmos de programación en el entorno virtual de Scratch, usando las medidas obtenidas y los comandos adecuados del software. -Verificación de la efectividad del algorítmo poniendolo en funcionamiento.
Argumentos	Argumentos informales	-Uso de los patrones de regularidad observados en las representaciones algoritmicas para establecer relaciones de inclusión entre los cuadriláteros. -Uso de argumentos informales para justificar de relaciones de inclusión.

Tabla 7. Significados de referencia asociados con los niveles de Van Hiele. Elaboración propia con base a los trabajos de Corberán (1994) y Maguiña (2013)

NIVELES	Significados de referencia
1: Reconocimiento	Reconoce, compara y clasifica cuadriláteros utilizando criterios intuitivos, con expresiones como: "… es similar a …", "… es como …", etc.; pero no desde sus componentes.
2: Análisis	Reconoce cuadriláteros utilizando criterios como la rectitud y cerradura del contorno y la unicidad de la superficie encerrada por el contorno. Mide la longitud de los lados y la abertura de los ángulos externos de un cuadrilátero convexo y los identifica con recorridos y giros sobre el contorno del mismo. Construye cuadriláteros convexos a partir de la medida de sus lados y ángulos exteriores. Establece que un determinado cuadrilátero sigue siendo tal aunque éste cambie su posición en el plano. Identifica giros (ángulos) sucesivos complementarios con paralelismo entre recorridos (lados). Identifica giros (ángulos) de 90° con perpendicularidad entre recorridos (lados) Establece relaciones intrafigurales (paralelismo y perpendicularidad) para el reconocimiento, comparación y clasificación de cuadriláteros convexos. Identifica regularidades en las representaciones algorítmicas y en las definiciones de diferentes tipos de cuadriláteros convexos.
3: Deducción informal	Define cada cuadrilátero a partir de los elementos y las propiedades identificadas en las relaciones intra e interfigurales. Establece relaciones interfigurales de inclusión entre los diferentes tipos de cuadriláteros convexos.

	Determina el valor de verdad de una proposición referida a una definición o a la clasificación jerárquica de cuadriláteros convexos, mediante una deducción informal.

8. DISEÑO DE LA SECUENCIA

8.1 Diseño de la prueba diagnóstico

De acuerdo a la naturaleza de la investigación no se aplica una prueba de entrada, en términos de referencia estricta para observar posibles cambios en el desarrollo cognitivo de los estudiantes. En cambio, se diseña una prueba (véase anexo 1) que tiene la pretensión, por un lado, de indagar por los saberes previos en relación con los requerimientos de la apuesta didáctica del diseño instruccional a implementar y los que establece el currículo de la institución a la que pertenece la población objeto de estudio. En este caso se trata de la medición de longitudes y ángulos, y el reconocimiento de lados perpendiculares y lados paralelos de un cuadrilátero. Por otro lado, se tiene el propósito de establecer bases de referencia con respecto a la adquisición del nivel 2 de Van Hiele, específicamente en dos procesos: definir y clasificar.

La siguiente tabla presenta los descriptores de cada ítem de la prueba:

Tabla 8. Descriptores de la prueba diagnóstico. Elaboración propia.

Ítem	Descriptores
1	Mide ángulos de abertura
2	Mide ángulos de giro
3	Identifica lados perpendiculares en un polígono
4	Identifica lados paralelos en un polígono
5	Mide segmentos de recta usando la unidad más conveniente
6	Define un polígono a partir de la identificación de sus características (rectitud y cerradura del contorno, y unicidad de superficie)
7	Clasifica cuadriláteros expresando claramente los criterios utilizados para ello.

Los cinco primeros son desempeños muy precisos y se evalúan desde tres niveles: cumplió, cumplió parcialmente y no cumplió. Los últimos corresponden a subprocesos de razonamiento y se evalúan desde el modelo de Van Hiele, específicamente con los grados de adquisición de razonamiento de nivel 2.

8.2 Diseño de la secuencia de tareas

Como ya se dijo, esta secuencia (véase anexo 2) se diseñó con base a los principios del EOS, la propuesta didáctica del modelo de Van Hiele y la caracterización de tareas matemáticas propuesta por García et al (2005). Los significados de la configuración epistémica que se asociaron con los tres primeros niveles de Van Hiele, como se puede ver en la tabla 7, se discriminan en cada una de las tareas que componen la secuencia, como se puede ver en las siguientes tablas:

Tabla 9. Significados de referencia para la unidad de análisis: Construcción del concepto de cuadrilátero.

Unidad de análisis	**Tareas**	**Tipo**	**Procesos específicos**	**Significados de referencia**
Definición del concepto de cuadrilátero	**3**	Reproducción (Grupal)	Utilizar Elaborar	Utiliza el transportador y la regla graduada para medir giros y recorridos. Representa figuras geométricas a partir de prácticas de recorrido y giro.
	4	Conexión (Grupal)	Identificar Reconocer	Identifica en una figura geométrica aspectos del contorno como: rectitud, cerradura y unicidad. Reconoce el cuadrilátero como la representación de una figura geométrica de contorno recto, de cuatro lados, cerrado y que encierra una sola región.

Tabla 10. Significados de referencia para las unidades de análisis: Uso de Scratch y Clasificación 1

Unidad de análisis	Tareas	Tipo	Procesos específicos	Significados de referencia
Uso de Scratch	**5**	Reproducción (Individual)	Identifica	Identifica los comandos de “Movimiento”, “Lápiz”, “Control” y “Eventos” de Scratch, necesarios para dibujar polígonos.
			Elabora	Concatena de forma lógica los bloques de Scratch para producir, en el escenario, recorridos y giros de un objeto y el trazado de trayectoria.
		Conexión (Individual	Describir	Describe, en forma verbal, el movimiento realizado por un ente dibujador, al representar gráficamente un cuadrilátero.
			Representar	Hace uso de los comandos de Scratch para expresar, en forma algorítmica, la descripción del movimiento de un ente al construir una representación gráfica de un cuadrilátero.
			Verificar	Corrobora la efectividad del algoritmo poniéndolo en funcionamiento.
Clasificación 1: cuadriláteros convexos y cóncavos	**6**	Reproducción (Individual))	Representar	Representa, de forma algorítmica, tres cuadriláteros, dos de ellos convexos y otro cóncavo, utilizando Scratch.
		Conexión (Individual)	Comparar	Compara el sentido de los giros en cada representación algorítmica.
			Identificar	Establece un patrón de regularidad a partir del sentido de los giros.
	7	Conexión (Individual)	Clasificar	Agrupa cuadriláteros a partir del criterio del patrón establecido.
			Formular	Formula definiciones para cuadriláteros cóncavos y convexos. Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado cuadrilátero es cóncavo o convexo.

Tabla 11. Significados de referencia para las unidades de análisis: Clasificación 2 y Clasificación 3

Unidades de análisis	**Tareas**	**Tipo**	**Procesos específicos**	**Significados de referencia**
Clasificación 2: Trapecios y trapezoides	**8**	Reproducción (Individual)	Representar	Representa, en forma algorítmica, cuadriláteros convexos: trapecios y trapezoides; utilizando Scratch.
		Conexión (Individual)	Comparar Identificar Asociar Clasificar	Compara los giros sucesivos en cada representación algorítmica. Identifica, en algunos cuadriláteros convexos, la complementariedad de giros sucesivos. Asocia la complementariedad de giros sucesivos con la propiedad de paralelismo entre lados. Clasifica cuadriláteros convexos a partir del criterio de complementariedad en al menos una pareja de giros sucesivos.
	9		Formular Explicar	Formula definiciones para trapecios y trapezoides. Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado cuadrilátero es trapecio o trapezoide.
Clasificación 3: Paralelogramos y Trapecios no paralelogramos	**10**	Reproducción (Individual)	Representar	Representa, en forma algorítmica, trapecios: paralelogramos y trapecios no paralelogramos; utilizando Scratch
		Conexión (Individual)	Comparar Identificar Clasificar	Compara los giros sucesivos en cada representación algorítmica. Identifica, en algunos trapecios, la complementariedad en dos parejas de giros sucesivos. Clasifica trapecios a partir del criterio de complementariedad en dos parejas de giros sucesivos.
	11		Formular Explicar	Formula definiciones de para paralelogramos y trapecios no paralelogramos. Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado trapecio es paralelogramo o trapecio no paralelogramo.

Tabla 12. Significados de referencia para las unidades de análisis: Clasificación 4 y Organización jerárquica de las clasificaciones

Unidades de análisis	**Tareas**	**Tipo**	**Procesos específicos**	**Significados de referencia**
Clasificación 4 y 5: Rectángulos y paralelogramos no-rectángulos/ Cuadrado y rectángulos no-cuadrados	**12**	Conexión (Individual)	Formular Explicar	Formula, en forma inclusiva, definiciones para rectángulos y cuadrados. Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado paralelogramo es rectángulo o paralelogramo no rectángulo. Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado rectángulo es cuadrado o rectángulo no cuadrado.
Organización jerárquica de las clasificaciones	**13**	Conexión (Grupal)	Deducir	Establece relaciones interfigurales de inclusión entre diferentes tipos de cuadriláteros. Determina el valor de verdad de una proposición que define o relaciona dos tipos de cuadriláteros convexos, mediante deducciones informales.

8.3 Diseño de la evaluación final

Durante la implementación de la secuencia se obtuvo información en registros escritos y multimedia, que servirán para hacer análisis cualitativo de las interacciones docente-estudiante y estudiante-saber. Sin embargo, es necesario aplicar una prueba final (véase anexo 3), de forma individual y sin la intervención docente, para obtener una muestra de significados logrados por los estudiantes, compararla con los significados institucionales de referencia y establecer el nivel de idoneidad del diseño instruccional implementado.

A continuación se presenta una tabla con los tipos de pregunta que componen la prueba y sus respectivos significados de referencia:

Tabla 13. Ítems y descriptores de la prueba final. Elaboración propia

Ítem	Tipo	Significados de referencia
1	Identificación	Identifica cuadriláteros en mosaicos
2	Selección múltiple con única respuesta	Reconoce las características propias de los cuadriláteros.
3	Respuesta libre	Construye cuadriláteros convexos a partir de la medida de sus lados y ángulos de giro.
4	Respuesta libre	Identifica regularidades en representaciones algorítmicas de diferentes tipos de cuadriláteros
5	Selección múltiple con única respuesta	Identifica regularidades en representaciones verbales de cuadriláteros convexos
6	Correspondencia	Establece relaciones interfigurales mediante la identificación de propiedades comunes.
7	Respuesta libre	Define cuadriláteros convexos a partir de las relaciones interfigurales de inclusión
8	Doble alternativa Respuesta libre	Determina el valor de verdad de una proposición referida a la relación entre dos tipos de cuadriláteros. Justifica la veracidad de una proposición referida a la relación entre dos tipos de cuadriláteros.

Los seis primeros ítems evalúan el grado de adquisición de razonamiento de nivel 2 de Van Hiele y los dos restantes, el correspondiente al nivel 3.

9. IMPLEMENTACIÓN

9.1 Prueba Diagnóstico

Para desarrollar la prueba los estudiantes contaron con 60 minutos. Cada estudiante, además del soporte escrito, contó con los instrumentos de medición de longitudes y ángulos, un juego de láminas con forma de cuadriláteros y pegante.

En los registros escritos de los estudiantes se observó lo siguiente:

Con relación a los ángulos, la gran mayoría no usa correctamente el transportador y tampoco están familiarizados con la escritura de los grados sexagesimales. El significado que tienen de ángulo es el de una abertura que no supera los 180°. La gran mayoría no ha construido significados de los ángulos con respecto a las acciones de giro.

Con relación a las longitudes, la mayoría tiene dificultades. Muchos comienzan a medir desde la primera unidad y no cuentan los centímetros que hay entre los extremos, se conforman con observar el número en que se encuentra el otro extremo. En su gran mayoría no han construido la unidad “milímetro”, algunos prefieren escribir 3,5 cm. en vez de 35 mm. Otros insisten en medir en centímetros, sin cifras decimales, a pesar de no ser muy precisa la medida.

Con respecto a las relaciones de perpendicularidad y paralelismo no se aprecia una tendencia clara que permita lanzar hipótesis de comportamiento frente a la identificación de las parejas de lados que guardaban la relación indicada.

En la revisión de cada una de las respuestas que dieron los estudiantes al ítem 6 (definición de polígono) y al ítem 7 (Clasificación de cuadriláteros) se identificaron los siguientes descriptores de significado:

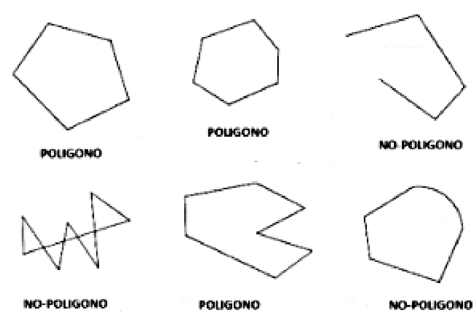
Tabla 14. Descriptores de significado para los ítems 6 y 7 de la Prueba Diagnóstico

	Descriptores de significado	
Tipo	**Ítem 6**	**Ítem 7**
1	Muestra incoherencia entre las características que indica en la tabla y lo que expresa en el escrito.	Separa los cuadriláteros pero no las agrupa.
2	Indica algunas características de los polígonos sin contradicción alguna.	Agrupa algunos cuadriláteros y lo justifica con expresiones imprecisas
3	Indica y expresa algunas características de los polígonos.	Agrupa de forma correcta muchos de los cuadriláteros y lo justifica con expresiones propias del nivel 1 (son grandes, son pequeños, son conocidos, se parecen)
4	Usa la información consignada en la tabla para definir los polígonos, pero adicionalmente menciona características que observa directamente de las imágenes.	Agrupa de forma correcta muchos de los cuadriláteros y lo justifica mezclando expresiones propias de los niveles 1 y 2 (tienen ángulos rectos, sus lados son iguales, tienen tres puntas, etc.)
5	Indica y expresa de forma coherente tres características de los polígonos, aunque la mayoría o todas sean incorrectas.	______________
6	Define polígonos expresando, de forma coherente, tres características, siendo la mayoría correctas.	______________
7	Define polígonos expresando, de forma coherente, las tres características.	______________

En el desarrollo de estos ítems se observó lo siguiente:

- Algunos estudiantes no guardan coherencia entre lo identificado en la tabla de características de los polígonos y lo expresado por ellos en la definición. La figura 11 muestra claramente que el estudiante identifica partes curvas en el contorno de los polígonos y solo una región encerrada por estos y, sin embargo, ice todo lo contrario en la definición de polígono.

Figura 11. Muestra de significados tipo 1, ítem 6, Prueba diagnóstico.


6. Observa las siguientes figuras geométricas.

a) Observa las figuras que llamadas polígonos; señala con una **X** la propiedad que cumplen en cada una de las tres cualidades indicadas en la tabla.

Partes del contorno		Recorrido del contorno		Regiones	
Segmentos de recta	Curvas	Cerrado	Abierto	Una	Varias
	X	X		X	

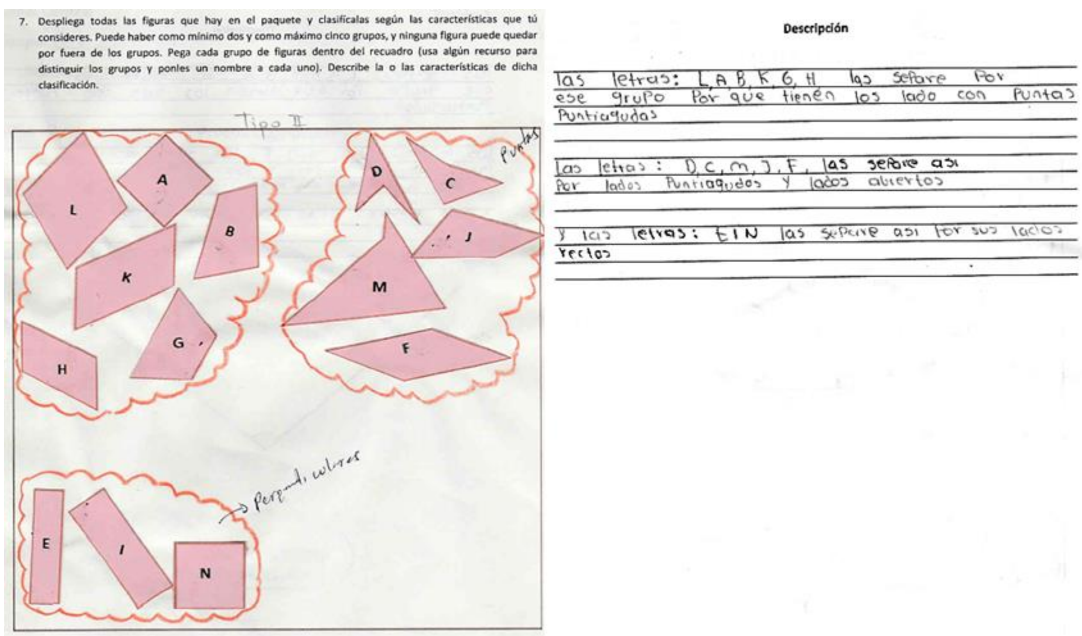
Tipo I

b) Según la información recogida, ¿qué es un polígono?

un Poligono es una Figura de segmento de Recta y los poligonos tienen varias Regiones

- Hay mucha dificultad para definir y describir los criterios de clasificación, de manera clara y coherente. Algunos tienen problemas de escritura y otros manifiestan criterios que no son conformes con las agrupaciones que hicieron, como se muestra en la figura 12, donde el estudiante usa el término “puntas puntiagudas” para referirse a ángulos de abertura muy cerrada, pero pasa por alto que todos no tienen la misma cantidad de “puntas”.

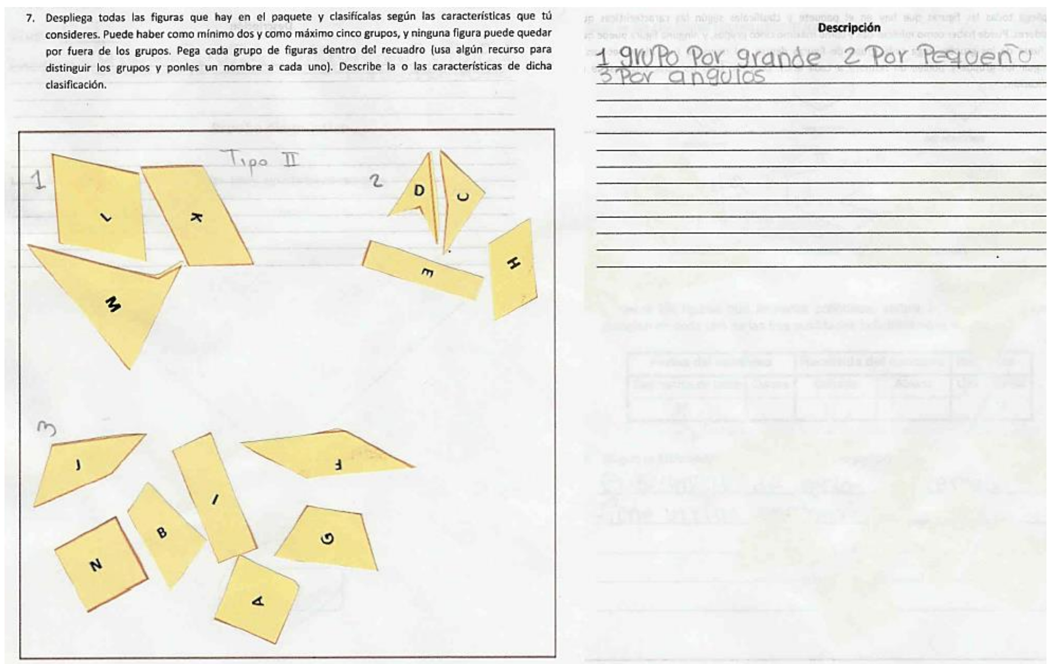
Figura 12. Muestra de significados tipo 3, ítem 7, Prueba diagnóstico.



- La figura 12 también ilustra lo que sucede con la gran mayoría de los estudiantes: no tienen claro el concepto de clasificación. Agrupan, como pueden, los cuadriláteros y tratan de establecer un criterio para cada grupo, sin advertir que un solo criterio da para establecer una diferenciación entre dos grupos.

- La mayoría de los estudiantes usa criterios de clasificación que reflejan el predominio de razonamiento de nivel 1, como lo son expresiones del tipo: son grandes, son pequeños, son conocidos, se parecen, etc. La figura 13 es ejemplo de este tipo de significado.

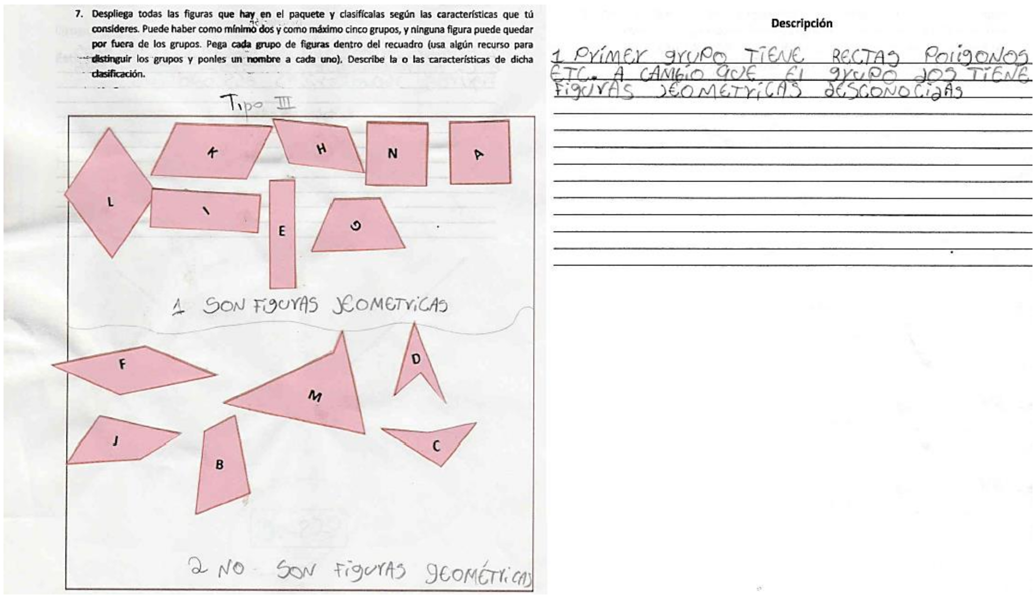
Figura 13. Muestra de significados tipo 2, ítem 7, prueba diagnóstico



- Muchos identifican los cuadrados y los rectángulos como figuras familiares y los usan como referentes de clasificación, como se observa en la figura 14. Unos pocos amplían este concepto a los rombos, paralelogramos y trapecios isósceles.

- Todos los que realizan algún tipo de clasificación evidencian la modalidad de clasificación particional, donde cada tipo de cuadrilátero pertenece a una familia disjunta, así guarde similitudes con otra.

Figura 14. Muestra de significados tipo 3, ítem 7, Prueba diagnóstico.



9.2 Tareas de ajuste

De acuerdo a las observaciones y resultados que surgieron de la aplicación de la Prueba Diagnóstico, específicamente en lo relacionado con los desempeños en medición, se consideró oportuno dedicar dos sesiones antes de iniciar la secuencia de tareas. Estas sesiones tuvieron el propósito de brindar a los estudiantes la oportunidad de realizar prácticas de medición de longitudes y ángulos, afianzando lo que ya se sabía, corrigiendo errores o aprendiendo nuevas formas de medir. Se espera que al final de la implementación de la secuencia los estudiantes hayan perfeccionado sus técnicas de medición longitudes y ángulos.

9.3 Secuencia de tareas

La aplicación de la secuencia se pensó inicialmente por sesiones, pues se suponía la disposición de por lo menos dos horas de clase (100 minutos) por cada sesión. Las horas se redujeron a una sola semanalmente. Esto condujo a una serie de ajustes tanto estructurales como logísticos: generación de horarios extracurriculares, unificación de tareas y supresión del uso de la herramienta computacional en algunas de ellas. Ciertas tareas no se alcanzaron a desarrollar en una sola sesión de clase. Aun así la aplicación se tardó un periodo escolar (3 meses aproximadamente).

Por las razones expuestas se decidió abordar la descripción y el análisis a partir de las unidades presentadas en las tablas 9-12.

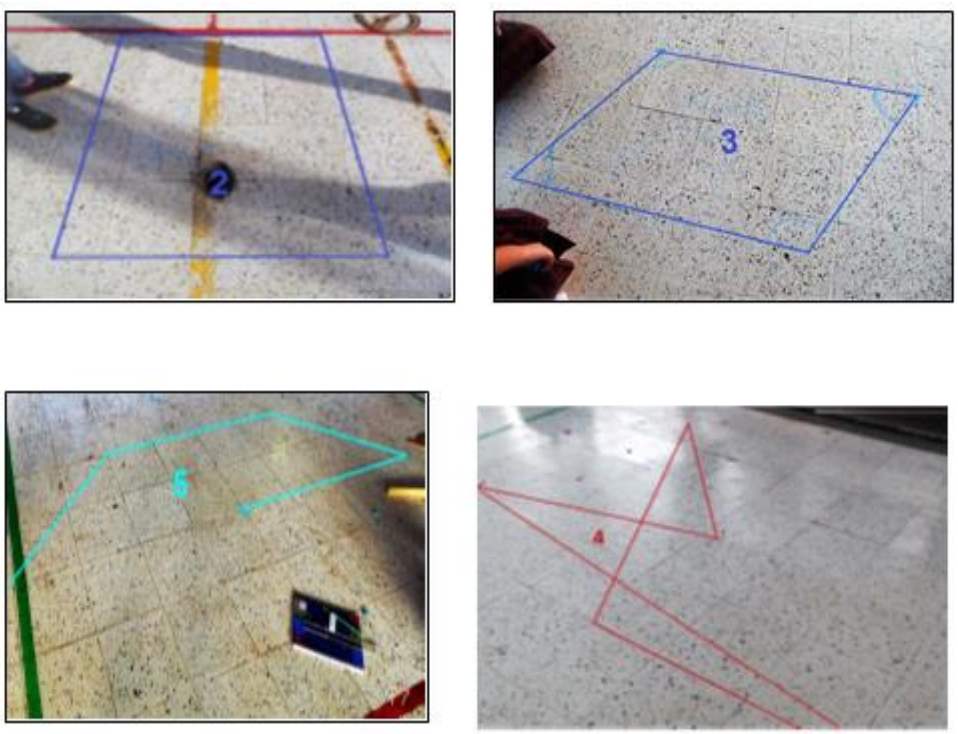
9.3.1 Definición del concepto de cuadrilátero

La tarea 3 es un ejercicio de orientación y construcción que tiene el propósito de hacer emerger los cuadriláteros como el resultado de la modelación geométrica del movimiento del cuerpo ante el seguimiento de una instrucción. Los estudiantes, intentaron seguir, paso a paso, las consignas del trabajo, que iban desde la conformación de equipos de tres o cuatro integrantes y la asignación de roles (caminante, dibujante y guía), hasta la ejecución de movimientos y su respectiva demarcación en el piso. Al final, hicieron una representación en papel de la trayectoria demarcada en el piso.

De los nueve equipos que participaron en la actividad, seis construyeron figuras geométricas muy cercanas a las pretendidas y uno tuvo una aproximación aceptable. Es de resaltar que, cinco de estas seis figuras correspondían a cuadriláteros conocidos por los estudiantes (cuadrados, rectángulos y paralelogramos). Los tres equipos restantes debían construir figuras que no eran cuadriláteros, dos de ellas tenían un mayor nivel de dificultad, puesto que contenían en sus instrucciones giros en sentidos opuestos.

La figura 15 muestra algunas imágenes de las construcciones hechas por los estudiantes. Se pueden cuadriláteros, pero también figuras rectilíneas que no satisfacen las propiedades de los cuadriláteros:

Figura 15. Muestra de las construcciones geométricas hechas sobre el piso.



Con relación a estas construcciones se pudo observar que:

- Todos los equipos se tardaron entre 5 y 10 minutos leyendo las consignas de la tarea y aun así, necesitaron de la intervención del docente para iniciar su construcción. Evidenciándose así el desconocimiento de los estudiantes sobre el tipo de tarea que se les estaba proponiendo.

- Todos los equipos tuvieron dificultad para orientarse en el espacio. Esto se evidenció más en los momentos en que, durante el recorrido, el caminante debía girar en cierto sentido (a favor o en contra de las manecillas del reloj).

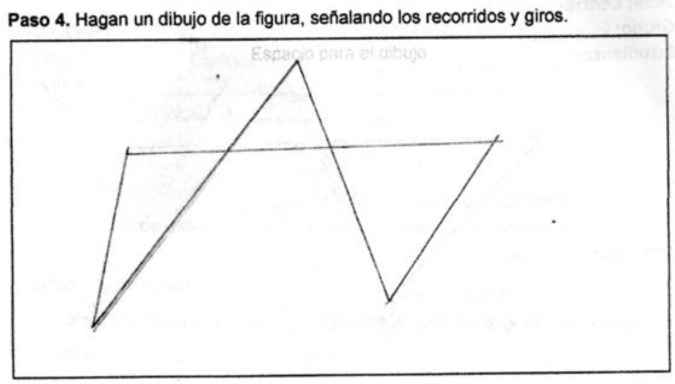
- Todos los equipos, aunque pudieron medir longitudes, tuvieron mucha dificultad para medir los ángulos de giro. Esto se evidenció en la ubicación incorrecta del graduador y en el sentido en que contaron los grados sexagesimales.

Con relación a las representaciones hechas en papel de las figuras construidas en el piso se pudo observar que:

- Todas guardan similitud con las representaciones hechas en el piso. Es de aclarar que el profesor amplió la consigna explicando que el dibujo en papel era solo una representación aproximada de la figura construida en el piso.

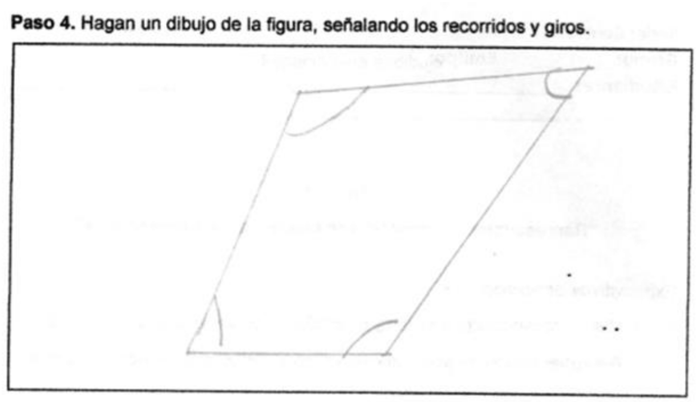
- En algunas no se indican las medidas de los recorridos ni de sus ángulos de giro, a pesar de que en la consigna se pedía que lo hicieran. La figura 16 es un ejemplo de esta situación.

Figura 16. Muestra 1 de las representaciones en papel de las figuras construidas en el piso.



- En algunas se señalan los ángulos internos de las figuras, a pesar que estos no representan los giros realizados en el proceso de construcción, este es el caso ilustrado por la figura 17.

Figura 17. Muestra 2 de las representaciones en papel de las figuras construidas en el piso.



La tarea 4 tiene como propósito que los estudiantes identifiquen las características de los cuadriláteros a partir de las figuras construidas en la práctica de recorridos y giros de la tarea 3. La actividad se inició con una retroalimentación de los trabajos que hicieron los estudiantes, resaltando sus logros, pero advirtiendo sobre sus dificultades.

En la revisión de cada una de las respuestas que dieron los estudiantes se identificaron los siguientes descriptores de significado:

Tabla 15. Descriptores de significado, tarea 4.

Tipo	Descriptores de significado
1	Muestran incoherencia entre las características que indica en la tabla y lo que expresa en el escrito.
2	Indican algunas características de cada figura, con algunos errores, pero no las expresan de forma escrita.
3	Expresan algunas características comunes entre ciertas figuras.
4	Usan la información consignada en la tabla para establecer las características comunes entre ciertas figuras, pero adicionalmente menciona características que observa directamente de las imágenes.
5	Expresan de forma coherente tres características comunes entre ciertas figuras, aunque la mayoría o todas sean incorrectas.
6	Expresan, de forma coherente, tres características comunes entre ciertas figuras, siendo la mayoría correctas.
7	Expresan, de forma clara y precisa, la diferencia entre las figuras que son cuadriláteros y las que no lo son.

Cuatro de los 7 equipos dieron respuestas tipo 5, 6 y 7, dos dieron respuestas tipo 3 y solo uno, de tipo 2. Esto representó un avance con relación a lo observado en el desarrollo de la prueba diagnóstico.

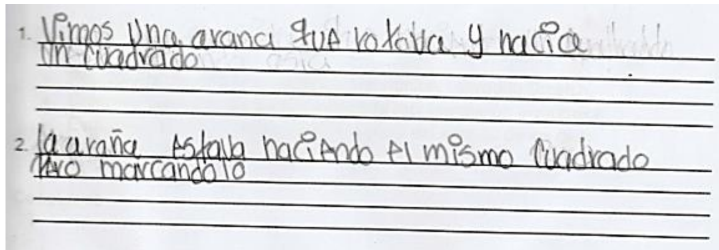
Al final se confrontaron los significados compartidos por los estudiantes y se acordó una definición para los cuadriláteros. Ésta quedó consignada en los cuadernos de los estudiantes.

9.3.2 Uso de Scratch

La tarea 5 inició con la presentación de diez diapositivas, en donde el estudiante, como meta de aprendizaje, debía representar algorítmicamente cuadriláteros utilizando la herramienta Scratch. En la presentación se mostró el recorrido de un insecto, primero describiendo el movimiento de un cuadrilátero sin trayectoria y luego, describiéndolo con trayectoria. Cabe anotar que los recorridos y giros ya se habían trabajado en la tarea 3, vuelven para ser representados por un objeto en un plano desde la herramienta Scratch. Ambas descripciones fueron anotadas por cada estudiante en la hoja de registro. Luego, se les entregó una serie de bloques de construcción en papel cuyas instrucciones debían organizarse de forma concatenada para tratar de representar el cuadrado solo con instrucciones de pasos y giros en sentido o no de las manecillas del reloj.

En el desarrollo de los ítems 1 y 2 se observó que la mayoría de los estudiantes hicieron la descripción del movimiento del insecto de manera muy general. Unos manifestaron que el insecto se mueve “haciendo un cuadrado” (figura 18), otros, fueron un poco más descriptivos, diciendo que se mueve “haciendo un movimiento recto luego llega a un punto y gira…” (figura 19). Unos pocos especificaron la medida de los ángulos de giro y uno que otro dijo simplemente que el insecto se desplazó.

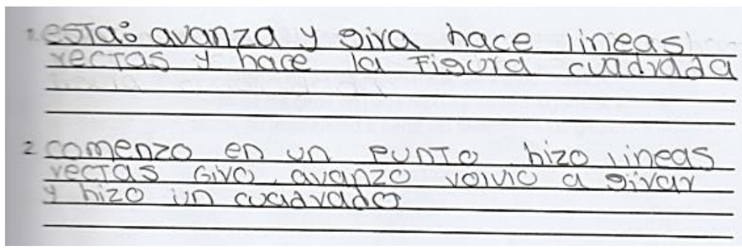
Figura 18. Muestra 1 de la descripción del movimiento del insecto.



1. Vimos Una arana que rotava y hacia un cuadrado

2. la araña estaba haciendo el mismo cuadrado pero marcandolo

Figura 19. Muestra 2 de la descripción del movimiento del insecto.



1. esta avanza y gira hace lineas rectas y hace la figura cuadrada

2. comenzo en un punto hizo lineas rectas giro, avanzo volvio a girar y hizo un cuadrado

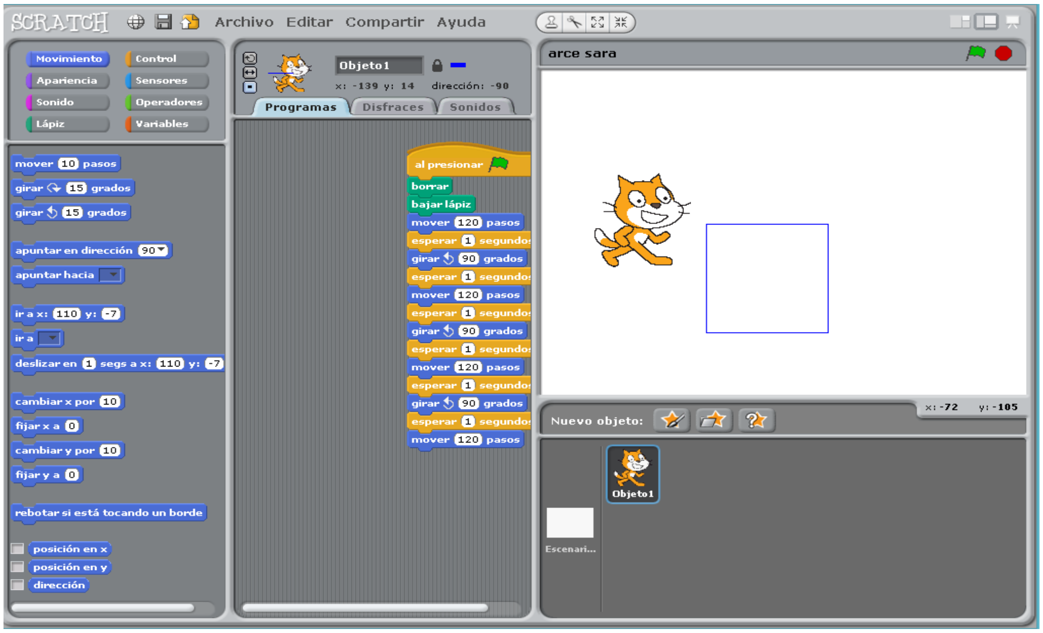
En el desarrollo de la tarea se observó que, 16 estudiantes cumplieron con el propósito de armar, con bloques de papel, la secuencia correcta del algoritmo del cuadrado (figura 20), 2 estudiantes lo hicieron parcialmente, al faltarle algunos bloques para terminar el dibujo; 2 estudiantes no cumplieron con el objetivo de la actividad puesto que equivocaron la secuencia alternada entre recorrido y giro, dejando dos giros consecutivos y, un estudiante no la presentó.

Figura 20. Muestra del encadenamiento de bloques de Scratch para construir un cuadrado.

Al avanzar con la presentación, se mostraron los comandos o bloques con los que opera Scratch necesarios para la representación algorítmica y luego el escenario en donde se hicieron los dibujos. Se les pidió que arrastrando los bloques similares a la construcción anterior en papel, lo puedan hacer y a la vez, puedan comprobar el algoritmo con la figura exacta de un cuadrado. Al final, cada estudiante guardó su tarea en registro multimedia.

En la práctica con Scratch, 19 estudiantes hicieron la representación del cuadrado teniendo en cuenta la utilización de todos los bloques y comandos de construcción y la grabaron en registro multimedia (figura 21), 2 estudiantes hicieron parte de la representación con algunos bloques de construcción, pero no construyeron la figura en su totalidad; 1 estudiante no asistió.

Figura 21. Muestra de la construcción de un cuadrado en Scratch.



En términos generales se puede decir que la gran mayoría de los estudiantes, al culminar esta tarea, lograron hacer uso de Scratch para reproducir un cuadrado.

9.3.3 Clasificación 1: Cuadriláteros convexos y cóncavos

En la tarea 6, los estudiantes debían representar de forma algorítmica tres cuadriláteros, dos de ellos convexos y otro cóncavo, utilizando Scratch. Antes de la representación, los estudiantes debían medir con la regla y el graduador las longitudes de los lados y sus ángulos de giro, especificando el sentido de los giros (si eran en el mismo sentido o contrario a las manecillas del reloj) de los cuadriláteros propuestos.

Después de hacer las mediciones, 6 estudiantes cumplieron con el propósito, 14 estudiantes lo cumplieron parcialmente, presentándose dificultades en las medidas de algunos ángulos o en la medición de los lados y, 2 estudiantes no cumplieron con el propósito debido a la poca información que anotaron en los registros de medición o porque equivocaron las medidas o el sentido de los ángulos.

Una vez observados y analizados los registros multimedia, en relación la representación algorítmica de tres cuadriláteros utilizando Scratch, 3 estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje (figura 22); 13 estudiantes cumplieron parcialmente al no entregar todos los registros multimedia o equivocarse en alguno de los tres cuadriláteros (figura 23) y, 6 estudiantes no cumplieron la expectativa al no mostrar un registro multimedia acorde con las figuras originales o que no mostraron registro alguno (figura 24).

Figura 22. Muestra 1 de la construcción de cuadriláteros en Scratch.

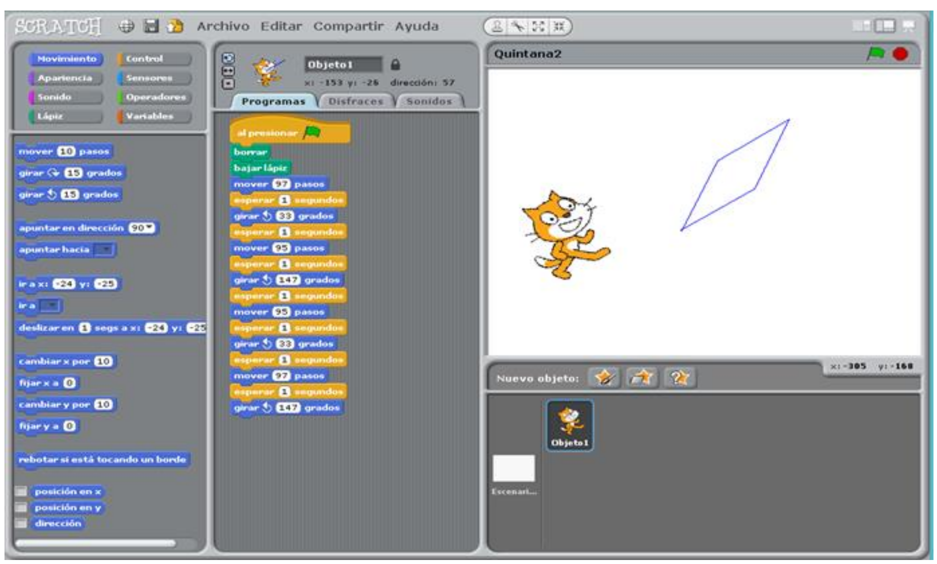


Figura 23. Muestra 2 de la construcción de cuadriláteros en Scratch

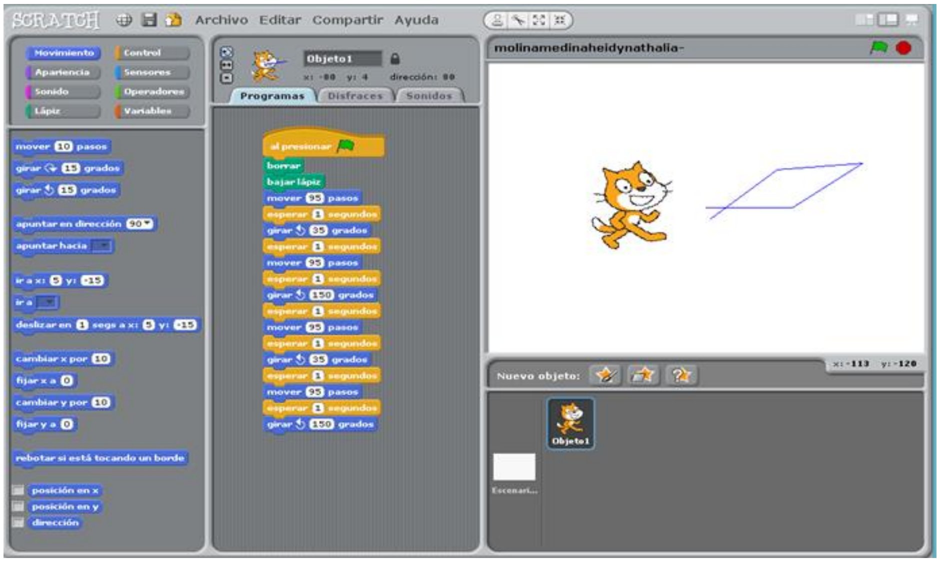
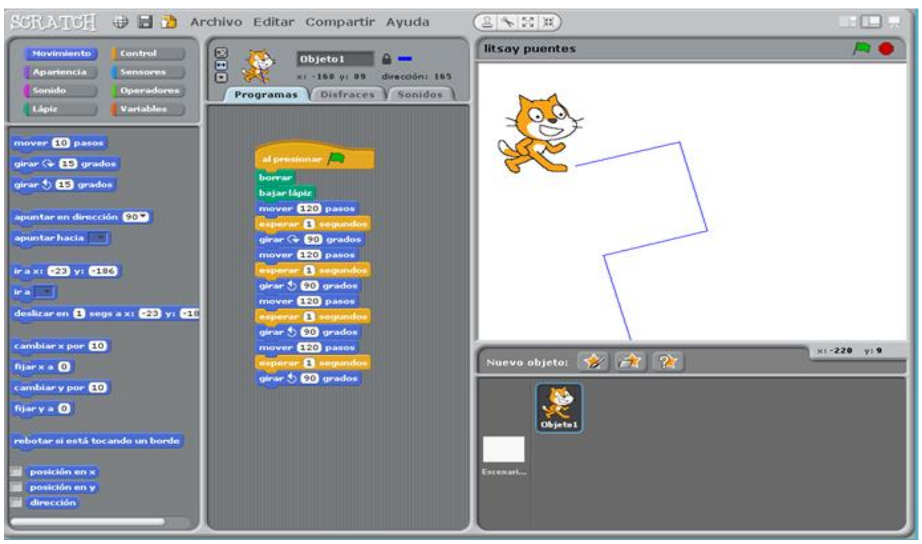


Figura 24. Muestra 3 de la construcción de cuadriláteros en Scratch



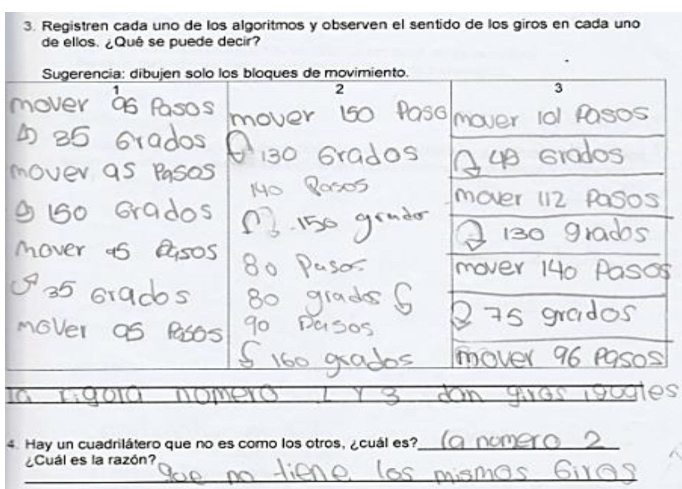
Para los ítems 3 y 4, correspondientes a la identificación de patrones de regularidad para establecer diferencias entre los cuadriláteros, se identificaron los siguientes descriptores de significado:

Tabla 16. Descriptores de significado, ítems 3 y 4, tarea 5.

Tipo	Descriptores de significado
1	----------------
2	Representa algorítmicamente los cuadriláteros, pero no dice nada sobre esta representación ni identifica el cuadrilátero diferente.
3	Representa algorítmicamente los cuadriláteros e identifica el cuadrilátero diferente, pero no expresa un criterio que lo justifique.
4	Representa algorítmicamente los cuadriláteros, señala el cuadrilátero incorrecto, pero expresa el criterio del sentido de los giros para justificarlo.
5	----------------
6	Identifica el cuadrilátero diferente justificando su elección a partir del criterio del sentido de los giros, pero con imprecisiones en el lenguaje.
7	----------------

Con relación a estos ítems se encontró que poco menos de la mitad de los estudiantes expresaron significados tipo 6, presentando imprecisiones de lenguaje al decir “giros iguales” o “los mismos giros” en vez de referirse al sentido de los giros, como se puede observar en la figura 25. El resto tuvieron dificultad para expresar significado, limitándose a elegir la figura diferente o simplemente a no decir nada.

Figura 25. Muestra de significados tipo 6, ítems 3 y 4, tarea 6.



3. Registren cada uno de los algoritmos y observen el sentido de los giros en cada uno de ellos. ¿Qué se puede decir?

Sugerencia: dibujen solo los bloques de movimiento.

1	2	3
mover 96 Pasos 35 Grados mover 95 Pasos 150 Grados mover 45 Pasos 35 Grados mover 95 Pasos	mover 150 Pasos 130 Grados 140 Pasos 150 grados 80 Pasos 80 grados 90 Pasos 160 grados	mover 101 Pasos 48 Grados mover 112 Pasos 130 grados mover 140 Pasos 75 grados mover 96 Pasos

la figura numero 1 y 3 son giros iguales

4. Hay un cuadrilátero que no es como los otros, ¿cuál es? la numero 2

¿Cuál es la razón? que no tiene los mismos Giros

En la tarea 7, los estudiantes debían agrupar cuadriláteros a partir del criterio del patrón de regularidad estudiado en la tarea 6, y formular definiciones para cuadriláteros cóncavos y convexos y finalmente, explicar de forma escrita las razones de su definición.

En el primer punto de la tarea 7, 19 estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje y tan solo 3 estudiantes no tuvieron registro y por ende no cumplieron con la meta propuesta de clasificar cuadriláteros cóncavos y convexos de acuerdo a un patrón de giro establecido.

Con relación al ítem 2, que perseguía la concreción de la definición de cada uno de los cuadriláteros estudiados en la tarea anterior, se observó que la gran mayoría completaron las frases acorde a lo esperado, es decir que, definieron correctamente cuadriláteros cóncavos y cuadriláteros convexos. El resto lo hizo de forma parcial, confundiendo algunos términos.

En términos generales se puede decir que la mayoría de los estudiantes, al culminar estas dos tareas, lograron, con la ayuda de Scratch, clasificar los cuadriláteros en cóncavos y convexos a partir del criterio del sentido de los giros.

9.3.4 Clasificación 2: Trapecios y trapezoides

En la tarea 8, los estudiantes debían representar algorítmicamente tres cuadriláteros convexos, identificar patrones de regularidad, asociar estos patrones al criterio de complementariedad de giros sucesivos (paralelismo) y por último, clasificarlos en trapecios y trapezoides.

Observados y analizados los registros del primer ítem, resultó que 16 estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje, midiendo correctamente las longitudes de los lados y el giro de los ángulos exteriores; 5 estudiantes cumplieron parcialmente al no hacer los registros completos, trazar erróneamente los ángulos exteriores (figura 26) o confundir la unidad.

Para el ítem 2, se observó que 13 estudiantes cumplieron con la meta de aprendizaje, al representar algorítmicamente los tres cuadriláteros y realizar las sumas de las medidas de los ángulos de giro sucesivos (figura 27). Se observó también que 4 estudiantes cumplieron parcialmente, al no realizar la representación de alguno de los cuadriláteros y que el resto no cumplieron, puesto que los registros de las medidas de los ángulos no se hicieron adecuadamente.

Figura 26. Muestra de representación errónea de ángulos de giro, tarea 8.

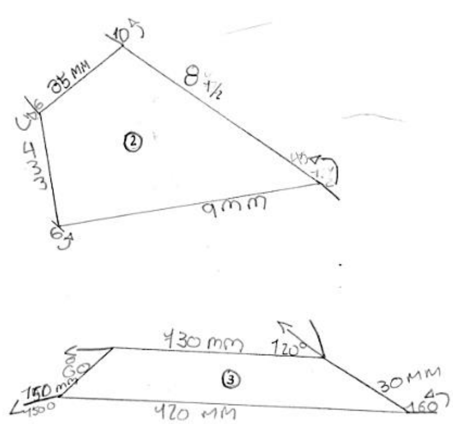
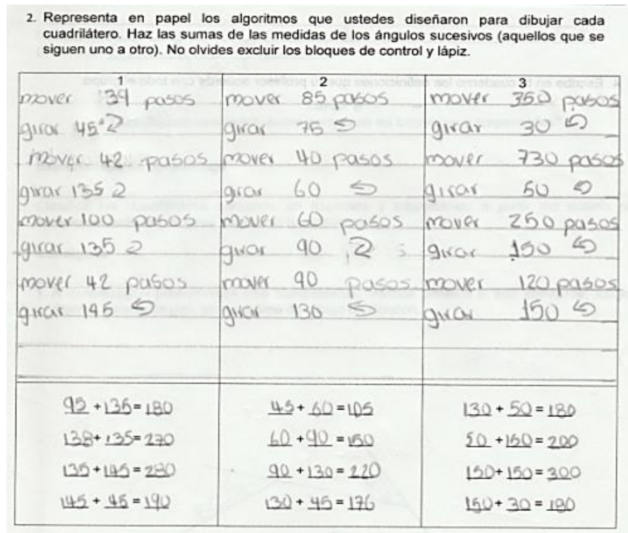


Figura 27. Muestra de representación algorítmica de trapecios, tarea 8.



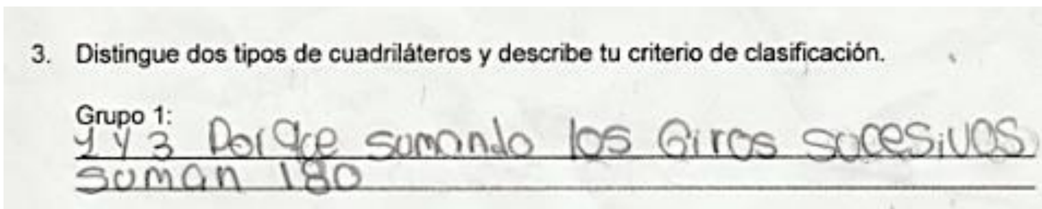
En la revisión de respuestas al ítem 8, se identificaron los siguientes descriptores de significado:

Tabla 17. Descriptores de significado ítem 3, tarea 8.

Tipo	Descriptores de significado Ítem 3
1	--------------------
2	Agrupamiento y argumentos incorrectos
3	Se argumenta que las figuras 1 y 3 se parecen por su forma o agrupan correctamente sin justificar la respuesta.
4	---------------------
5	Se argumenta erradamente que las figuras 1 y 3 se diferencian de la figura 2 porque todos sus ángulos de giro suman 360º.
6	Se argumenta que las figuras 1 y 3 comparten la propiedad de tener los mismos resultados.
7	Se argumenta que las figuras 1 y 3 comparten la propiedad de tener al menos una pareja de ángulos sucesivos cuya suma de sus medidas es igual a 180º

En el desarrollo de este ítem se observó que solo 6 estudiantes expresaron significados tipo 6 o 7, es decir que identificaron el criterio de complementariedad de ángulos sucesivos para clasificar los cuadriláteros convexos (figura 28); reflejando de esta manera un razonamiento de nivel 2. Se encontró también que 9 estudiantes expresaron significados tipo 3, con frases como las que exhibe la figura 29; reflejando de esta manera un razonamiento de nivel 1. El resto no respondió este ítem, dado que no habían desarrollado el anterior.

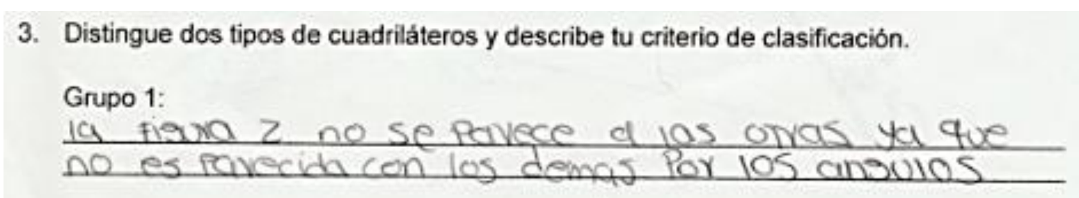
Figura 28. Muestra de significado tipo 6, ítem 3, tarea 8.



3. Distingue dos tipos de cuadriláteros y describe tu criterio de clasificación.

Grupo 1: y y 3 Porqe sumando los Giros sucesivos
suman 180

Figura 29. Muestra de significado tipo 3, tarea 8.



3. Distingue dos tipos de cuadriláteros y describe tu criterio de clasificación.

Grupo 1:
la figura 2 no se parece a las otras ya que
no es parecida con los demas por los angulos

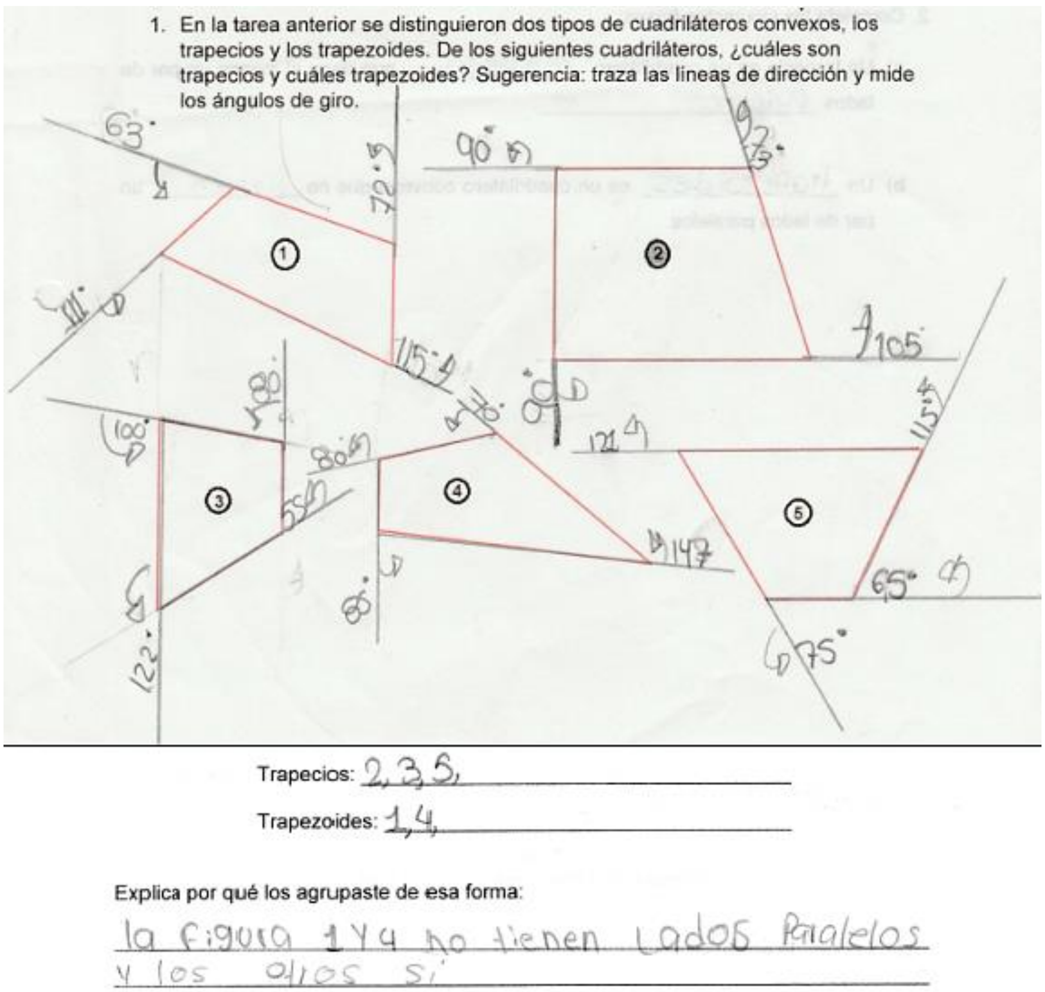
En la tarea 9 los estudiantes debían aplicar el criterio estudiado en la tarea 8 para agrupar cuadriláteros y formular definiciones para trapecios y trapezoides. Con relación al ítem 1 se identificaron los siguientes descriptores de significado.

Tabla 18. Descriptores de significado, ítem 1, tarea 9. Elaboración propia.

Tipo	Descriptores de significado Ítem 1
1	----------------
2	No agrupa correctamente los cuadriláteros en trapecios y trapezoides pero en la explicación del criterio evidencia razonamiento de nivel 1.
3	Agrupa correctamente los cuadriláteros en trapecios y trapezoides pero no se evidencia el criterio en su explicación.
4	Agrupa correctamente los cuadriláteros en trapecios y trapezoides, a partir de la observación, pero su explicación a pesar de estar referida a ciertas propiedades no es
5	-----------------
6	Menciona el criterio de paralelismo en la justificación de la clasificación y a pesar de que se evidencia el uso de medición, el lenguaje no es preciso.
7	Menciona el criterio de paralelismo en la justificación de la clasificación y se evidencia el uso de la medición para corroborar este criterio.

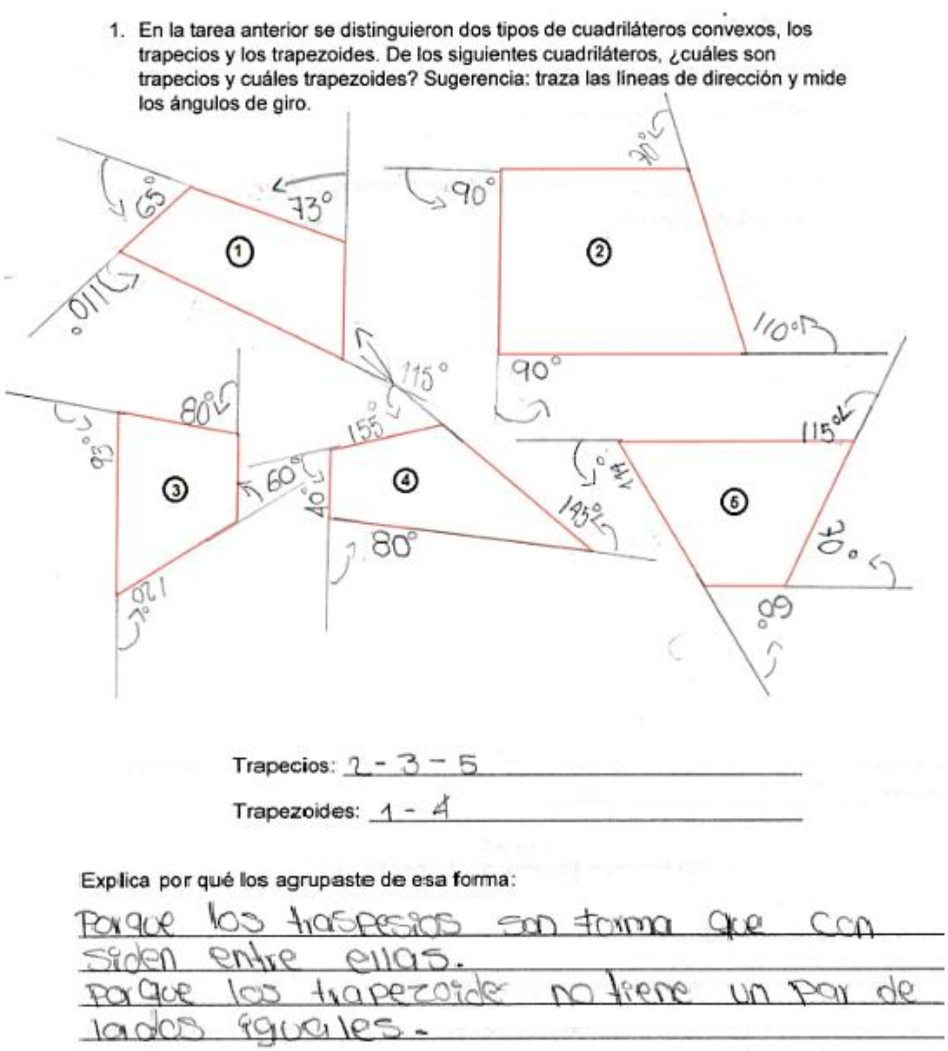
En el registro de las actividades de los estudiantes se observó que la mitad de ellos expresaron significados tipo 6 o 7, usando el criterio en mención para clasificar los cuadriláteros convexos en trapecios y trapezoides; reflejando así un razonamiento de nivel 2 (figura 30).

Figura 30. Muestra de significado tipo 7, ítem 1, tarea 9



Se observó también que 3 estudiantes expresaron significados tipo 4, agrupando correctamente los cuadriláteros convexos, pero con dificultades para identificar y expresar el criterio en mención. Las dificultades con el lenguaje se ilustran en la figura 31, con expresiones como “no tienen lados iguales” para significar el paralelismo entre lados.

Figura 31. Muestra de significados tipo 4, ítem 1, tarea 9.



Con relación al ítem 2, se observó que un poco más de la mitad de los estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje, al completar correctamente las frases de definición de trapecios y trapezoides. También se observó que 4 estudiantes cumplieron parcialmente, al omitir o confundir los términos y, que 4 estudiantes no cumplieron, al no evidenciarse el registro escrito correspondiente.

En resumen, se puede afirmar que al finalizar estas dos tareas, la mayoría de los estudiantes logró clasificar cuadriláteros convexos en trapecios y trapezoides. Que aquello que causó dificultad en la tarea 8 (medición de ángulos de giro), se logró superar en la mayoría de los estudiantes, a pesar que presentan debilidades en el lenguaje.

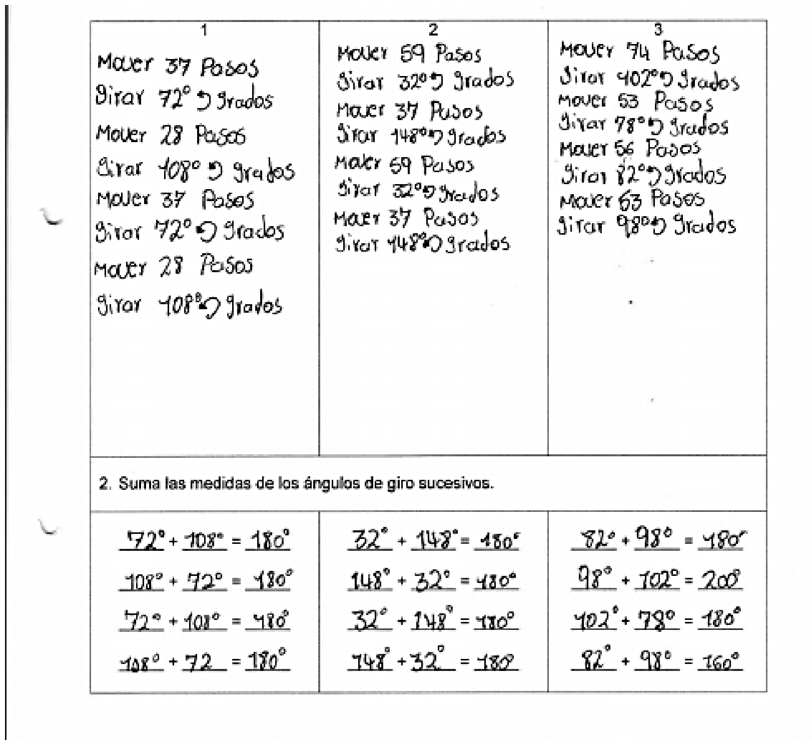
9.3.5 Clasificación 3: Paralelogramos y trapecios no-paralelogramos

Con relación a la tarea 10:

Para los ítems 1 y 2, los estudiantes debían representar en algunos trapecios, la complementariedad en dos parejas de giros sucesivos, asociándola con la propiedad del paralelismo entre lados (cuya suma de ángulos debía ser de 180º).

Haciendo el análisis de respuestas, 17 estudiantes realizaron la expectativa de aprendizaje, identificando la complementariedad de parejas de giros sucesivos (Figura 32).

Figura 32. Muestra 1 de respuestas a los ítems 1 y 2, tarea 10.



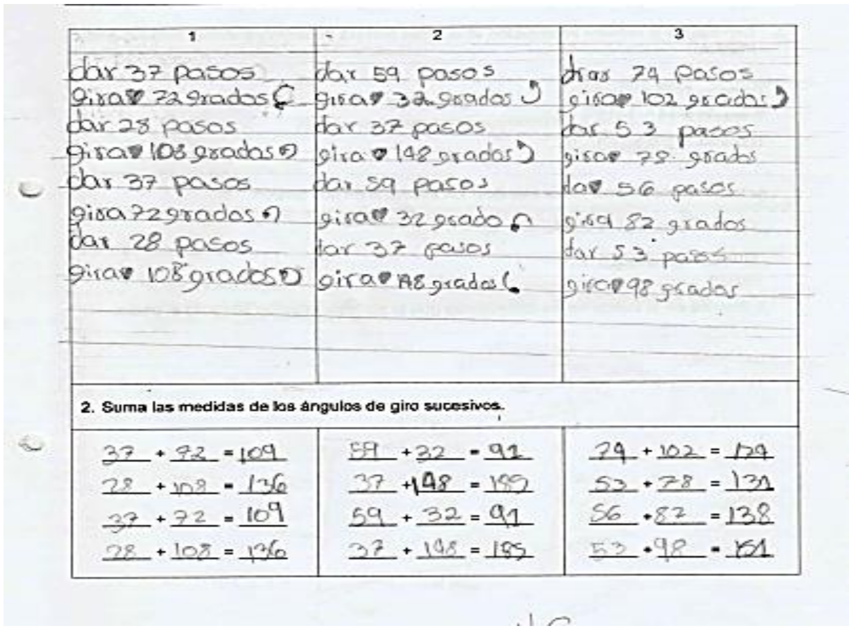
1	2	3
Mover 37 Pasos Girar 72° grados Mover 28 Pasos Girar 108° grados Mover 37 Pasos Girar 72° grados Mover 28 Pasos Girar 108° grados	Mover 59 Pasos Girar 32° grados Mover 37 Pasos Girar 148° grados Mover 59 Pasos Girar 32° grados Mover 37 Pasos Girar 148° grados	Mover 74 Pasos Girar 102° grados Mover 53 Pasos Girar 78° grados Mover 56 Pasos Girar 82° grados Mover 63 Pasos Girar 98° grados

2. Suma las medidas de los ángulos de giro sucesivos.

72° + 108° = 180° 108° + 72° = 180° 72° + 108° = 180° 108° + 72 = 180°	32° + 148° = 180° 148° + 32° = 180° 32° + 148° = 180° 148° + 32° = 180	82° + 98° = 180° 98° + 102° = 200° 102° + 78° = 180° 82° + 98° = 160°

Continuando con el análisis, 5 estudiantes no cumplieron con la expectativa de aprendizaje, 3 de los cuales realizaron la sumatoria de ángulos y lados indiscriminadamente, (figura 33), un estudiante hizo mal las sumatorias de ángulos y un estudiante no hizo registro para valorar la actividad.

Figura 33. Muestra 2 de respuestas a los ítems 1 y 2, tarea 10.



1	2	3
dar 37 pasos	dar 59 pasos	dar 74 pasos
gira 72 grados	gira 32 grados	gira 102 grados
dar 28 pasos	dar 37 pasos	dar 53 pasos
gira 108 grados	gira 148 grados	gira 78 grados
dar 37 pasos	dar 59 pasos	dar 56 pasos
gira 72 grados	gira 32 grado	gira 82 grados
dar 28 pasos	dar 37 pasos	dar 53 pasos
gira 108 grados	gira 148 grados	gira 98 grados

2. Suma las medidas de los ángulos de giro sucesivos.

37 + 72 = 109	59 + 32 = 91	74 + 102 = 176
28 + 108 = 136	37 + 148 = 185	53 + 78 = 131
37 + 72 = 109	59 + 32 = 91	56 + 82 = 138
28 + 108 = 136	37 + 148 = 185	53 + 98 = 151

En los ítems 3 y 4, los estudiantes debían clasificar trapecios a partir del criterio de complementariedad en dos parejas de giros sucesivos. En las respuestas a estos ítems se observó que, 16 estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje, identificando el criterio de complementariedad de dos parejas de giros sucesivos, 3 estudiantes cumplieron parcialmente la meta de aprendizaje, al realizar la clasificación parcialmente y, 3 estudiantes no cumplieron con el propósito de la tarea.

Con relación a la tarea 11:

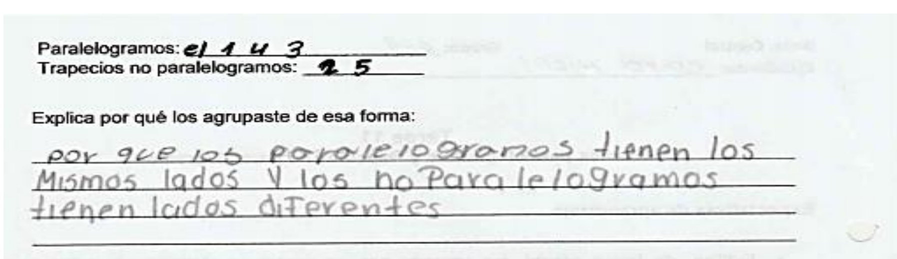
En el ítem 1, los estudiantes debían agrupar los trapecios en paralelogramos y trapecios no-paralelogramos, explicando las razones de esa agrupación, para lo cual se identificaron los siguientes descriptores de significado:

Tabla 19. Descriptores de significado, ítem 1, tarea 11. Elaboración propia.

Tipo	Descriptores de significado
1	---------------
2	No agrupa correctamente los trapecios en paralelogramos y trapecios no-paralelogramos pero en la explicación del criterio evidencia razonamiento de nivel 1.
3	Agrupa correctamente los trapecios en paralelogramos y trapecios no-paralelogramos pero no se evidencia el criterio en su explicación.
4	Agrupa correctamente los trapecios en paralelogramos y trapecios no-paralelogramos, pero su explicación a pesar de estar referida a ciertas propiedades no es satisfactoria.
5	Aunque la forma de agrupar no es la esperada, intenta explicar el criterio usado.
6	Menciona el criterio de congruencia de lados opuestos en la justificación de la clasificación, pero usando un lenguaje impreciso.
7	Menciona el criterio de paralelismo en la justificación de la clasificación y se evidencia el uso de la medición para corroborar este criterio.

En el desarrollo de este ítem se observó que 13 estudiantes expresaron significados tipo 6, en los cuales las explicaciones sobre el criterio de clasificación utilizado son correctas, pero con imprecisiones en el lenguaje al sustituir lados paralelos por “mismos lados” y lados no paralelos por “lados diferentes” (Figura 34).

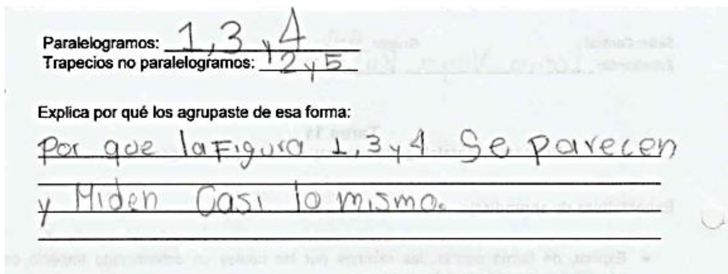
Figura 34. Muestra de significados tipo 6, ítem 1, tarea 10.


Paralelogramos: el 1 4 3
Trapecios no paralelogramos: 2 5

Explica por qué los agrupaste de esa forma:
por que los paralelogramos tienen los Mismos lados y los no Paralelogramos tienen lados diferentes

Los demás estudiantes, tuvieron dificultad para expresar significado, circunscribiéndose a la clasificación adecuada pero a partir del “parecido” es decir, sólo a partir de la visualización sin definir los criterios requeridos (figura 35).

Figura 35. Muestra de significados tipo 3, ítem 1, tarea 11.



Paralelogramos: 1, 3 y 4
Trapecios no paralelogramos: 2 y 5

Explica por qué los agrupaste de esa forma:
Por que la Figura 1, 3 y 4 Se parecen
y Miden Casi lo mismo.

En el ítem 2, los estudiantes debían explicar en forma escrita, las razones por las cuales un determinado trapecio es paralelogramo o trapecio no-paralelogramo. Al revisar los registros se encontró que, 8 estudiantes cumplieron con la expectativa de aprendizaje al completar las definiciones de paralelogramos y trapecios no-paralelogramos, 10 estudiantes cumplieron parcialmente, al contestar de manera incompleta una de las dos frases o en vez de utilizar el término paralelo, lo sustituyen por “iguales” y 2 estudiantes confundieron la definición.

Para resumir se puede decir que la mayoría de los estudiantes logró realizar prácticas significativas en relación a la clasificación de trapecios en paralelogramos y trapecios no-paralelogramos, a partir del criterio de complementariedad de parejas de giros sucesivos, aunque con lenguaje todavía con imprecisiones.

9.3.6 Clasificación 4 y 5: Rectángulos y paralelogramos no-rectángulos/ Cuadrados y rectángulos no-cuadrados

Para esta sesión se obvió la representación algorítmica, considerando que los rectángulos y los cuadrados eran cuadriláteros más familiares para los estudiantes, así que solo se trabajó desde los registros figurales. Una vez institucionalizado el significado de paralelogramo y de haber reconocido al rectángulo como un caso especial de paralelogramo, se instó a los estudiantes a hacer la diferenciación entre un rectángulo y un paralelogramo no-rectángulo y, con base a esta información, a formular una definición que tuviese en cuenta el hecho de los rectángulos forman parte de la familia de los paralelogramos. Algo similar se propuso para la definición de los cuadrados.

En la tabla 20 se presentan los descriptores de significado que se hallaron al revisar el trabajo de los estudiantes.

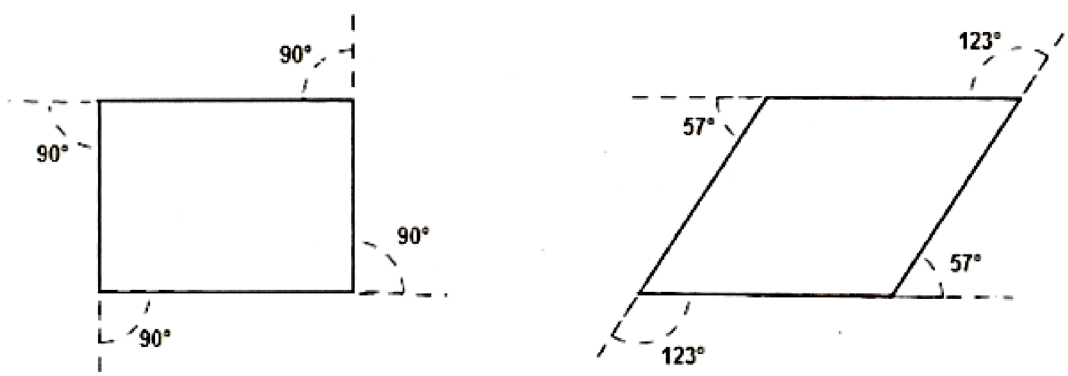
Tabla 20. Descriptores de significado de la tarea 12. Elaboración propia.

	Rectángulos		Cuadrados	
Tipo	Diferenciación	Definición	Diferenciación	Definición
1	------	Respuestas incoherentes o que no tienen nada que ver con el ítem.	------	------
2	Establecen como criterio de diferenciación cualidades que no son pertinentes, como: lados cortos, figura derecha, etc.	Respuestas totalmente incorrectas, pero coherentes.	Respuestas totalmente incorrectas.	Se mencionan características que los cuadrados efectivamente no tienen.
3	Recurren a criterios de diferenciación someros, como el tener medidas o formas diferentes	Recurren a algo que, según la clasificación particional y el nivel 1 de Van Hiele, puede ser cierto, pero que no es en sí una definición de rectángulo en los niveles 2 y 3.	Respuestas que, según la clasificación particional y el nivel 1 de Van Hiele, son ciertas, pero que no van al detalle de la diferenciación, como: el de la izquierda es un cuadrado y el otro es un rectángulo.	Solo se menciona una característica propia de los cuadrados.
4	Mezclan criterios de diferenciación someros con otros más precisos, como: tener los ángulos con medidas diferentes.	Establecen una relación de inclusión con los paralelogramos pero recurren de nuevo a razonamientos de nivel 1.	Respuestas que no admiten que un cuadrado sea también un rectángulo y establecen criterios de diferenciación en referencia al tamaño de sus lados, mediante expresiones como: tiene dos lados largos y dos cortos.	Hay mención de otros cuadriláteros pero las propiedades señaladas no son suficientes para una definición satisfactoria.
5	Recurren a criterios más complejos, como: la complementariedad de los ángulos sucesivos; pero equivocados.	----------	Respuestas que admiten que ambos cuadriláteros son rectángulos, pero al establecer las diferencias incurren en errores.	
6	Recurren al criterio de perpendicularidad o de congruencia de ángulos, pero con alguna imprecisión.	Establecen relaciones de inclusión, les falta precisar más las características que los hace diferentes.	Respuestas que recurren a la congruencia de lados para establecer la diferencia entre ambos cuadriláteros.	Se afirma los cuadrados son rectángulos, pero no se dan más características.
7	--------	---------	Respuestas que admiten que ambos cuadriláteros son rectángulos pero que se diferencian en la congruencia de los lados.	Se afirma que los cuadrados son rectángulos que tienen sus lados congruentes entre sí. Se afirma que los cuadrados son paralelogramos que tienen sus lados congruentes entre si y sus ángulos de giro son rectos.

Con relación a la diferenciación entre rectángulos y paralelogramos no-rectángulos, se observó que 10 de 22 estudiantes dieron respuesta tipo 6 y 2 dieron respuestas tipo 5. Lo que quiere decir, que más de la mitad del grupo razonó de acuerdo a los parámetros del nivel 2. En este proceso también se observó que 6 estudiantes respondieron según el descriptor tipo 4, reflejando de esta manera un raciocinio en etapa de transición entre los niveles 1 y 2. La figura 36 exhibe un caso de transición, donde se expresa, por un lado, la característica que sirve para hacer la diferenciación entre los dos cuadriláteros y por otro, una cualidad inherente a los razonamientos de nivel 1, la forma.

Figura 36. Muestra de significados tipo 4, ítem 1, tarea 12.

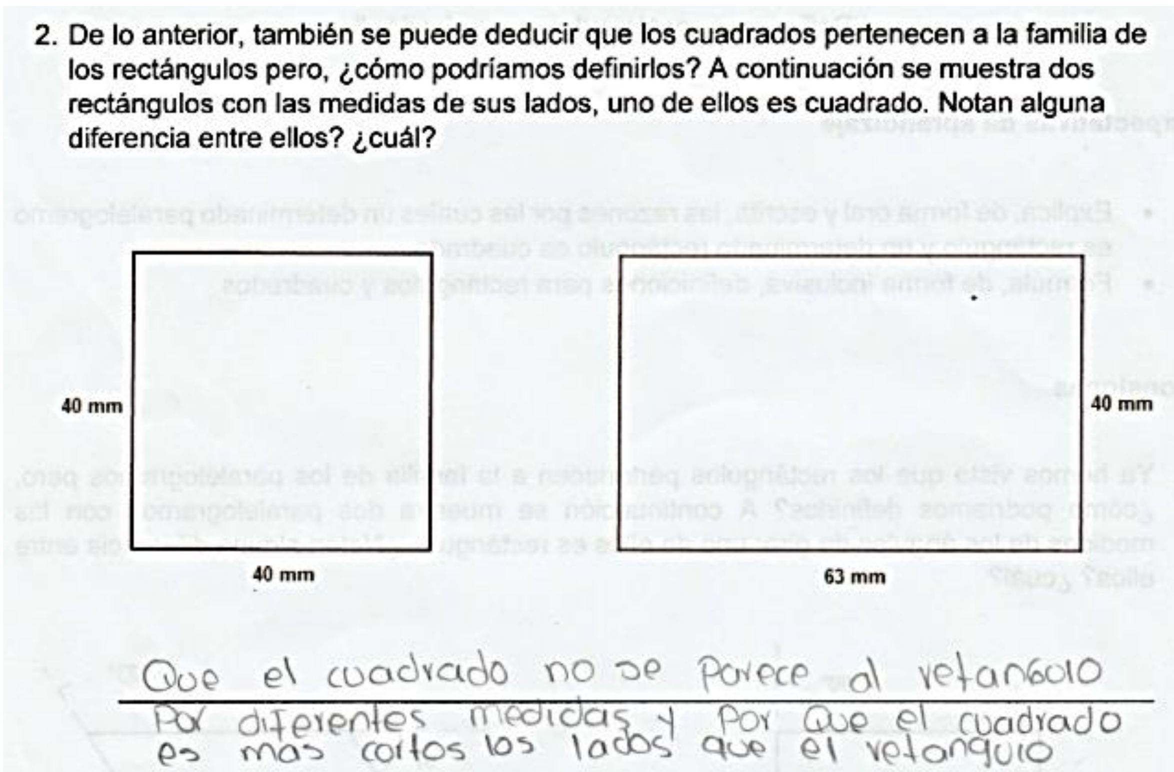
1. Ya hemos visto que los rectángulos pertenecen a la familia de los paralelogramos pero, ¿cómo podríamos definirlos? A continuación se muestra dos paralelogramos con las medidas de los ángulos de giro; uno de ellos es rectángulo. ¿Notan alguna diferencia entre ellos? ¿cuál?



La diferencia es que entre ellos tienen diferentes medidas de angulos, y tienen diferente forma

Con relación a la diferenciación entre cuadrados y rectángulos no-cuadrados, se observó que 7 estudiantes respondieron según los descriptores tipo 6 o 7 y, un estudiante dio respuesta tipo 5. Es decir, que menos de la mitad del grupo razonó de acuerdo a los parámetros del nivel 2. Se observó también que la mitad del grupo dio respuestas tipo 4 y muy pocos, respuestas tipo 2 o 3. A la mayoría de los estudiantes en este proceso se les dificultó identificar la relación entre cuadrados y rectángulos, esto se evidenció en la referencia explícita a cada uno de ellos, como se puede ver en la figura 37.

Figura 37. Muestra de significados respecto a la diferenciación, ítem 2, tarea 12.

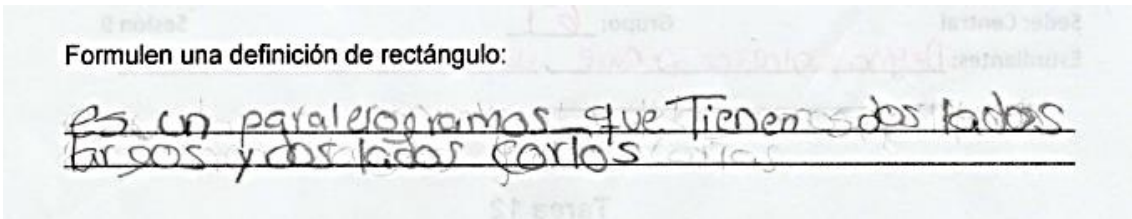


2. De lo anterior, también se puede deducir que los cuadrados pertenecen a la familia de los rectángulos pero, ¿cómo podríamos definirlos? A continuación se muestra dos rectángulos con las medidas de sus lados, uno de ellos es cuadrado. Notan alguna diferencia entre ellos? ¿cuál?

Que el cuadrado no se parece al retangolo
Por diferentes medidas y Por Que el cuadrado es mas cortos los lados que el retangulo

Con relación a la definición de rectángulo, se observó que la mayoría de los estudiantes dieron respuestas tipo 4, mostrando así avances en el desarrollo de razonamiento de nivel 3, pero con importantes falencias para precisar las características que hacen de los rectángulos una subfamilia de la familia de los paralelogramos. La figura 38 es un ejemplo de las respuesta tipo 4 que dieron los estudiantes, donde se puede ver que hay avances, cuando se dice “es un paralelogramo…”, pero a su vez retrocesos, cuando se dice “…que tienen dos lados largos y dos cortos”.

Figura 38. Muestra de significados respecto a la definición, ítem 2, tarea 12.


Formulen una definición de rectángulo:

es un paralelogramos que Tienen dos lados largos y dos lados cortos

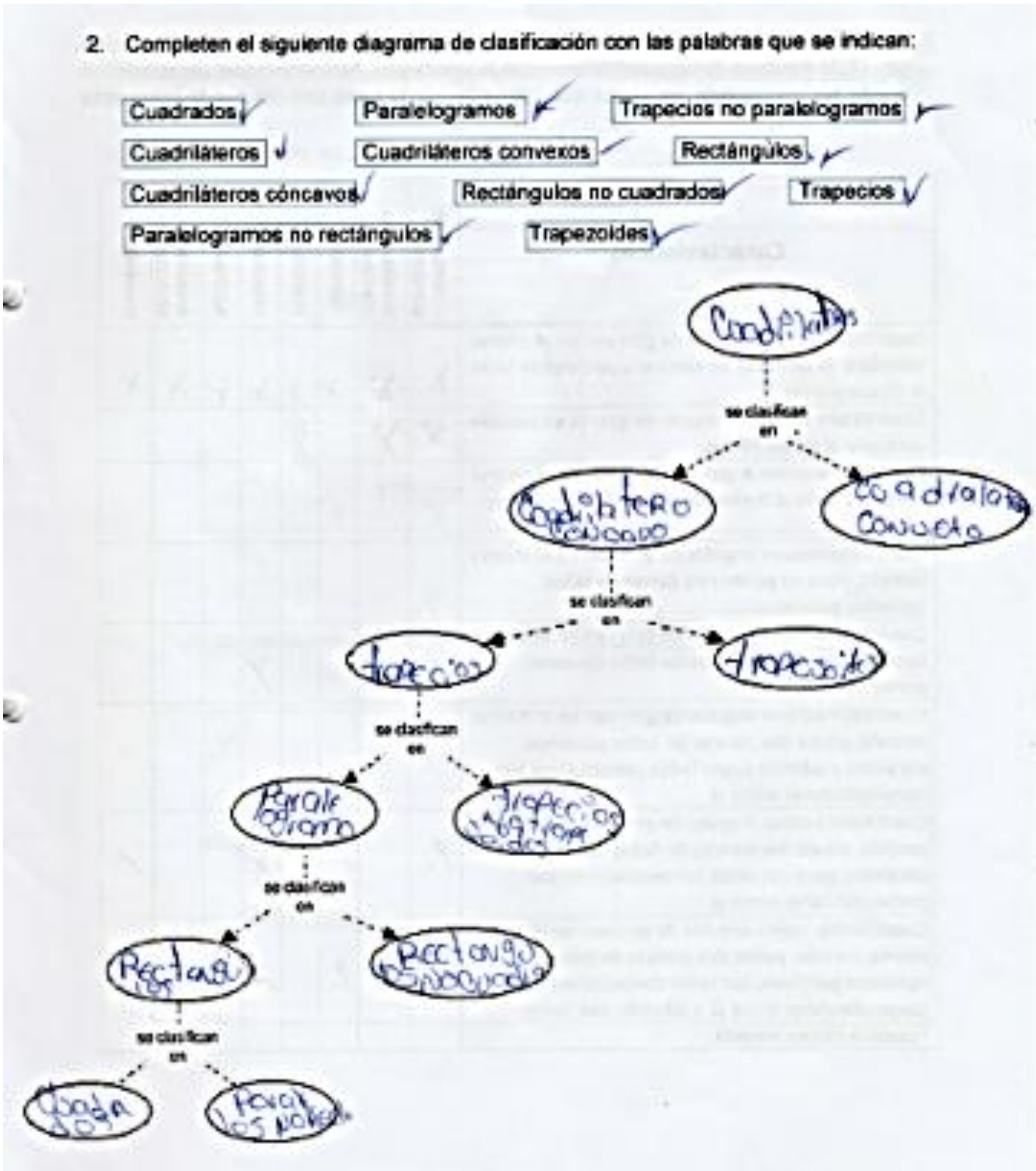
Con relación a la definición de cuadrado, se observó que la mayoría de los estudiantes logró definir el cuadrado a partir de su relación jerárquica con el rectángulo. Esta situación contrasta con lo ocurrido en el proceso de definición del rectángulo, donde a los estudiantes se les dificultó relacionar este objeto con el paralelogramo. De todas formas, lo que indica esta diferencia es una mejoría en la calidad del razonamiento de nivel 3.

9.3.7 Organización jerárquica de las clasificaciones

Los estudiantes tuvieron éxito en el desarrollo del primer ítem. Durante el proceso pidieron más ilustración sobre lo que debían hacer; después de haberlo comprendido, su desempeño en la actividad no tuvo mayores obstáculos. En el registro del diagrama sagital que representaba la organización envolvente de los cuadriláteros convexos, sólo una pareja presentó un pequeño error de escritura al confundir trapecio con trapezoide, pero, al considerar la similitud entre las dos palabras y el éxito que se tuvo con la manipulación del material concreto, pasa por alto este hecho.

La situación no fue la misma en el ítem 2, donde había que etiquetar cada una de las componentes de un diagrama arbóreo que representaba la organización jerárquica de las clasificaciones de los cuadriláteros convexos. Todas las parejas etiquetaron bien las dos primeras clasificaciones, la gran mayoría lo hizo también para la tercera clasificación, pero de ahí en adelante comenzaron a fallar, específicamente en la escritura de los nombres de los paralelogramos que no eran rectángulos (paralelogramos no-rectángulos) y los rectángulos que no eran cuadrados (rectángulos no-cuadrados). Quizá los términos usados para designar estos objetos no sean los más apropiados, pero no se tienen fundamentos para afirmarlo. Otro aspecto a resaltar es que 5 parejas lograron etiquetar, parcialmente, las dos últimas clasificaciones, al menos sin contradecir las relaciones de inclusión logradas en el ítem anterior, como se puede ver en la figura 39; 2 parejas más lo hicieron correctamente.

Figura 39. Muestra de organización jerárquica de las clasificaciones, ítem 2, tarea 13



En el ítem 3 se pretendía que los estudiantes señalaran todos los cuadriláteros que cumplieran estrictamente con las condiciones enunciadas en cada frase, pero esto no fue lo que sucedió, con excepción de la primera frase. Lo que realmente sucedió es que casi todas las parejas señalaron a los cuadriláteros convexos como si satisficieran todas o casi todas las características y a varios cuadriláteros, entre ellos, el paralelogramo y el rectángulo, como si satisficieran todas las características de los cuadrados; de ahí en adelante la tendencia fue a elegir un solo cuadrilátero para cada enunciado. Esto lo ilustra la siguiente figura:

Figura 40. Muestra de asociación entre los cuadriláteros y sus características, ítem 3, tarea 13.

Características	CUADRILÁTERO CONVEXO	CUADRILÁTERO CÓNCAVO	TRAPECIO	TRAPEZOIDE	PARALELOGRAMO	RECTÁNGULO	PARALELOGRAMO NO RECTÁNGULO	CUADRADO
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido o la cantidad de vértices coincide con la de la de sus puntas.	X		X	X	X	X	X	X
Cuadrilátero donde un ángulo de giro va en sentido contrario al de los demás.		X						
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido y tiene al menos un par de lados opuestos paralelos.	X		X					
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, pero no posee una pareja de lados opuestos paralelos.	X			X				
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido y tiene dos parejas de lados opuestos paralelos.	X			X				
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos y además cuyos lados consecutivos son perpendiculares entre si.	X				X			
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos, pero sus lados consecutivos no son perpendiculares entre si.	X					X		
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos, sus lados consecutivos son perpendiculares entre si y además, sus lados tienen la misma medida.	X		X		X	X		X

El hecho de que la gran mayoría de las parejas hayan señalado correctamente las casillas de la primera frase, es un indicador de comprensión de la consigna, pero resulta desconcertante la gran falla que hubo con el resto de frases, lo cual da pie para pensar que aún hay que seguir profundizando en este tipo de actividades, más allá del momento de institucionalización de significados.

En el ítem 4 los estudiantes debían establecer el valor de verdad de cuatro proposiciones y dar una justificación. En la revisión que se hizo de la actividad de los estudiantes se logró evidenciar los siguientes descriptores de respuesta:

Tabla 21. Descriptores de significado, ítem 4, tarea 13. Elaboración propia.

Tipo	Descriptores de significado Ítem 4
1	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta y sin justificación alguna.
2	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta, pero intenta justificar su repuesta.
3	Señala verdadero o falso, de forma correcta, pero no da justificación alguna o, lo que dice o hace no contribuye a la justificación.
4	Señala verdadero o falso e intenta justificar, ya sea de forma textual o con ayuda de dibujos.
5	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta, pero intenta justificar, con algunas imprecisiones, por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.
6	Señala verdadero o falso, de forma correcta, justificando, con algunas imprecisiones, por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.
7	Señala verdadero o falso, de forma correcta, justificando por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.

En las proposiciones verdaderas, 7 grupos se encuentran en un grado de razonamiento transitivo entre los niveles 2 y 3, pues usualmente responden acertadamente e intentan dar una justificación, que raras veces va acompañada de texto escrito, siendo la acción predominante la exhibición de una figura geométrica como argumento de justificación. Sólo un grupo logró razonar según los parámetros del nivel 3. En las proposiciones falsas lo situación es muy precaria pues se observó que sólo un grupo logró posicionarse en el grado de transición entre los niveles 2 y 3. La figura 41 exhibe un caso especial, donde las dos primeras proposiciones se trabajaron según la consigna y que por tanto sus respuestas se clasificaron como tipo 7. La proposición verdadera se justifica con el dibujo de un cuadrado y un texto escrito que da las razones del porqué es verdadera; la proposición falsa se justifica mediante un el dibujo de un paralelogramo que no es un rectángulo, lo que se conoce como un contraejemplo.

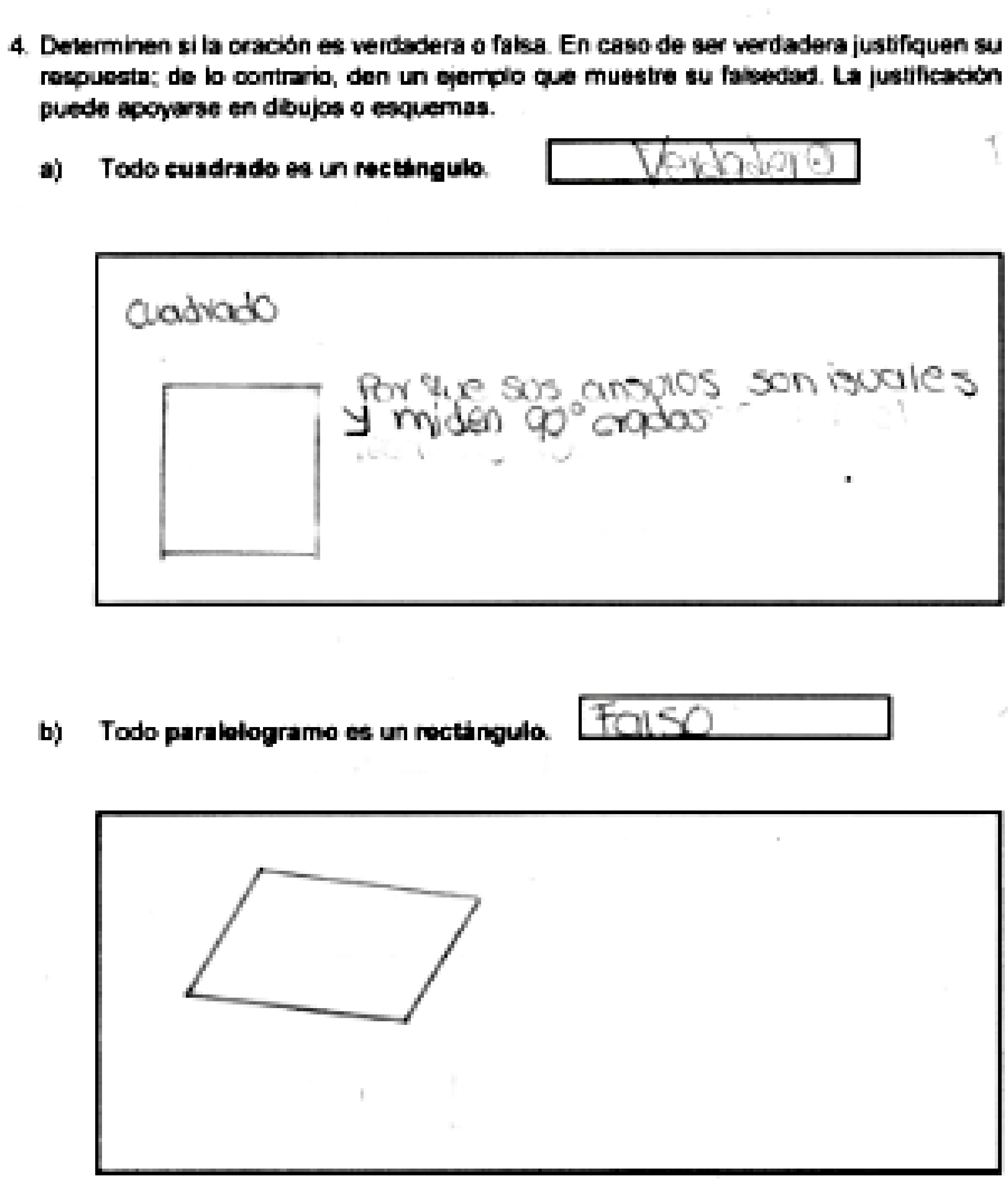
En el ítem 5 los estudiantes debían construir un cuadrilátero uniendo dos trapecios idénticos. Para realizar correctamente esta actividad ellos debían tomar las medidas de los lados y los ángulos de giro de cada trapecio y pensar en la manera de juntarlos de tal manera que formaran un nuevo cuadrilátero. En la revisión que se hizo a las prácticas de los estudiantes se pudo evidenciar los siguientes descriptores de respuesta:

Tabla 22. Descriptores de significado, ítem 5, tarea 13.

Tipo	Descriptores de significado Ítem 5
1	-----------------------
2	Su construcción no corresponde a la figura esperada.
3	Su construcción se acerca a la figura esperada, pero no expresa todas las medidas ni identifica la figura
4	Su construcción se acerca a la figura esperada, pero el tamaño de algunas magnitudes no corresponde con las medidas expresadas.
5	Su construcción no corresponde a la figura esperada, pero la identifica.
6	Su construcción corresponde a la figura esperada, pero su identificación es imprecisa o incorrecta. Su construcción se acerca a la figura esperada y su identificación también, pero tiene algunas imprecisiones en la expresión de las medidas.
7	Su construcción y respectiva identificación corresponde a la figura esperada

En este caso se observó que 5 grupos resolvieron el problema razonando según los parámetros del nivel 3 y cuatro más, lo hicieron según el grado transitivo entre los niveles 2 y 3; los otros dos, no lograron evidenciar indicios de razonamiento de nivel 3. En esta actividad algunos estudiantes evidenciaron dificultades con la medición de ángulos, como lo muestra la figura 41.

Figura 41. Muestra de significado tipo 7, ítem 4, tarea13.



4. **Determinen si la oración es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera justifiquen su respuesta; de lo contrario, den un ejemplo que muestre su falsedad. La justificación puede apoyarse en dibujos o esquemas.**

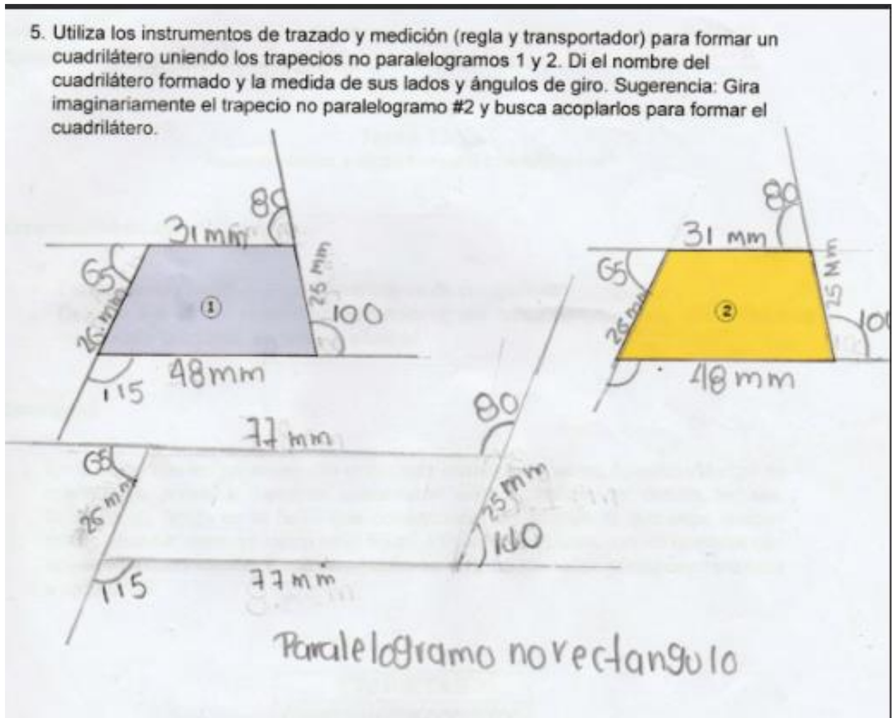
a) Todo cuadrado es un rectángulo. Verdadero

Cuadrado

Por que sus angulos son iguales y miden 90° grados

b) Todo paralelogramo es un rectángulo. Falso

Figura 42. Muestra de mediciones erróneas, ítem 5, tarea 13.



9.4 Evaluación final

Para el desarrollo de esta prueba los estudiantes contaron con dos horas (120 minutos); además del soporte escrito tuvieron a su disposición los instrumentos de medición de longitudes y ángulos, así como un juego de láminas con forma de cuadrilátero y bolsas plásticas de distintos tamaño. También se les facilitó los diagramas construidos en la tarea anterior (tabla de características, mapa conceptual y el diagrama sagital).

Con relación a los ítems de respuesta cerrada (1, 2, 5 y 6), destinados a la evaluación de la adquisición de razonamiento de nivel 2 de Van Hiele, se observó lo siguiente:

- 10 de los 22 estudiantes identificaron todos o casi todos los cuadriláteros concatenados en el dibujo del primer ítem, 6 identificaron una parte significativa de ellos, el resto tuvo muchas dificultades. Lo más notorio fue que 16 estudiantes no identificaron por lo menos dos de los cuatro cuadriláteros etiquetados con nombres que incluían una negación, por ejemplo: trapecio no-paralelogramo o paralelogramo no-rectángulo. Estas expresiones fueron trabajadas en clase, pero la no interiorización de las mismas pudo haber influido en el bajo desempeño en este ítem.

- 21 de los 22 estudiantes acertaron la respuesta del segundo ítem, lo cual muestra que hubo una importante institucionalización del concepto de cuadrilátero.

- 9 de los 22 estudiantes tradujeron acertadamente la representación del paralelogramo, del lenguaje textual al lenguaje figural. 10 de ellos se acercaron a la representación, eligiendo un trapecio; unos pocos eligieron el rectángulo o el cuadrado. Este tipo de actividad se trabajó al inicio de la secuencia, pero después se le dio protagonismo a las representaciones algorítmicas, necesarias para producir representaciones figurales mediante Scratch.

- La mitad de los estudiantes establecieron correctamente las tres relaciones interfigurales y la otra mitad logró establecer la mayoría de las relaciones. En conclusión, se evidenció un alto desempeño en la identificación de características comunes entre los cuadriláteros, que es un proceso previo al de clasificación.

Al observar el desempeño en los ítems de respuesta libre (3, 4, 7 y 8), se logró establecer los siguientes descriptores de tipos de respuesta:

Tabla 23. Descriptores de significado, ítems 3 y 4, Evaluación final. Elaboración propia.

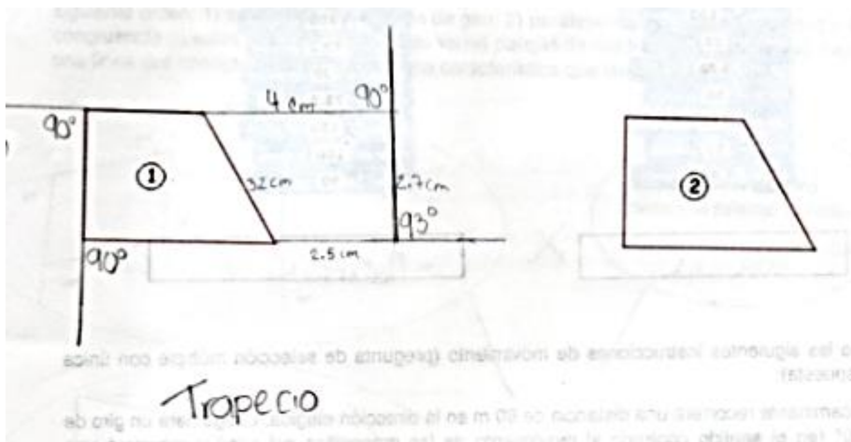
	Ítem	
Tipo	**3**	**4**
1	No construyó	---------------------
2	Su construcción no corresponde a la figura esperada.	---------------------
3	Su construcción se acerca a la figura esperada, pero no expresa todas las medidas ni identifica la figura	Identifica solo un cuadrilátero de forma correcta.
4	Su construcción se acerca a la figura esperada, pero el tamaño de algunas magnitudes no corresponde con las medidas expresadas.	Identifica algunos cuadriláteros de forma correcta, pero somera.
5	Su construcción no corresponde a la figura esperada, pero la identifica.	--------------------
6	Su construcción corresponde a la figura esperada, pero su identificación es imprecisa o incorrecta.	Identifica de forma precisa dos o tres de las cuatro representaciones algorítmicas de cuadriláteros.
7	Su construcción y respectiva identificación corresponde a la figura esperada	Identifica correctamente las cuatro representaciones algorítmicas de cuadriláteros.

Tabla 24. Descriptores de significado, ítems 7 y 8, Evaluación final. Elaboración propia.

	Ítem	
Tipo	**7**	**8**
1	Expresa ideas que no se relacionan con definiciones.	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta y sin justificación alguna.
2	Define cuadriláteros, de manera imprecisa o incorrecta, refiriéndose solo a sus características.	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta, pero intenta justificar su repuesta.
3	Define cuadriláteros, en forma precisa, refiriéndose solo a sus características	Señala verdadero o falso, de forma correcta, pero no da justificación alguna o, lo que dice o hace no contribuye a la justificación.
4	Define cuadriláteros, mezclando características con relaciones de inclusión.	Señala verdadero o falso e intenta justificar, ya sea de forma textual o con ayuda de dibujos.
5	Define cuadriláteros, con muchas imprecisiones, a partir de relaciones de inclusión.	Señala verdadero o falso, de forma incorrecta, pero intenta justificar, con algunas imprecisiones, por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.
6	Define cuadriláteros, con algunas imprecisiones, a partir de relaciones de inclusión.	Señala verdadero o falso, de forma correcta, justificando, con algunas imprecisiones, por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.
7	Define cuadriláteros, en forma precisa, a partir de relaciones de inclusión.	Señala verdadero o falso, de forma correcta, justificando por deducción informal y contraejemplo, respectivamente.

Con relación a la construcción de cuadriláteros (ítem 3), se observó que 9 de los 22 estudiantes expresaron significados tipo 6 o 7. Lo cual significa que este grupo de estudiantes midió correctamente longitudes y ángulos de giro, supo que las construcciones geométricas dependen de procedimientos correctos de medición y además, que al realizar traslaciones y rotaciones de figuras en el plano, estas no deben cambiar de forma ni de tamaño y que pueden componer otras e identificarlas.

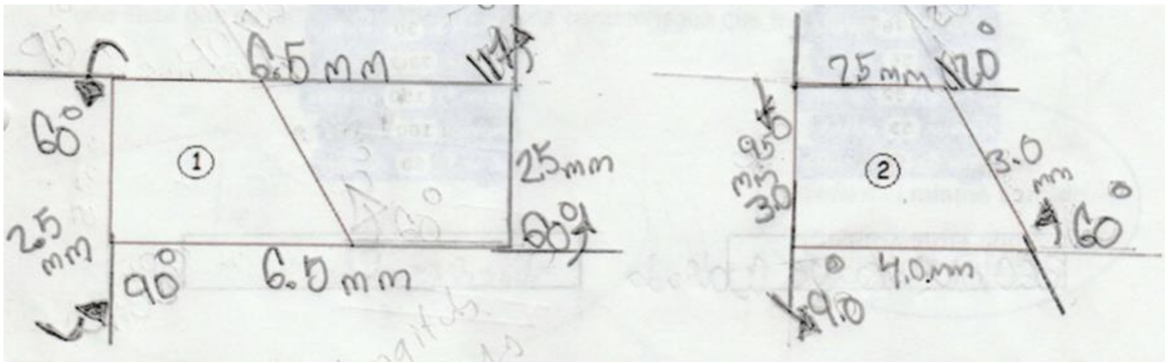
Figura 43. Muestra de significados tipo 6, ítem 3, Evaluación final.



En la figura 43 se observa una construcción que, aunque no es la figura esperada, refleja lo anteriormente expuesto: se toman las medidas correspondientes y, siendo fiel a ellas, se realiza la construcción de la nueva figura y se identifica como un trapecio, lo más preciso que puede llegar a ser.

También se observó que 4 de los 22 estudiantes expresaron significados tipo 4. Lo cual significa que este grupo se encuentra en una transición del nivel 1 al nivel 2 de razonamiento de Van Hiele. De forma intuitiva, estos estudiantes entienden que las figuras son congruentes y que, al rotarlas, forman un nuevo cuadrilátero; sin embargo, las medidas que toman no corresponden con las de la construcción. La figura 44 es un ejemplo de lo aquí expresado. Se observa total incoherencia entre lo medido y lo dibujado, exhibiendo claramente la cohabitación de dos niveles de razonamiento, uno intuitivo y otro analítico.

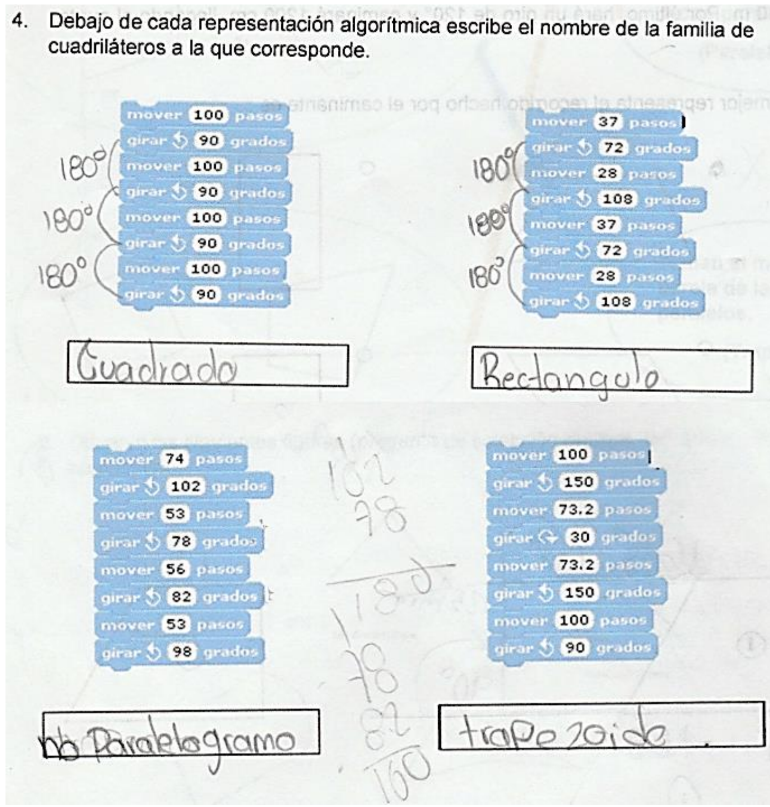
Figura 44. Muestra de significados tipo 4, ítem 3, Evaluación final.



En adición, hubo 2 estudiantes que expresaron significados tipo 5. Estos, a diferencia del anterior grupo, fueron fieles a las medidas que tomaron, identificando la nueva figura como un paralelogramo no rectángulo. Aunque están en un error, reflejan raciocinio de nivel 2.

Con relación las representaciones algorítmicas, 10 estudiantes expresaron significados tipo 6 o 7. Lo cual significa que este grupo comprende que los cuadriláteros pueden tener representaciones no figurales diferenciadas, de las cuales puede extraer información sobre sus características más distintivas. En la figura 45 se observan rastros de prácticas operativas que conducen a la identificación de cuadriláteros.

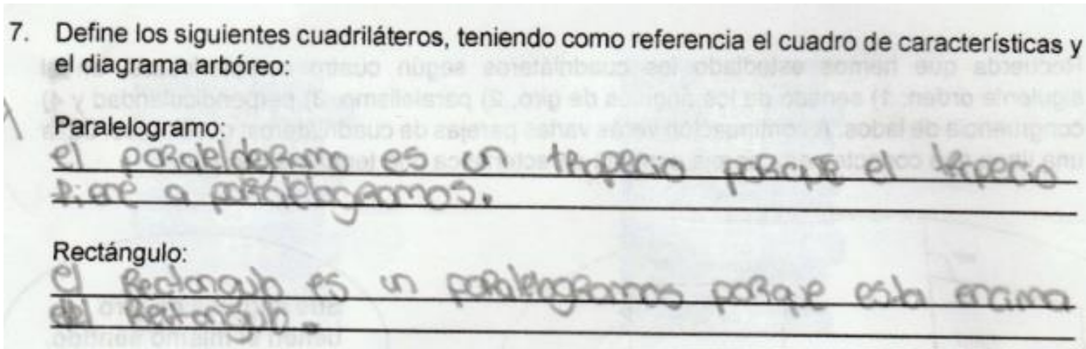
Figura 45. Muestra de significados tipo 7, ítem 4, Evaluación final.



El resto de estudiantes expresaron, en su gran mayoría, significados tipo 3, que corresponden casi en su totalidad solo a la identificación del cuadrado, cuya representación es la más regular de todas. Por ser así, fue asociado a un razonamiento de nivel 2 muy incipiente.

Con respecto a la definición de cuadriláteros a partir de las relaciones de inclusión (ítem 7), se observó que 2 estudiantes expresaron significados tipo 6 o 7. Lo cual indica que este grupo formuló definiciones para rectángulos y paralelogramos usando la organización jerárquica de las clasificaciones trabajadas en clase. La figura 46 es un ejemplo de esta situación.

Figura 46. Muestra de significados tipo 7, ítem 7, Evaluación final

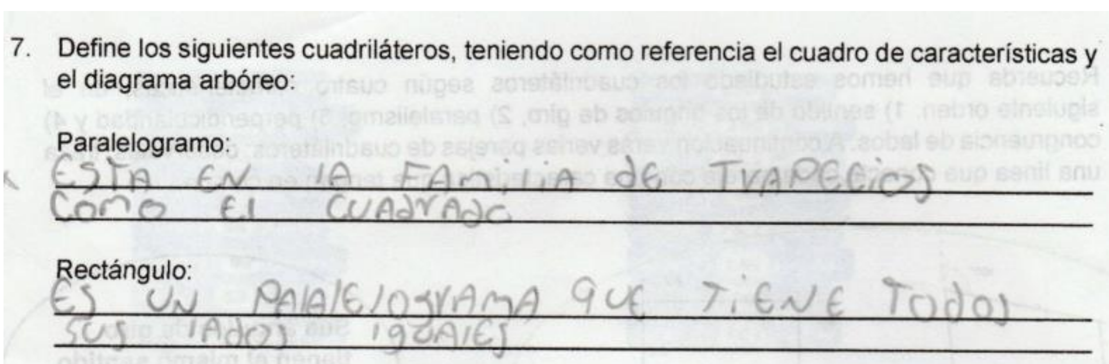

7. Define los siguientes cuadriláteros, teniendo como referencia el cuadro de características y el diagrama arbóreo:

Paralelogramo:
el paralelogramo es un trapecio porqe el trapecio tiene a paralelogramos.

Rectángulo:
el rectangulo es un paralelogramo porqe esta encima del rectangulo

También se observó que 4 estudiantes expresaron significados tipo 4, justo en la transición entre los niveles 2 y 3. Los estudiantes de este grupo formularon definiciones que evidenciaron el uso tanto de la organización jerárquica de las clasificaciones como las características primarias de los cuadriláteros. La figura 47 es un ejemplo de esta situación.

Figura 47. Muestra de significado tipo 4, ítem 7, Evaluación final.


7. Define los siguientes cuadriláteros, teniendo como referencia el cuadro de características y el diagrama arbóreo:

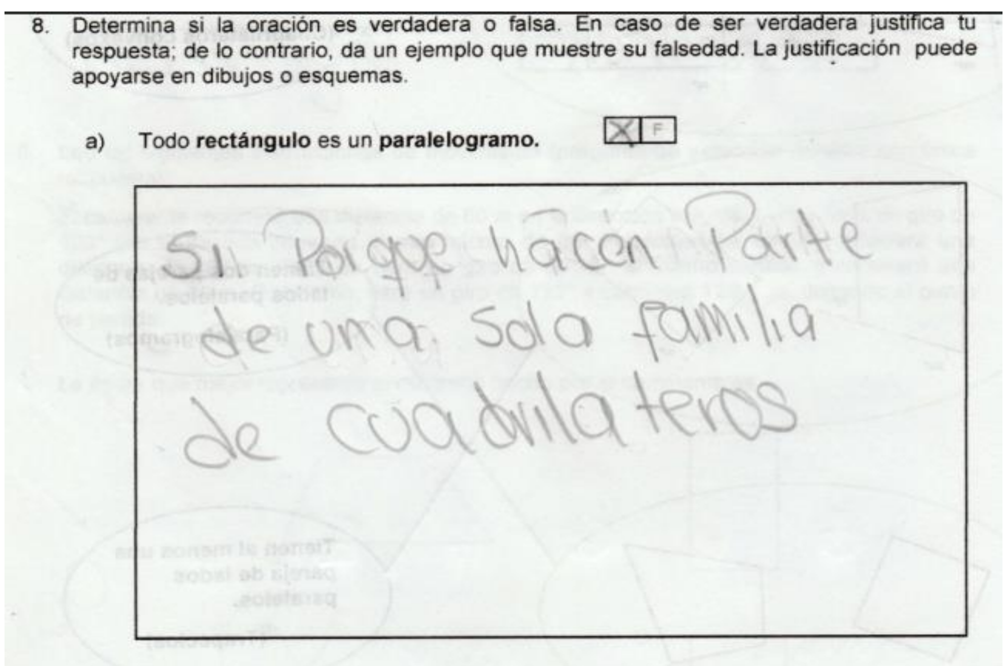
Paralelogramo:
ESTA EN LA FAMILIA DE TRAPECIOS COMO EL CUADRADO

Rectángulo:
ES UN PARALELOGRAMA QUE TIENE TODOS SUS LADOS IGUALES

Lo más notorio en este ítem fue que, en su gran mayoría, los estudiantes dieron respuestas tipo 2 o 3. Aquí los estudiantes recurrieron a la tabla de características e hicieron caso omiso a las relaciones construidas en las actividades de agrupación reiterada y los diagramas sagital y arbóreo.

En cuanto al establecimiento del valor de verdad de una proposición que relaciona dos cuadriláteros y su respectiva justificación (ítem 8), se observó que 4 estudiantes dieron respuestas tipo 6. Esto indica que lograron determinar si la proposición era verdadera o falsa y además, justificar por deducción informal o contraejemplo, respectivamente. En este caso las deducciones informales pueden estar apoyadas por dibujos y hacer referencia a conclusiones establecidas durante los momentos de institucionalización, con expresiones como: porque cumplen las mismas propiedades o porque pertenecen a la misma familia de cuadriláteros. La figura 48 es un ejemplo de esta situación.

Figura 48. Muestra de significados tipo 6, ítem 8, Evaluación final



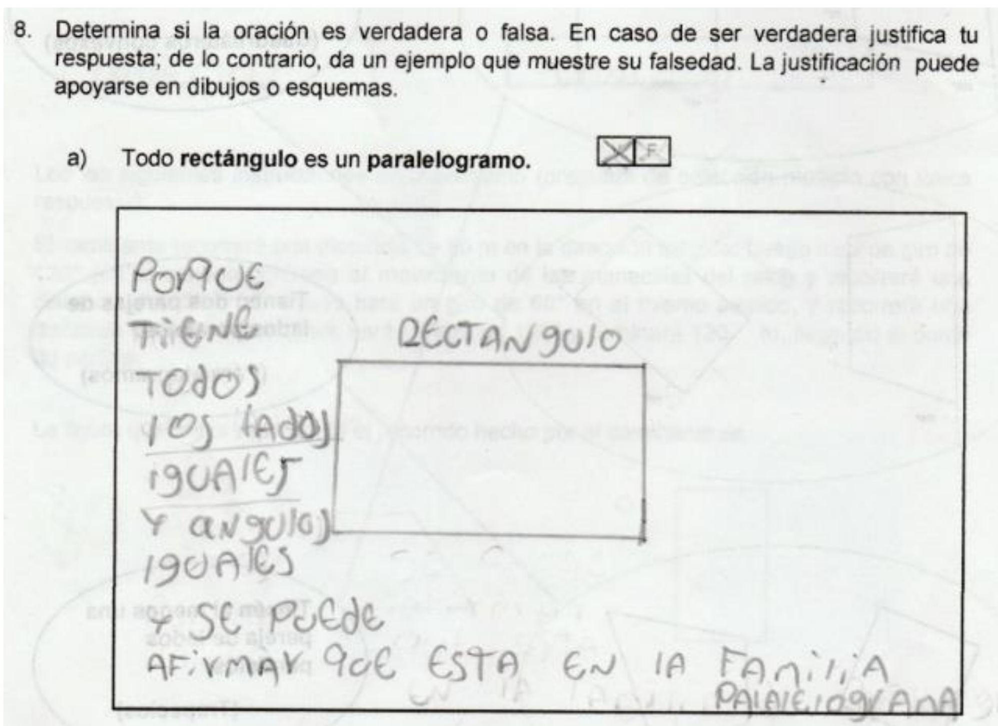
8. Determina si la oración es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera justifica tu respuesta; de lo contrario, da un ejemplo que muestre su falsedad. La justificación puede apoyarse en dibujos o esquemas.

a) Todo **rectángulo** es un **paralelogramo**. X F

Si Porque hacen Parte de una sola familia de cuadrilateros

También se observó que 8 estudiantes dieron respuestas tipo 4. Este grupo mezcló deducciones con descripciones de características de forma somera, lo que permite concluir que se encuentran en transición del nivel 2 al nivel 3. La figura 49 es un ejemplo de ello. Aunque los argumentos en ella no sean correctos del todo, se intenta hilar las ideas y generar una conclusión.

Figura 49. Muestra de significados tipo 4, ítem 8, Evaluación final.



8. Determina si la oración es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera justifica tu respuesta; de lo contrario, da un ejemplo que muestre su falsedad. La justificación puede apoyarse en dibujos o esquemas.

a) Todo **rectángulo** es un **paralelogramo**. ☒ V ☐ F

PORQUE TIENE TODOS LOS LADOS IGUALES Y ANGULOS IGUALES Y SE PUEDE AFIRMAR QUE ESTA EN LA FAMILIA PARALELOGRAMA

RECTANGULO

Igualmente se observó que 8 estudiantes dieron respuestas tipo 3. Este grupo se dedicó a hacer descripciones de las características de los cuadriláteros pero no generan razones ni conclusiones.

10. EVALUACIÓN

10.1 Prueba Diagnóstico

A partir de los resultados que aparecen en el anexo 4, se obtiene la siguiente información:

Tabla 25. Distribución de frecuencias por Ítem (1-5), Prueba diagnóstico.

Ítem	**Cumplió**		**Cumplió parcialmente**		**No cumplió**	
	f_a	f_r **(%)**	f_a	f_r **(%)**	f_a	f_r **(%)**
1	3	10	0	0	27	90
2	2	7	0	0	28	93
3	8	27	0	0	22	73
4	3	10	0	0	27	90
5	8	27	4	13	18	60

Tabla 26. Distribución de frecuencias por Ítem (6 y 7), prueba diagnóstico.

	Tipos de respuesta													
	1		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7**	
Ítem	f_a	f_r	f_a	f_r	f_a	f_r	f_a	f_r	f_a	f_r	f_a	f_r	f_a	f_r
6	3	10	8	26,7	6	20	3	10	0	0	10	33,3	0	0
7	6	20	8	26,7	15	50	1	3,3	0	0	0	0	0	0

De la tabla 25 se concluye, en términos generales, que el 90% de los estudiantes no miden ángulos de abertura, el 93% no adjudican a los giros el significado de magnitud y mucho menos que se puedan medir con grados sexagesimales, el 73% no identifica lados perpendiculares en un polígono, el 90% no identifica lados paralelos en un polígono y el 60% tiene muchas dificultades con la medición de longitudes.

De la tabla 26 se concluye, en términos generales, que solo el 33,3% de los estudiantes logran definir polígonos con un grado alto de razonamiento de nivel 2, que el 10% define polígonos usando razonamientos de nivel 1 y 2, y la mayoría lo hace usando razonamiento de nivel 1 predominantemente. También se deduce que la gran mayoría de ellos tiene dificultades para clasificar cuadriláteros usando razonamiento de nivel 2.

Para establecer el grado de adquisición del nivel 2 se obtiene el promedio de los ponderados de cada respuesta dada. De la tabla “Grado de adquisición del nivel 2” del anexo 4, se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 27. Distribución de frecuencias por grados de adquisición del nivel 2, Prueba diagnóstico.

Grado de adquisición	f_a	f_r**(%)**
Nulo	5	17
Bajo	15	50
Intermedio	10	33
Alto	0	0
Completo	0	0

Así las cosas, se puede concluir que el 50% de los estudiantes del grupo focal, en los procesos de definición y clasificación de polígonos, razonan según los parámetros del nivel 1 de Van Hiele, es decir, de forma muy intuitiva, recurriendo única y exclusivamente a la visualización. También se puede concluir que el 33% se encuentran en transición con respecto al razonamiento en estos procesos, recurriendo de forma alterna, a veces contradictoria, a la visualización y el análisis. Del resto de estudiantes no son concluyentes los resultados.

10.2 Clasificación 4 y 5: Rectángulos y paralelogramos no rectángulos/Cuadrados y rectángulos no-cuadrados

De los datos del anexo 5 se construye la siguiente tabla de frecuencias:

Tabla 28. Distribución de frecuencias por grados de adquisición, niveles 2 y 3, Clasificación 4 y 5.

	Nivel 2		Nivel 3	
Grados de adquisición	f_a	f_r (%)	f_a	f_r (%)
Nula	0	0,0	1	4,5
Baja	3	13,6	4	18,2
Intermedia	6	27,4	7	31,8
Alta	10	45, 5	10	45,5
Completa	3	13,6	0	0

Se infiere, a partir de esta información, que aproximadamente el 60% de los estudiantes ha fortalecido su razonamiento de nivel 2, en lo que se refiere a procesos de diferenciación de cuadriláteros y, que aproximadamente el 27% se encuentra en el camino de hacerlo. También se infiere que, en lo referido al proceso de definición, aproximadamente el 45% de los estudiantes se ha fortalecido en el nivel 3 de razonamiento y que el aproximadamente el 32% se encuentra en vía de hacerlo.

10.3 Organización jerárquica de las clasificaciones

Los ítems 1-4 se propusieron para facilitar a los estudiantes la adquisición de razonamiento del nivel 3, mientras que el ítem 5 se propuso como un problema de aplicación, donde se pudiera evidenciar procesos de razonamiento de nivel 2.

De los datos consignados en el anexo 6 se puede construir la siguiente tabla de frecuencias:

Tabla 29. Distribución de frecuencias por grados de adquisición, niveles 2 y 3, Organización de clasificaciones.

	Nivel 2		Nivel 3	
Grados de adquisición	f_a	f_r (%)	f_a	f_r (%)
Nula	0	0	0	0
Baja	2	18,2	3	27,3
Intermedia	4	36,4	6	54,5
Alta	0	0	2	18,2
Completa	5	45,5	0	0

De lo anterior se puede inferir que un poco menos del 50% de los estudiantes han adquirido un grado completo del nivel 2 en aspectos de construcción e identificación de cuadriláteros, mientras que poco menos del 40% están en el grado de transición entre los niveles 1 y 2. Por su parte, aproximadamente el 18% de ellos han alcanzado un grado alto de razonamiento de nivel 3 en lo referido al establecimiento de relaciones de inclusión entre cuadriláteros y la ejecución de procesos de justificación y, la mayoría se encuentra en el grado de transición entre los niveles 2 y 3.

10.4 Prueba final

Para poder establecer un nivel de idoneidad cognitiva *a posteriori* del diseño e implementación de la secuencia de tareas debe haber una asimilación porcentual de las respuestas cerradas a los tipos de respuesta abierta en la prueba final. Así mismo debe haber un mayor valor para las respuestas abiertas, dado su mayor grado de complejidad frente a las otras; en este caso se propuso la ponderación: 60% para el grupo de respuestas abiertas y 40% para el grupo de respuestas cerradas. Los criterios de dicha asimilación se exponen en la siguiente tabla:

Tabla 30. Criterios de asimilación porcentual de respuestas cerradas a respuestas abiertas. Evaluación final.

	Asignación porcentual				
Ítem	100%	80%	60%	30%	0%
1	Identifica la totalidad de cuadriláteros	Identifica 5 o 6 cuadriláteros	Identifica 3 o 4 cuadriláteros	Identifica 1 o 2 cuadriláteros	No identifica ningún cuadrilátero
2	Identifica la totalidad de características de los cuadriláteros	Identifica dos características de los cuadriláteros	Identifica una característica de los cuadriláteros	Identifica, con ciertas imprecisiones, una característica de los cuadriláteros	No elige ninguna opción
5	Elige el paralelogramo	Elige el trapecio	Elige el rectángulo	Elige el cuadrado	No elige ninguna opción
6	Realiza las conexiones correctas	Realiza dos conexiones correctas	Realiza solo una conexión correcta	Ninguna conexión es correcta	No realiza conexiones

Con los criterios de asimilación y la información recogida en el anexo 7 se construye la siguiente tabla:

Tabla 31. Distribución de frecuencias por grados de adquisición de los niveles 2 y 3, Evaluación final.

	Nivel 2		Nivel 3	
Grados de adquisición	f_a	f_r (%)	f_a	f_r (%)
Nula	0	0,0	0	0,0
Baja	0	0,0	13	59,1
Intermedia	7	31,8	5	22,7
Alta	11	50,0	4	18,2
Completa	4	18,2	0	0,0

Se infiere entonces que el 68,2% del grupo focal logran alcanzar por lo menos un grado alto del nivel 2, mientras que solo el 18,2% alcanza un grado alto del nivel 3. Con estos resultados se asigna a la idoneidad cognitiva *a posteriori* de la secuencia de tareas diseñada e implementada un nivel medio, con cierta tendencia a ser alta, considerando que el 40% de los estudiantes se ha alcanzado un grado mayor o igual al intermedio del nivel 3.

11. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

11.1 Conclusiones

La asunción de conceptos, principios y procedimientos del EOS, los niveles de Van Hiele, los desarrollos didácticos y metodológicos de Jaime (1993), Corberán (1994) y Maguiña (2013), y la tipología de tareas de García et al (2015), junto a la realización de un estudio preliminar, desde las perspectivas curricular, epistemológica y didáctica, permitieron el logro de los objetivos específicos y a su vez, el general. Se halló una manera de valorar la efectividad del diseño y la implementación de la unidad didáctica objeto de estudio. Esto se hizo en la siguiente medida:

1. Se logró diseñar un conjunto de tareas, a manera de secuencia, orientado al mejoramiento del proceso de razonamiento en la clasificación de cuadriláteros, por parte de estudiantes de grado 6° de la Institución Educativa Técnica Ciudad de Cali.

   Con el EOS fue posible articular las teorías mencionadas en pro de contribuir a darle relevancia a las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes, tan así, que las consignas se hicieron pensando en la emergencia de los objetos y la manifestación de significados personales. También contribuyó a reconocer las representaciones algorítmicas como objetos geométricos, procurando la identificación de patrones de regularidad (relaciones intrafigurales) en los mismos.

La tipología de tareas de García et al (2015) contribuyó a darle estructura y orden a la secuencia, con unas tareas pensadas para la emergencia y manifestación de objetos y significados geométricos (reproducción) y otras, para el establecimiento de relaciones intra e interfigurales que conlleven a la clasificación de cuadriláteros (conexión).

Las fases de aprendizaje de Van Hiele, que propone unas orientaciones didácticas para ayudar a los estudiantes a progresar en su razonamiento geométrico y, que se expresan en los test aplicados en las investigaciones de Coberán (1994), Fouz (2006) y Maguiña (2013), aportaron ideas para el diseño de algunos ítems. Tal fue el caso del uso de diagramas arbóreos para la organización jerárquica de cuadriláteros (fase de integración), el cuadro sinóptico para resumir las características de los cuadriláteros (fase de integración), las figuras geométricas etiquetadas con los términos “polígono” y “no polígono” para identificar sus características y proponer definiciones (fase de orientación dirigida).

Mediante el estudio preliminar se logró configurar la carta de navegación de la unidad didáctica, desde un enfoque por procesos. Se identificaron los desempeños asociados a la clasificación, en coherencia con el currículo colombiano y lo expresado por los expertos. Se caracterizaron los significados pretendidos desde una concepción dinámica de la geometría, al considerar los ángulos como giros y las figuras, como trayectorias de recorridos. Esta caracterización involucró también la sincronización con el movimiento y el carácter semiótico de Scratch, así como un modelo jerárquico de clasificación.

2. Se logró establecer un mecanismo de análisis y valoración de resultados, a través de un esquema combinado de datos cualitativos y cuantitativos. Las respuestas a los ítems de orden cerrado y de desempeños muy concretos se

analizaron desde los parámetros Cumplió, Cumplió parcialmente y No cumplió. Pero, las respuestas a los ítems de orden abierto se analizaron desde la tipología de Jaime (1993), que permitió agrupar las respuestas en siete tipos bien diferenciados y ponderados. Esto se asumió, en el análisis, como una tipología de significados personales que reciben mayor ponderación a medida que se acercan a los significados pretendidos.

La tipología asumida permitió a su vez, establecer unos grados de adquisición de un cierto nivel de razonamiento, que en asocio con la configuración de significados para cada nivel de Van Hiele, sirvió para definir operativamente los niveles de Idoneidad cognitiva a posteriori. Cabe aclarar, que esta definición se hizo en términos grupales, y que por lo tanto, funciona como mecanismo de valoración para la implementación de la unidad didáctica.

3. El análisis de la actividad matemática se hizo a partir del seguimiento de las prácticas geométricas configuradas en la tabla 6 (Configuración epistémica) y traducidas en términos de significados en la tabla 7 (Significados de referencia). Esto se logró a través de la división de la secuencia en 7 unidades de análisis, a saber: definición del concepto de cuadrilátero, uso de Scratch, clasificación 1 (cuadriláteros convexos y cóncavos), clasificación 2 (trapecios y trapezoides), clasificación 3 (paralelogramos y trapecios no-paralelogramos), clasificación 4 y 5 (rectángulos y paralelogramos no-rectángulos / cuadrados y rectángulos no-cuadrados) y organización jerárquica de las clasificaciones.

   Este esquema permitió la obtención de las siguientes conclusiones:

   - Elementos lingüísticos: en la prueba diagnóstico se evidenció que la mayoría de los estudiantes no tenían los elementos necesarios para establecer relaciones intrafigurales, dado que agruparon los cuadriláteros usando criterios de naturaleza intuitiva que reflejaron el predominio de razonamiento de nivel 1. Esta situación fue evolucionando conforme avanzaba la secuencia. Con el uso de Scratch se introdujo una nueva forma de representación semiótica, que permitió la asociación de algoritmos de construcción con las representaciones gráficas de los cuadriláteros y con ella, la identificación de relaciones intrafigurales. En la evaluación final se constató que por lo menos la mitad del grupo comprendieron que los cuadriláteros pueden tener representaciones no figurales diferenciadas, de las cuales pudieron establecer relaciones intrafigurales.

- Elementos conceptuales:

  Con relación a los ángulos, en la prueba diagnóstico se evidenció que la mayoría de los estudiantes no había construido significados con respecto a las prácticas de giro. Esto cambió, como se pudo constatar en el análisis de las tareas y la evaluación final, donde los estudiantes mencionaron, en sus expresiones el término “giro” para referirse a los ángulos exteriores de un cuadrilátero y además, midieron ángulos cóncavos (con medida mayor de 180°).

  Con respecto a las relaciones de perpendicularidad y paralelismo, los estudiantes, al principio, no tenían claridad frente a estos conceptos. El desarrollo de las tareas 8-12, permitió abordar estas relaciones a partir de los conceptos de “complementariedad de giros sucesivos” y “giros rectos entre dos lados sucesivos”.

  En cuanto a las definiciones de los diferentes cuadriláteros, al principio solo se evidenció dificultad con la expresión de las características de los polígonos. Esto se trabajó en las tareas 3 y 4, observándose que la mayoría de los estudiantes logró definir el cuadrilátero con sus respectivas características; también se corroboró en la evaluación final, lo cual indica que hubo una importante institucionalización de este concepto. En la definición de los diversos cuadriláteros, aunque hubo muestras de significado de nivel 3 cercanos a los pretendidos, a lo largo de las tareas, en la evaluación final, solo se constató en la mayoría la expresión de significados de nivel 2.

- Proposiciones y argumentos: en la evaluación final se evidenció que poco más de la mitad de los estudiantes lograron establecer relaciones interfigurales de inclusión y emprender prácticas de deducción informal para justificar estas relaciones.

- Procedimientos: Al principio, se evidenció que la gran mayoría de los estudiantes tenían dificultades para medir longitudes y ángulos. En cuanto a las longitudes, se les dificultó el establecimiento de correspondencias entre el tamaño de los segmentos y la escala numérica de las reglas graduadas; además, se evidenció la falta de construcción de la unidad “milímetro”. Respecto a los ángulos, se observó el uso incorrecto del instrumento y la falta de familiaridad con la escritura de los grados sexagesimales.

  A partir del desarrollo de la tarea 9 se observó una mejoría significativa en las mediciones de longitudes y ángulos. Sin embargo, en la evaluación final se evidenciaron ciertas dificultades para medir ángulos exteriores, en una parte importante de los estudiantes.

  Con relación a la construcción de cuadriláteros mediante algoritmos de programación en Scratch, se concluyó que la gran mayoría de los estudiantes elaboró representaciones algorítmicas con ayuda de esta herramienta. Su uso requirió de la realización de prácticas de medición y recorrido, y posterior codificación; su puesta en funcionamiento, validó estas prácticas e instó a la realización de correcciones.

4. En la prueba diagnóstico se constató que el 33% de los estudiantes, en los procesos de definición y clasificación, se encontraban en un grado de transición entre los niveles 1 y 2 de razonamiento, recurriendo alternadamente, a la visualización y al análisis. En la misma línea, el 50% de los estudiantes razonaban según los parámetros del nivel 2. Del resto no se tuvo evidencias de constatación.

   En la secuencia de tareas, con respecto al proceso de clasificación, aproximadamente el 60% de los estudiantes manifestó un grado alto o completo de razonamiento de nivel 2 y aproximadamente el 45% de ellos, un grado alto del nivel 3. Con respecto a los procesos de construcción e identificación, poco menos del 50% adquirieron un grado completo del nivel 2 y poco menos de 40%, un grado intermedio. Con relación al proceso de clasificación, el 18% alcanzaron un grado alto del nivel 3 y la mayoría, en un grado intermedio.

   En la evaluación final se concluyó, en todos los procesos asociados al de clasificación, que el 68,2% de los estudiantes alcanzó por lo menos un grado alto del nivel 2. Por su parte, el 18,2% de ellos alcanzó un grado alto del nivel 3.

   Por lo tanto, se concluye que la idoneidad cognitiva a posteriori del diseño e implementación de la unidad didáctica es media, con tendencia a ser alta, teniendo en cuenta que aproximadamente el 41% de los estudiantes alcanzaron un grado mayor o igual a intermedio del nivel 3.

11.2 Recomendaciones

Del análisis y la valoración de la unidad didáctica surgen perspectivas de investigación y algunas recomendaciones de orden didáctico y curricular:

Entre las perspectivas de investigación se proponen las siguientes:

- Con el propósito de realizar una valoración más completa del diseño y la implementación de unidades didácticas, profundizando en los procesos de transposición didáctica, el uso de materiales y el análisis de las interacciones, se propone el uso del concepto idoneidad didáctica en todas sus dimensiones: epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediacional.

- En los procesos de observación, análisis y valoración, se pudo constatar en los estudiantes ciertos retrocesos en los grados de adquisición de los niveles de razonamiento de Van Hiele. Pero la teoría del aprendizaje asumida es insuficiente para explicar este fenómeno, dadas las propiedades de jerarquía y secuencialidad, que impiden pensar en la posibilidad de que un sujeto adquiera habilidades de razonamiento de un cierto nivel sin haber adquirido completamente las del nivel anterior. Estas propiedades también impiden pensar en los constantes repliegues que hace un sujeto para resolver un problema o emplear un razonamiento. Con la teoría de Pirie & Kieren (1994) y su noción de *repliegue*, citado por Martin (2008), se puede estudiar, con mayores elementos, el fenómeno descrito, dado que en ella se entiende la comprensión como un proceso dinámico que implica un movimiento continuo no lineal entre diferentes formas de pensamiento.

- La teoría de las funciones semióticas del EOS, que se mencionó pero no se tuvo en cuenta en el análisis, es de vital importancia para el estudio de la pertinencia del uso de manipulativos grafico-textuales-verbales que proveen de un sistema de representación semiótica, como lo es Scratch. Por este motivo se recomienda para futuras investigaciones profundizar en esta teoría y realizar aportes empíricos.

Entre las recomendaciones de orden didáctico y curricular se proponen las siguientes:

- Enfatizar desde los grados escolares básicos, el desarrollo del pensamiento métrico, primero para construir el concepto de magnitud y luego, llegar a cuantificar numéricamente esas dimensiones o magnitudes. Esto se puede lograr, utilizando los instrumentos y sus respectivas unidades de manera adecuada, en donde se parta de lo concreto al describir prácticas de recorrido y giro, para llegar a la abstracción de los conceptos de segmento y ángulo.

- Promover el uso de Scratch, entre los docentes de matemáticas de básica primaria y secundaria, dado que aporta al desarrollo de procesos metacognitivos de los estudiantes. Esto se evidenció en las prácticas de medición y construcción de cuadriláteros donde los estudiantes, usando el programa, verificaban la precisión de las mediciones. Incluida esta herramienta en el desarrollo de las tareas de construcción geométrica, se facilita la representación gráfico-textual de los objetos geométricos, lo cual contribuye a los análisis intra e interfigurales. Según las experiencias desarrolladas en el Instituto Nuestra Señora de la Asunción (INSA) de la ciudad de Cali, el uso de la herramienta se propone a partir de los primeros grados de primaria.

- Abordar la enseñanza de las matemáticas desde enfoques pragmáticos en donde se considera la matemática como una actividad humana. En éste tipo de enfoques los objetos matemáticos se asumen como resultado de las prácticas sociales y se desarrollan por competencias y procesos generales a largo plazo y específicos a corto plazo, donde siempre hay desarrollo por parte del educando; de ésta forma el sujeto que aprende se dirige hacia una meta conjuntamente con otros, participando en el desarrollo de la sociedad en y con la que se forma. Contrario de las posturas tradicionales, llamadas realistas, que asumen los objetos matemáticos como entidades que tienen una realidad propia, independientemente de las personas que los manipulan y que privilegian la memorización y la transmisión de contenidos descontextualizados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T., y Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(5).

Ayala-García, J. (2015). *Evaluación externa y calidad de la educación en Colombia*. Documentos de trabajo sobre economía regional No. 217. Banco de la República, Colombia.

Blanco, T. F., Godino, J. D., y Pegito, J. A. C. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Boletim de Educação Matemática*, 26(42 A), 39-63.

Casas, G., Luis M. y Luengo, R. (2005). Conceptos nucleares en la construcción del concepto de ángulo. *Enseñanza de las ciencias*, 23(2), 201–216.

Corberán, R., Gutierrez, A., Huerta, M, Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Colección: Investigación; Número 95. Ministerio de Educación y Ciencia, España.

Corredor, M. (2012). Epistemología y sociogénesis de la geometría. Cuestiones de Filosofía (14), Tunja-Colombia, pp. 36-56.

D'Amore, B., y Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 10(2), 191-218.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the learning of mathematics*, 14(1), 11-18.

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Eduteka, (2004). El uso de la tecnología en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Recuperado de http://eduteka.icesi.edu.co/articulos/DeclaracionTech

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82(1), 97-124.

Font, V., Godino, J., y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics*, 27(2), 3-9.

García, B., Coronado, A. y Giraldo, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas*. Florencia, Colombia: Universidad de la Amazonia.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Godino, J. D. (2002). Hacia una teoría de la instrucción matemática significativa. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable de http://www. ugr. es/local/jgodino/. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J. D., y Ruíz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. D., Batanero, M., y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Godino, J. (2005). Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas. Yupana, 1(2), 43-60.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D., Bencomo, D., Moll, V. F., & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la" Idoneidad Didáctica" de procesos de estudio de las Matemáticas. In Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, Huesca, 6-9 de septiembre de 2006 (pp. 36-56). Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Godino, J. D., Recio, A. M., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2006). Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemáticas. *Revista Números*, nº 64

Godino, J. D., Batanero, C., y Moll, V. F. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-78.

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. *Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 1-15.

Godino, J. D., Batanero, M., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2013). La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el CERME 8 (Turquía, 2013) con el título, “Didactic engineering as design-based research in mathematics education”. Recuperado de http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Godino.pdf

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34 (2/3), 167-200.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis doctoral). Universitat de València, Valencia, España.

López, J. (2014). *Actividades de aula con Scratch que favorecen el uso del pensamiento algorítmico, el caso de grado 3° en el INSA* (Tesis de Maestría). Universidad ICESI, Cali, Colombia.

Maguiña, A. (2013). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de los cuadriláteros basada en el modelo de Van Hiele* (Tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica de Perú, Lima, Perú.

Martin, L. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie–Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, pp. 64-85

Mederos, O. y Ruiz, A. (2007). Aplicación de la operación clasificación de conceptos al estudio de los cuadriláteros convexos. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 67, pp. 8-14

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Recuperado de http://archivos.agenciaeducacion.cl/Marcos_pruebas_evaluacion_PISA_2012.pdf.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Matemáticas: Lineamientos curriculares*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Documento No 3: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Ministerio de Educación Nacional y Organización de Estados Americanos. (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*: apoyo a los Lineamientos Curriculares Serie: Lineamientos curriculares República de Colombia.

Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M. A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., y Aguilar, A. (2013). La Clasificación de las Figuras Planas en Primaria: Una Visión de Progresión entre Etapas y Ciclos.

Papert, S. (1982). *El desafío de la mente: Computadoras y Educación*. Buenos Aires, Argentina: Ediciones Galápago.

Sepúlveda, R., Ospina, C. y González, J. (2005). Pensamiento espacial y sistemas geométricos. En Interpretación e implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas. Secretaria de Educación para la Cultura, Gobernación de Antioquia.

Vecino, F. 2003. Didáctica de la geometría en la educación primaria. En M. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 301-328). Madrid, España: Pearson Educación S. A.

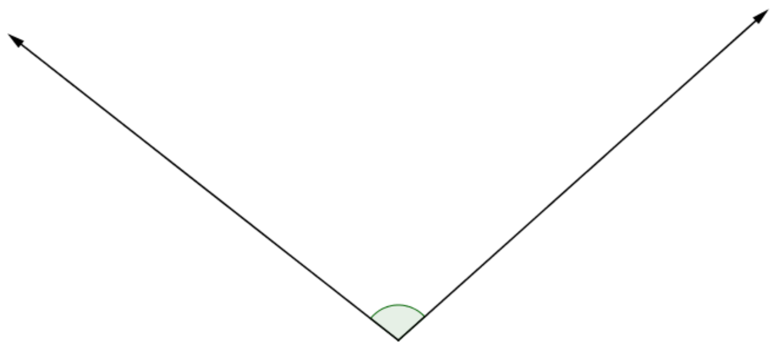
Renzulli, F., y Scaglia, S. (2007). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores de nivel inicial. *Revista de Educación Matemática*, 22(2).

ANEXOS

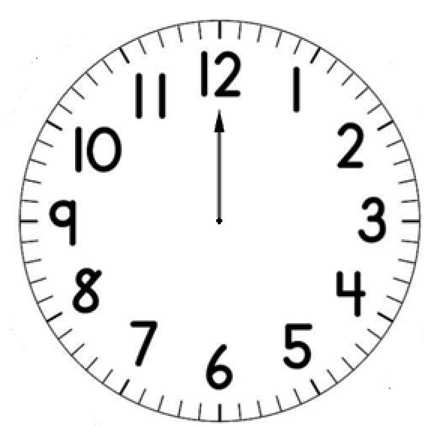
Anexo 1

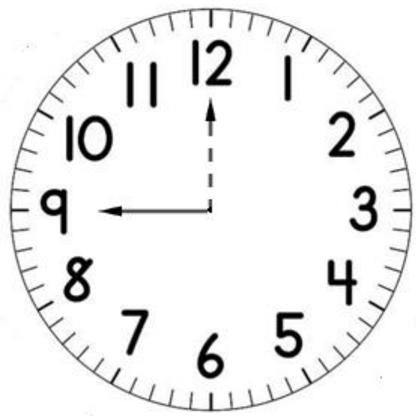
PRUEBA DIAGNÓSTICO

1. Mide el siguiente ángulo y escribe tu respuesta en el recuadro.

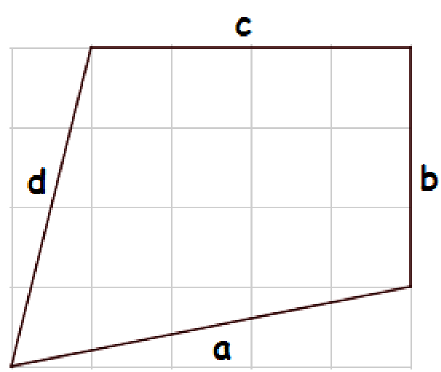


2. A continuación se ilustra un giro de una manecilla de reloj. En su posición inicial apunta al número 12 y en su final al número 9. Mide este giro y escribe tu respuesta en el recuadro.



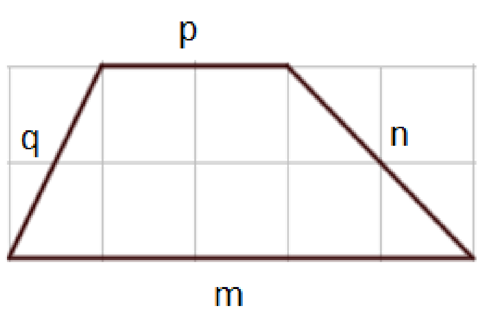


3. Identifica la pareja de lados perpendiculares que hay en la figura.



y

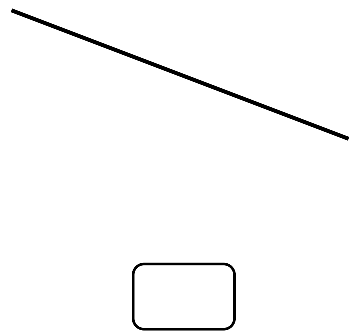
4. Identifica la pareja de lados paralelos que hay en la figura.



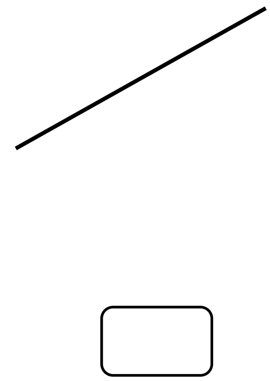
y

5. Usa la regla para medir en centímetros o milímetros (la unidad más conveniente) los siguientes segmentos:

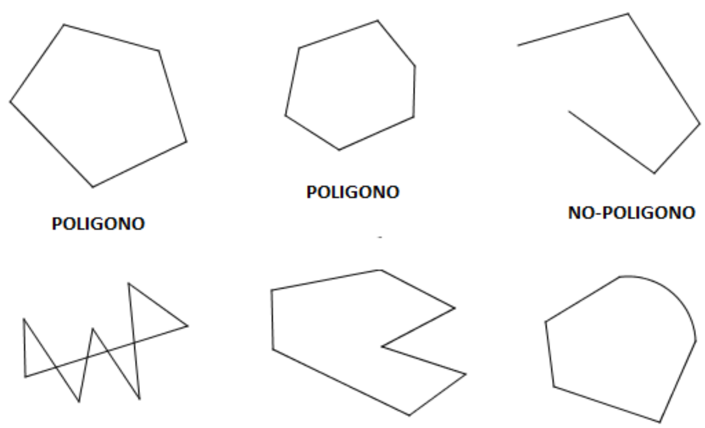
a)



b)



6. Observa las siguientes figuras geométricas.

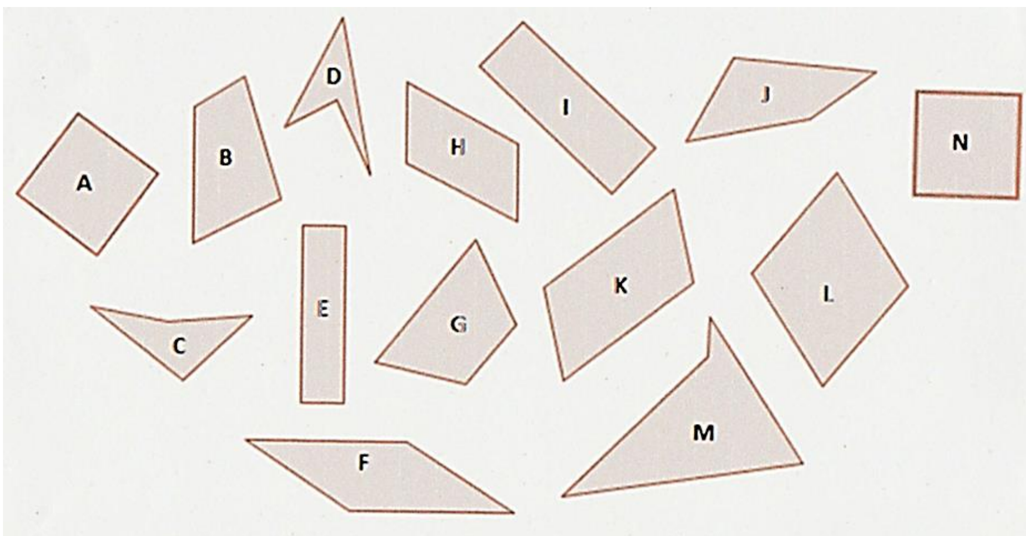


a) Observa las figuras que llamadas polígonos; señala con una **X** la propiedad que cumplen en cada una de las tres cualidades indicadas en la tabla.

Partes del contorno		**Recorrido del contorno**		**Regiones**	
Segmentos de recta	Curvas	Cerrado	Abierto	Una	Varias

b) Según la información recogida, ¿qué es un polígono?

7. Despliega todas las figuras que hay en el paquete y clasifícalas según las características que tú consideres. Puede haber como mínimo dos y como máximo cinco grupos, y ninguna figura puede quedar por fuera de los grupos. Pega cada grupo de figuras dentro del recuadro (usa algún recurso para distinguir los grupos y ponles un nombre a cada uno). Describe la o las características de dicha clasificación.



Anexo 2

SECUENCIA DE TAREAS

Tarea 1

“Usemos correctamente la regla graduada”

Objetivo:

Fortalecer el desarrollo de habilidades en la medición segmentos de recta usando la regla graduada.

Hay unidades de longitud que seguramente ya conoces, como lo son el centímetro (cm) y el milímetro (mm). Estas dos unidades se ilustran en la siguiente imagen.

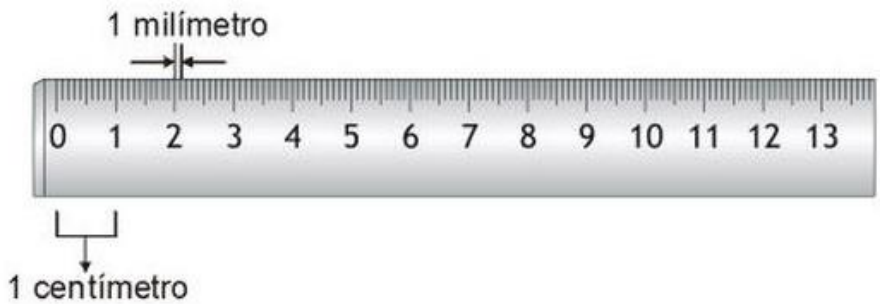
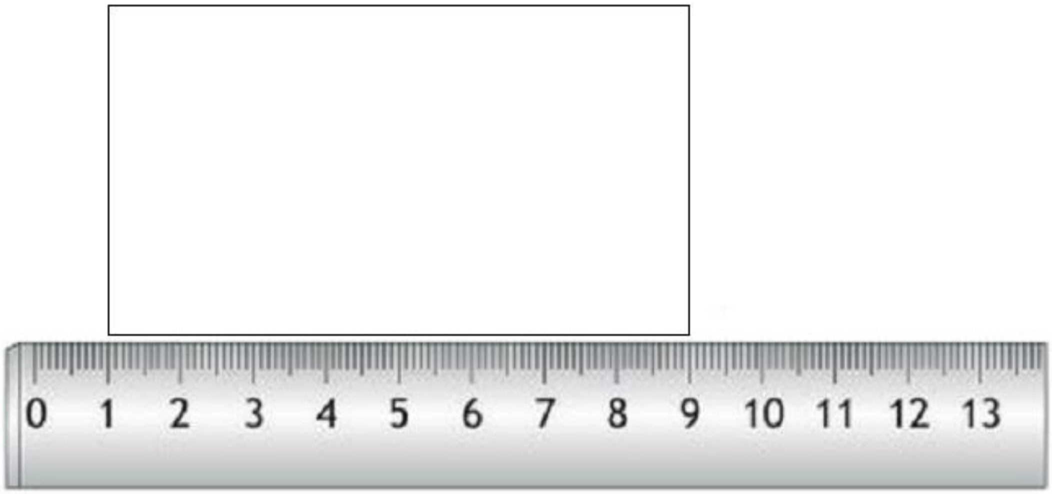


Imagen tomada de http://narceaeduplastica.weebly.com/los-instrumentos-de-dibujo-teacutecnico-y-su-manejo.html

1. A continuación se muestran tres procedimientos para medir la longitud de uno de los lados de un rectángulo.

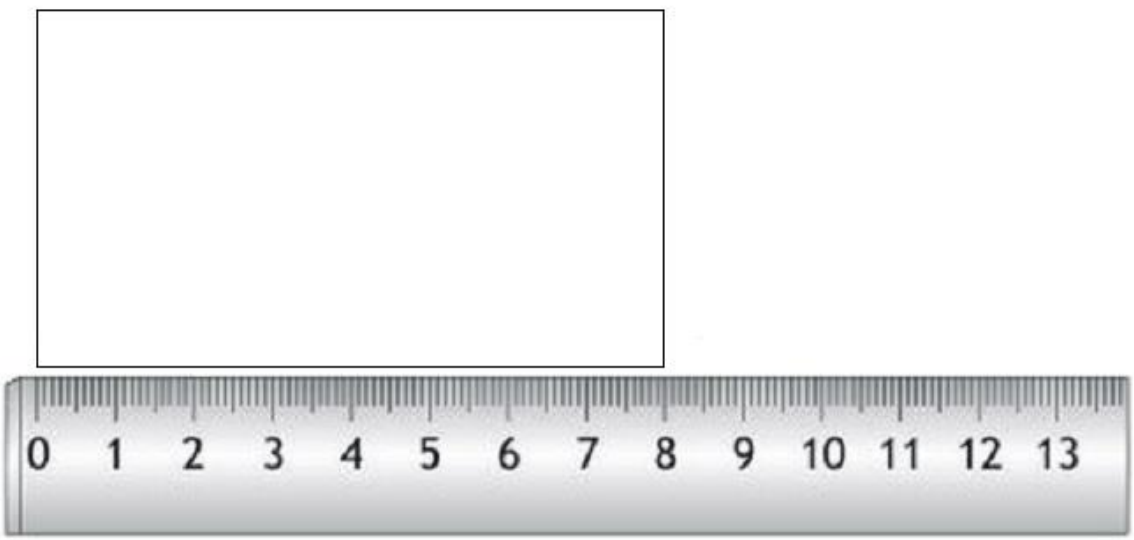
Procedimiento I

Se ubica la regla de tal manera que uno de los extremos del lado coincida con uno y se observa el número que coincide con el otro extremo. En este caso el número que coincide es 9, por lo tanto el lado mide 9 cm.



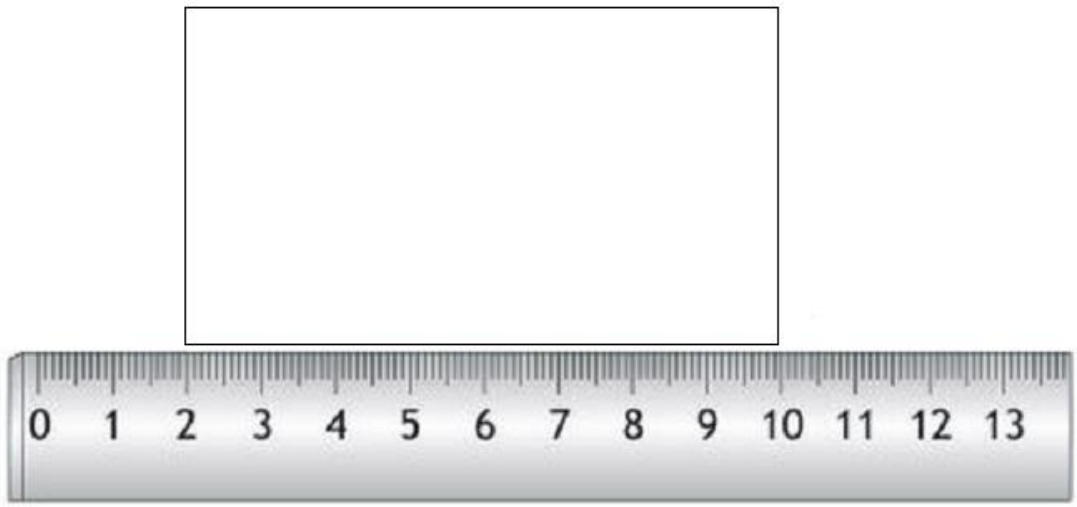
Procedimiento II

Se ubica la regla de tal manera que uno de los extremos del lado coincida con cero y se cuenta la cantidad de números que hay desde un extremo a otro. En este caso hay 9 números, por lo tanto el lado mide 9 cm.



Procedimiento III

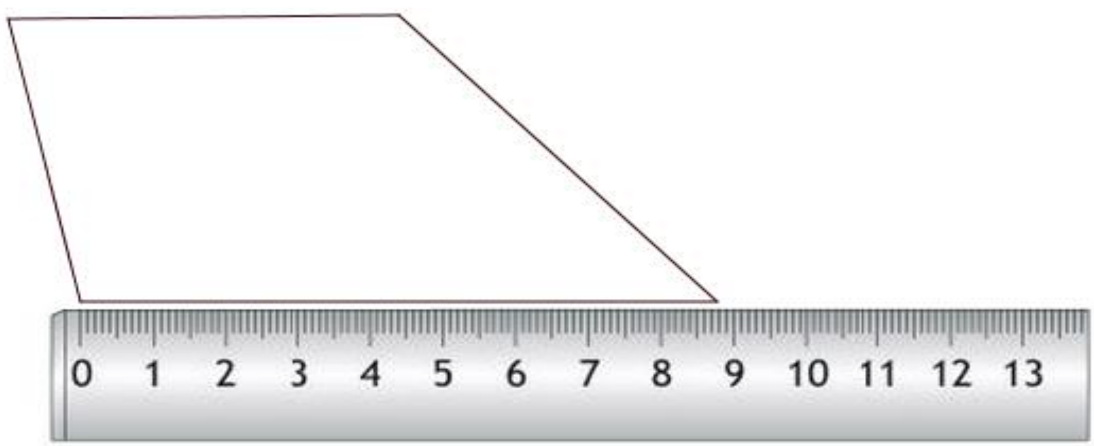
Se ubica la regla de tal manera que uno de los extremos del lado coincida con cualquier número y se cuenta la cantidad de espacios (cm) que hay desde un extremo a otro. En este caso hay 8 espacios, por lo tanto el lado mide 8 cm.



De los tres procedimientos solo es correcto el tercero.

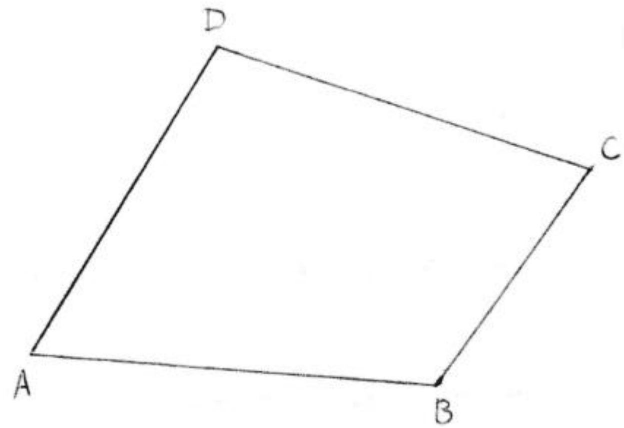
a) Para que el uso de la regla graduada representado en las otras imágenes sea correcto, ¿cómo deben formularse los procedimientos?
b) ¿Qué procedimiento es más efectivo en términos de tiempo y precisión? Explica.
c) Usa la regla graduada para medir la longitud de todos los lados de la siguiente figura (escribe la cantidad en el lugar correspondiente) :

2. Observemos lo que sucede en la siguiente situación:



El lado indicado no alcanza a medir 9 centímetros, entonces hacemos uso del milímetro, que es 10 veces más pequeño que el centímetro. De esta manera decimos que ese lado mide 8 cm y 8 mm adicionales, que es lo mismo que decir 88 mm, dado que 1 cm equivale a 10 mm.

Usa la regla graduada para medir la longitud de todos los lados de la siguiente figura:



$m\overline{AB} =$ $\boxed{}$

$m\overline{BC} =$ $\boxed{}$

$m\overline{CD} =$ $\boxed{}$

$m\overline{DA} =$ $\boxed{}$

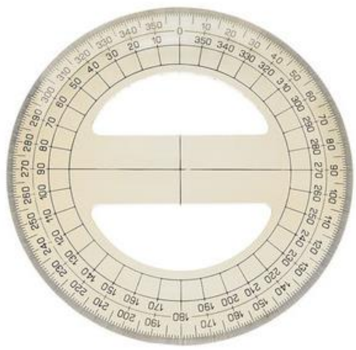
Tarea 2

“Usemos correctamente el graduador”

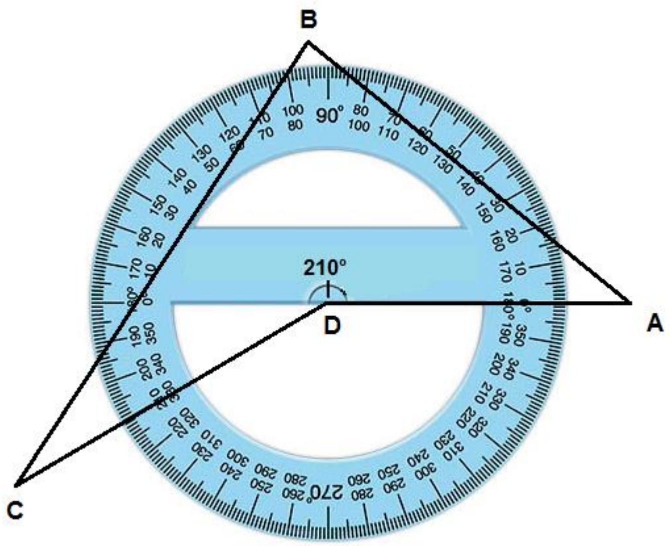
Objetivo:

Fortalecer el desarrollo de habilidades en la medición de ángulos usando el graduador (transportador).

El *graduador*, llamado también *transportador*, es un instrumento de construcción y medición de ángulos. Suele hallarse en dos presentaciones, como se ilustra a continuación.

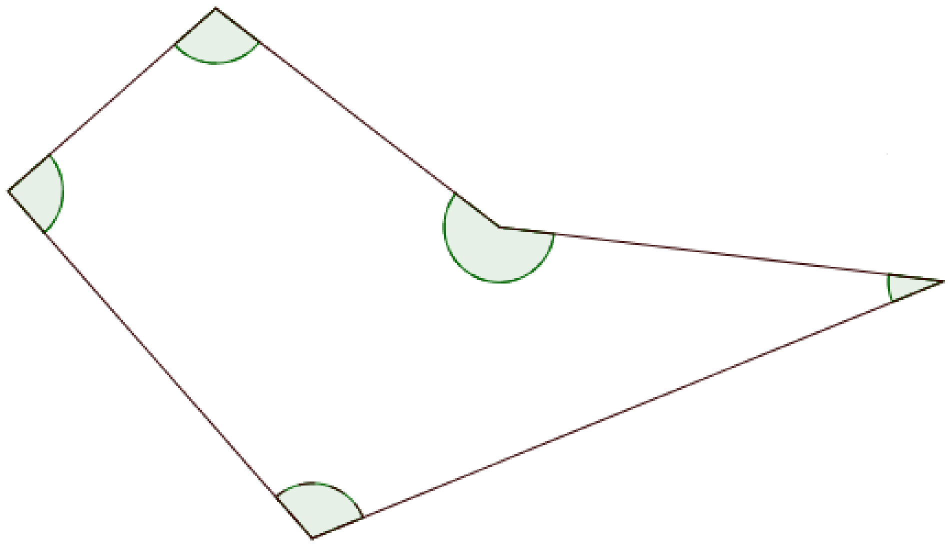


A continuación veremos cómo se pueden medir los ángulos internos de una figura geométrica, usando el graduador:

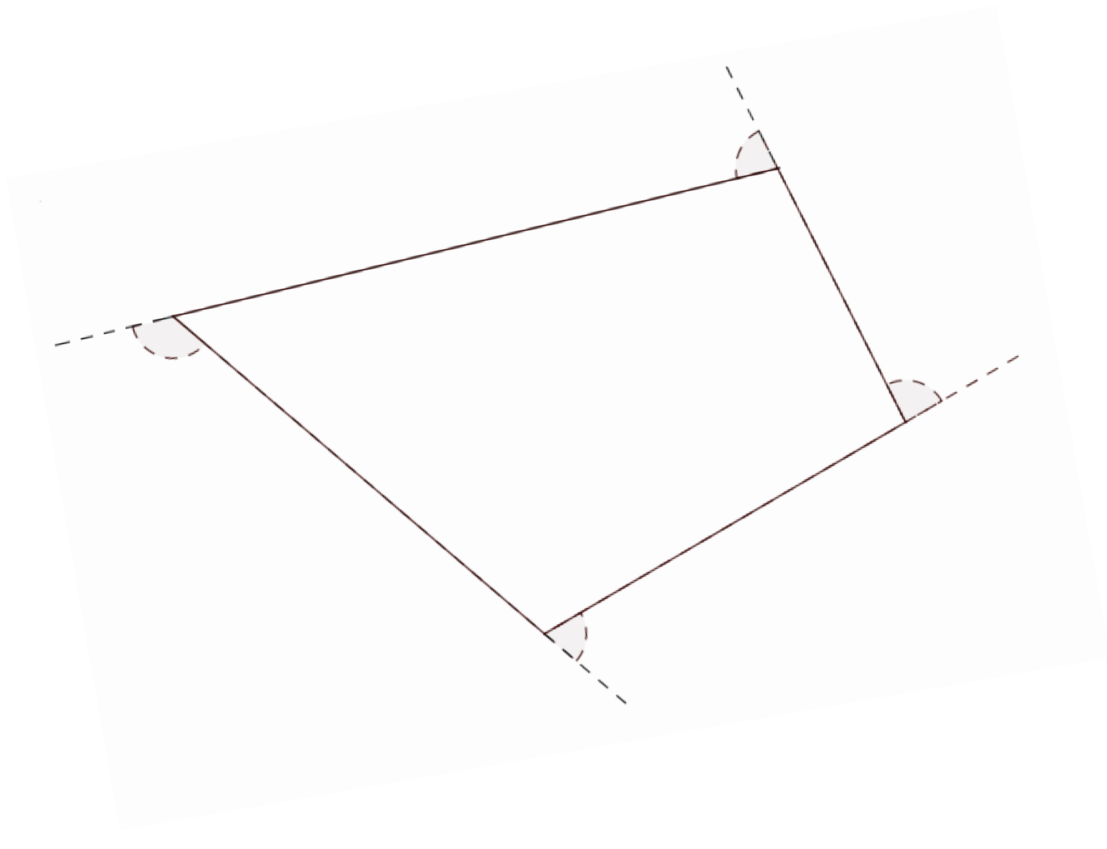


El centro del graduador se hace coincidir con el vértice del ángulo a medir; luego, se hacen coincidir los ceros del graduador con uno de los lados del ángulo (el lado $\overline{DA}$, en este caso) y se inicia el conteo de grados en el orden correspondiente (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, en este caso). De esta forma se concluye que el ángulo indicado mide 210°.

1. Usa el graduador para medir los ángulos internos de la siguiente figura (escribe las medidas en el lugar que corresponda):



2. Mide los ángulos externos de la siguiente figura:



Tarea 3

“Representemos cuadriláteros con nuestros movimientos”

Expectativas de aprendizaje:

- Utilizar el transportador y la regla graduada para medir giros y recorridos.
- Representar figuras geométricas a partir de prácticas de recorrido y giro.

Paso 1. Conformen equipos de tres integrantes y definan roles. Uno será *el caminante*, quien hará los recorridos y giros que sus compañeros le indiquen; los otros dos serán *los guías*, que son los que medirán y trazarán la trayectoria de los recorridos que haga *el caminante*. Debe haber también alguien que se encargue de escribir o dibujar, ese será el relator.

Caminante (representante): ___________________________

Relator: ____

Guías: ____

Paso 2. Definan de forma libre un punto de partida (señálenlo en el piso) y una dirección, mediante el trazado de una línea recta. Marquen con una flecha el otro extremo.

Paso 3.

Tipo 1. El caminante recorrerá una distancia de 120 cm en la dirección elegida. Luego hará un giro de 90° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj). El caminante repetirá el procedimiento hasta volver al punto de partida. Los guías garantizarán que el recorrido quede debidamente trazado.

Tipo 2. El caminante recorrerá una distancia de 120 cm en la dirección elegida. Luego hará un giro de 90° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y recorrerá una distancia de 80 cm. El caminante repetirá el procedimiento hasta volver al punto de partida. Los guías garantizarán que el recorrido quede debidamente trazado.

Tipo 3. El caminante recorrerá una distancia de 120 cm en la dirección elegida. Luego hará un giro de 60° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y recorrerá una distancia de 80 cm. Después hará un giro de 120° en el mismo sentido, y recorrerá una distancia de 120 cm. Por último, hará un giro de 60° y caminará 80 cm, llegando al punto de partida. Los guías garantizarán que el recorrido quede debidamente trazado.

Tipo 4. El caminante recorrerá una distancia de 120 cm en la dirección elegida. Luego hará un giro de 120° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y recorrerá una distancia de 164 cm. Después hará un giro de 150° (en el mismo sentido de las manecillas del reloj), recorrerá una distancia de 120 cm. Por último, hará un giro de 120° (en el mismo sentido) y caminará 164 cm, llegando al punto de partida. Los guías garantizarán que el recorrido

Tipo 5. El caminante recorrerá una distancia de 120 cm en la dirección elegida. Luego hará un giro de 135° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y recorrerá una distancia de 90 cm. Después hará un giro 60° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), y recorrerá una distancia de 120 cm. Por último, hará un giro de 45° y caminará 150 cm y se detendrá. Los guías garantizarán que el recorrido quede debidamente trazado.

Paso 4. Hagan un dibujo de la figura, señalando los recorridos y giros.

Espacio para el dibujo

Tarea 4

“Reconozcamos los cuadriláteros”

Expectativas de aprendizaje:

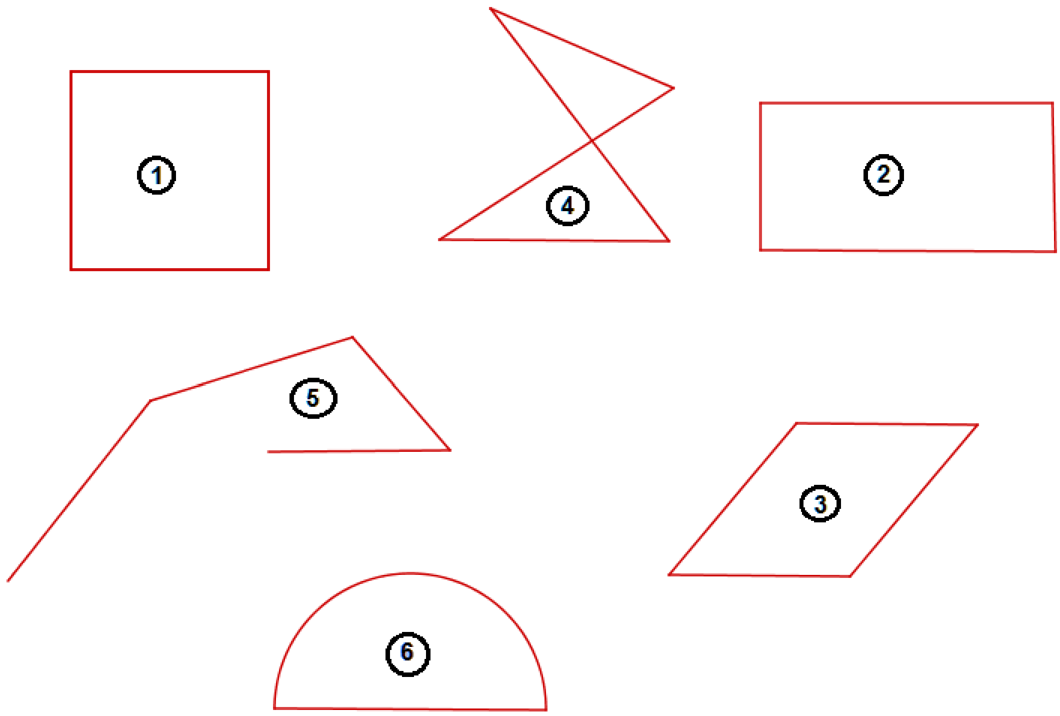
1. Identificar en una figura geométrica aspectos del contorno como: tipo de líneas, cerradura y regiones encerradas.

2. Reconocer el cuadrilátero como la representación de una figura geométrica de contorno recto, de cuatro lados, cerrado y que encierra una sola región.

3. Definir el cuadrilátero usando las características reconocidas.

Observa y recuerda:

Éstas son las figuras trabajadas en la actividad anterior, más una que se adicionó posteriormente. Deben tenerlas en cuenta para atender a las consignas planteadas.



Consignas:

1. De acuerdo a las figuras construidas, completen la siguiente tabla, marcando con una X donde corresponda:

Características de las figuras										
Figura	Tramos de recorrido		Recorrido completo		Regiones encerradas			Cruce de caminos	
	Rectos	Curvos	Cerrado	Abierto	Ninguna	Una	Varias	Sí	No
1									
2									
3									
4									
5									
6									

Si las figuras 1, 2 y 3 son cuadriláteros, ¿Qué es un cuadrilátero? Sugerencia: usa la información de la tabla.

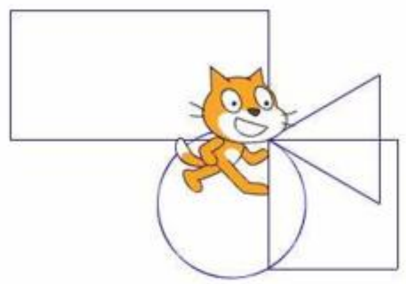
____

____

____

Tarea 5

“Dibujemos cuadriláteros con Scratch”

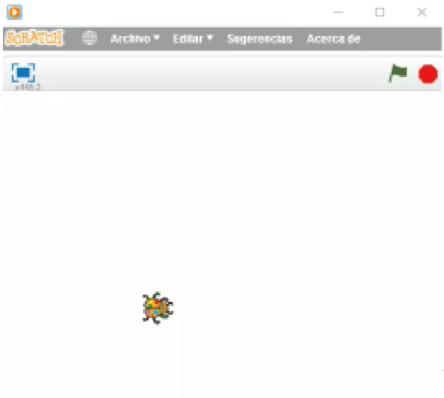


Expectativas de aprendizaje

- Identifica los comandos de “Movimiento”, “Lápiz”, “Control” y “Eventos” de Scratch, necesarios para dibujar polígonos.
- Concatena de forma lógica los bloques de Scratch para producir, en el escenario, recorridos y giros de un objeto y el trazado de trayectoria.

Consignas

1. Observa el movimiento del insecto (haz clic en la imagen) y trata de describirlo.



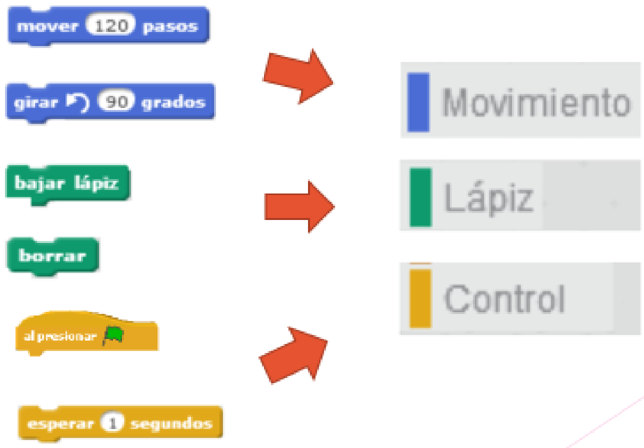
2. Observa el trazado que hace el insecto y trata de describirlo.

A cada movimiento del insecto se le puede asociar con un comando (bloque) del programa Scratch

mover 120 pasos	El insecto se mueve en línea recta 120 unidades
girar ↺ 90 grados	El insecto gira 90° en el sentido contrario a las manecillas del reloj
esperar 1 segundos	El insecto se detiene por un segundo
bajar lápiz	El insecto traza líneas mientras se mueve
borrar	El programa borra todo lo realizado por el insecto.
al presionar	Es la orden para que el programa realice todos los pasos

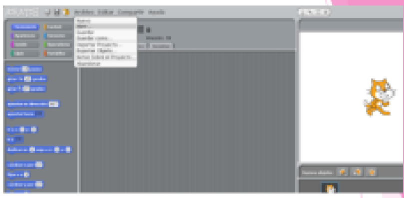
3. Una los bloques de tal manera que corresponda a la secuencia de movimientos del insecto y pégalos en la hoja de respuesta (revisa de nuevo el video)

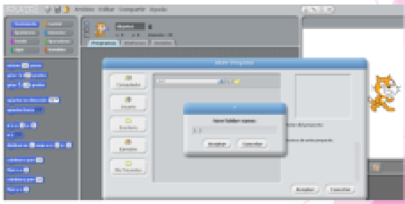
4. Haz lo mismo que en el punto anterior, pero esta vez usando el programa Scratch

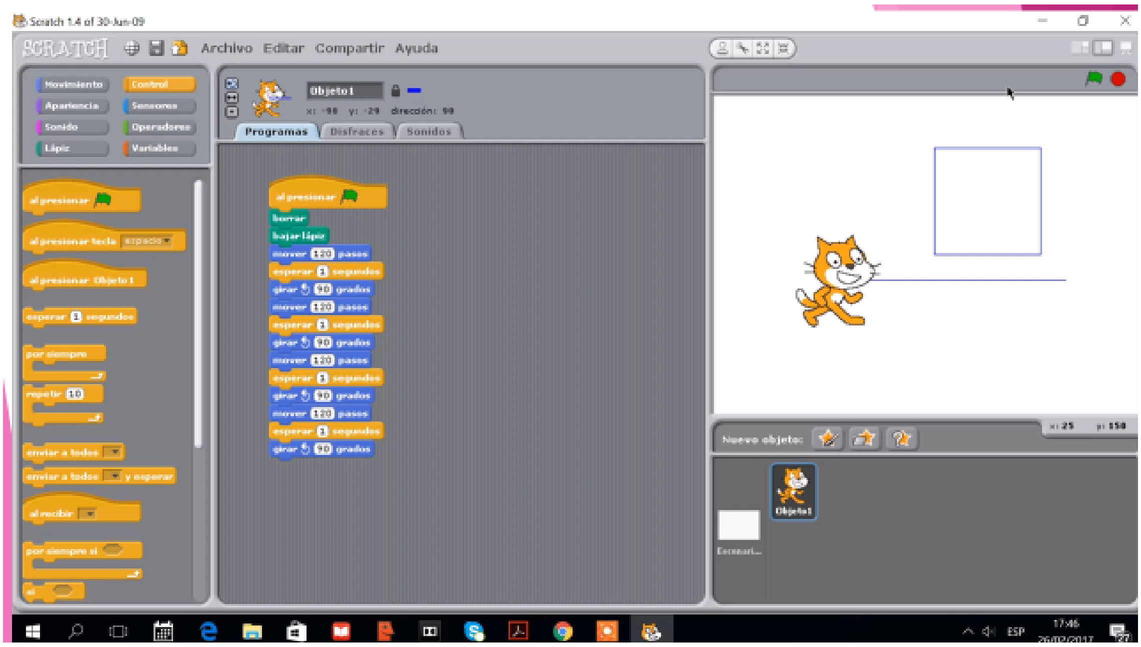


Arrastra los bloques correspondientes hasta la zona de programación y únalos. Prueba el programa haciendo un solo clic en la bandera ver en la parte superior del escenario.

5. Guarda el proyecto en el escritorio con el nombre de tesis 1 siguiendo las instrucciones del siguiente tutorial.







Tarea 5

"Dibujemos figuras geométricas con Scratch"

Hoja de Registro

1. ____

2. ____

3.

Tarea 6

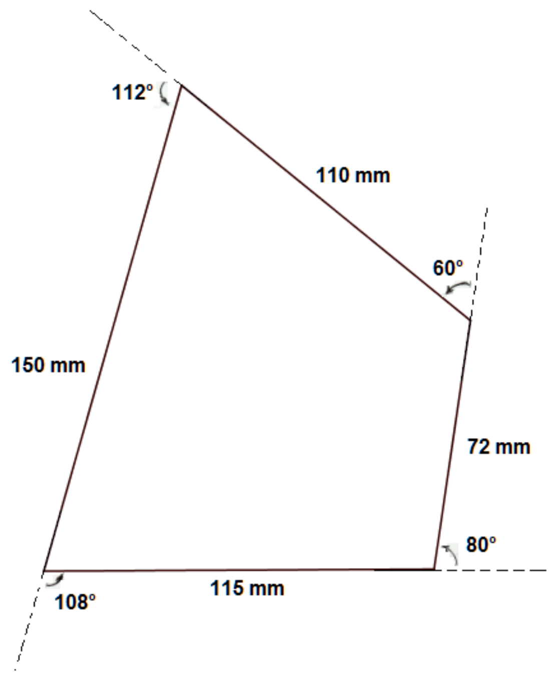
“Reconozcamos cuadriláteros según el sentido de sus giros”

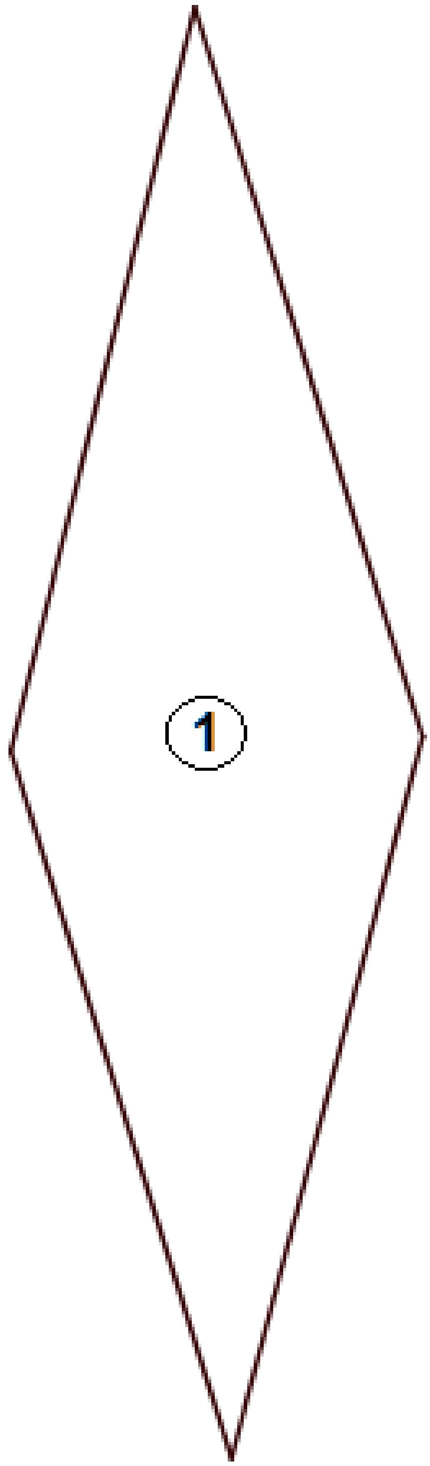
Expectativas de aprendizaje

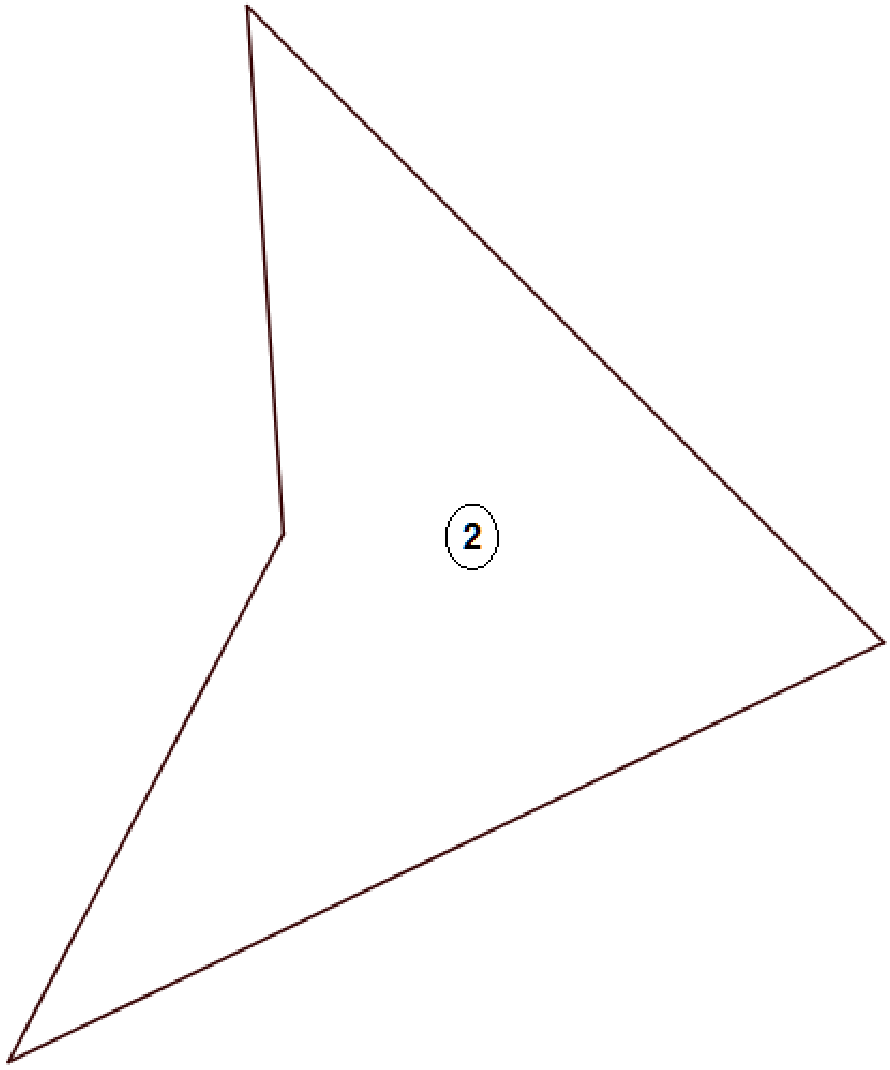
- Representa cuadriláteros en forma algorítmica, utilizando Scratch.
- Compara el sentido de los giros en cada representación algorítmica.
- Establece un patrón de regularidad a partir del sentido de los giros.

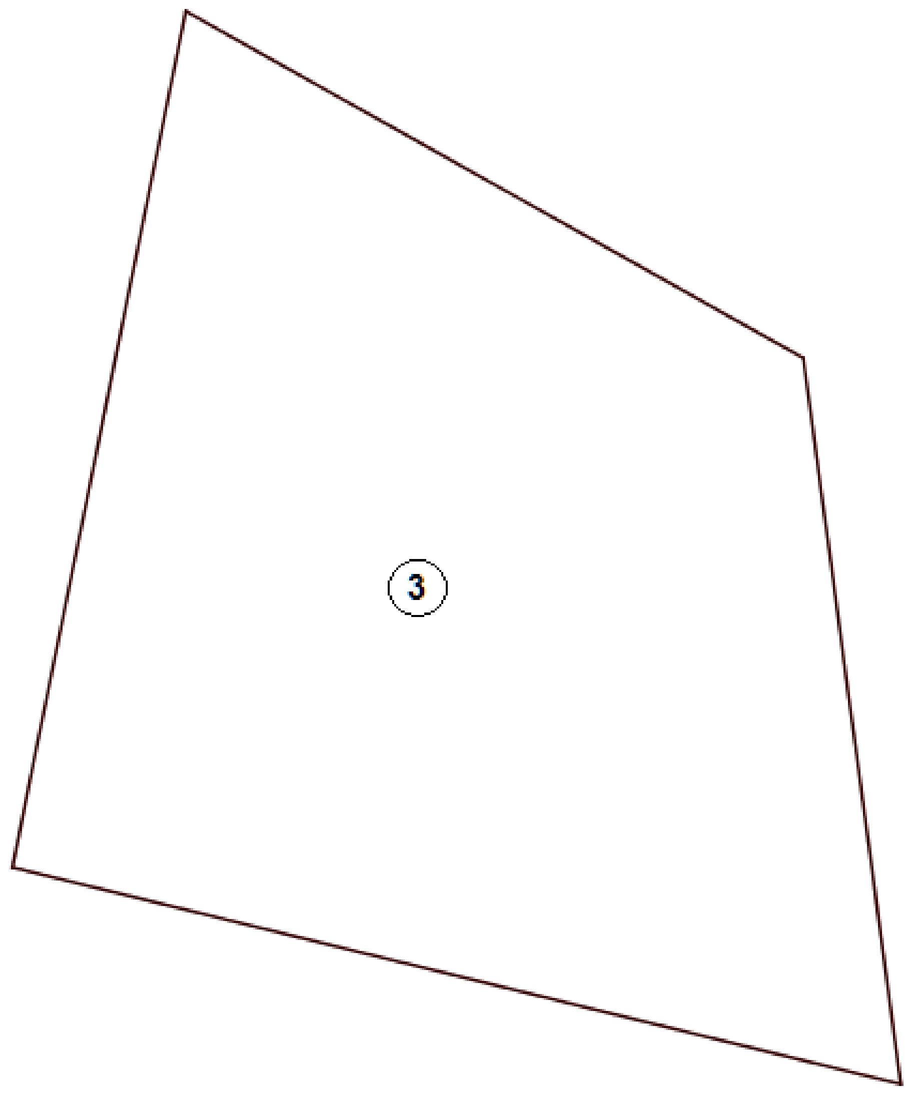
Consignas

1. Para cada uno de los tres cuadriláteros que se muestran a continuación, haz el recorrido comenzando desde cualquier vértice, marcando los giros. Usa la regla y el graduador para tomar las medidas de las longitudes (en milímetros) y los ángulos de giro; escríbanlas al lado de la magnitud que correspondiente, como se muestra en la figura:




1


2



2. Diseñen un programa de dibujo en Scratch para cada uno de los anteriores cuadriláteros. Guarden cada programa de la forma como se les indicó en la sesión anterior, Etiquetándolos como: cuadrilátero1, cuadrilátero2 y cuadrilátero3.

   Recomendación: los “pasos” en Scratch no se corresponden con ninguna unidad en el mundo físico, pues su tamaño depende del tamaño de la pantalla del ordenador y su configuración, por lo tanto se recomienda que cada milímetro se traduzca en “pasos” de Scratch.

3. Registren cada uno de los algoritmos y observen el sentido de los giros en cada uno de ellos. ¿Qué se puede decir?

Sugerencia: dibujen solo los bloques de movimiento.

1	2	3

____
____
____

4. Hay un cuadrilátero que no es como los otros, ¿cuál es?________________________

   ¿Cuál es la razón?

   ____
   ____

5. Escribe en tu cuaderno las definiciones que tu profesor acuerde con todo el grupo.

Tarea 7

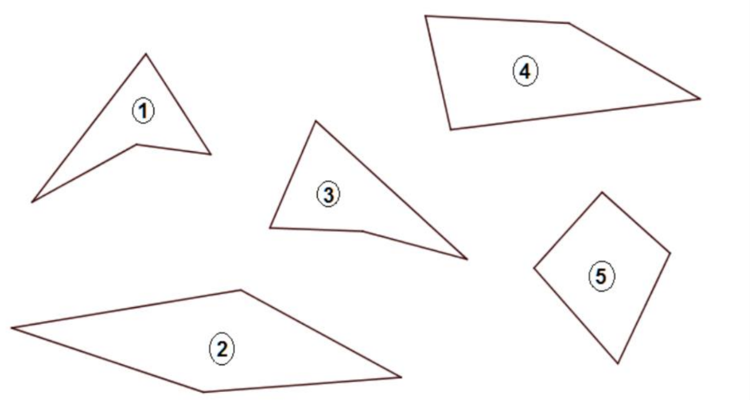
“Clasifiquemos cuadriláteros según el sentido de sus giros”

Expectativas de aprendizaje

- Agrupa cuadriláteros según el sentido de los giros de su recorrido.
- Formula definiciones para cuadriláteros cóncavos y convexos.

Consignas

1. En la tarea anterior se distinguieron dos tipos de cuadriláteros, según el sentido de los giros en su recorrido. Clasifica los siguientes cuadriláteros en convexos y cóncavos:



2. Las siguientes frases inconclusas corresponden a las definiciones de los cuadriláteros cóncavos y convexos. Complétalas.

a) Un ________________________________ es aquel cuyos ________________ de recorrido se hacen siempre en el mismo ____________________.

b) Un ______________________________ es aquel en el que se realiza un ___________________ de recorrido en el sentido ______________________ al de los otros.

Tarea 8

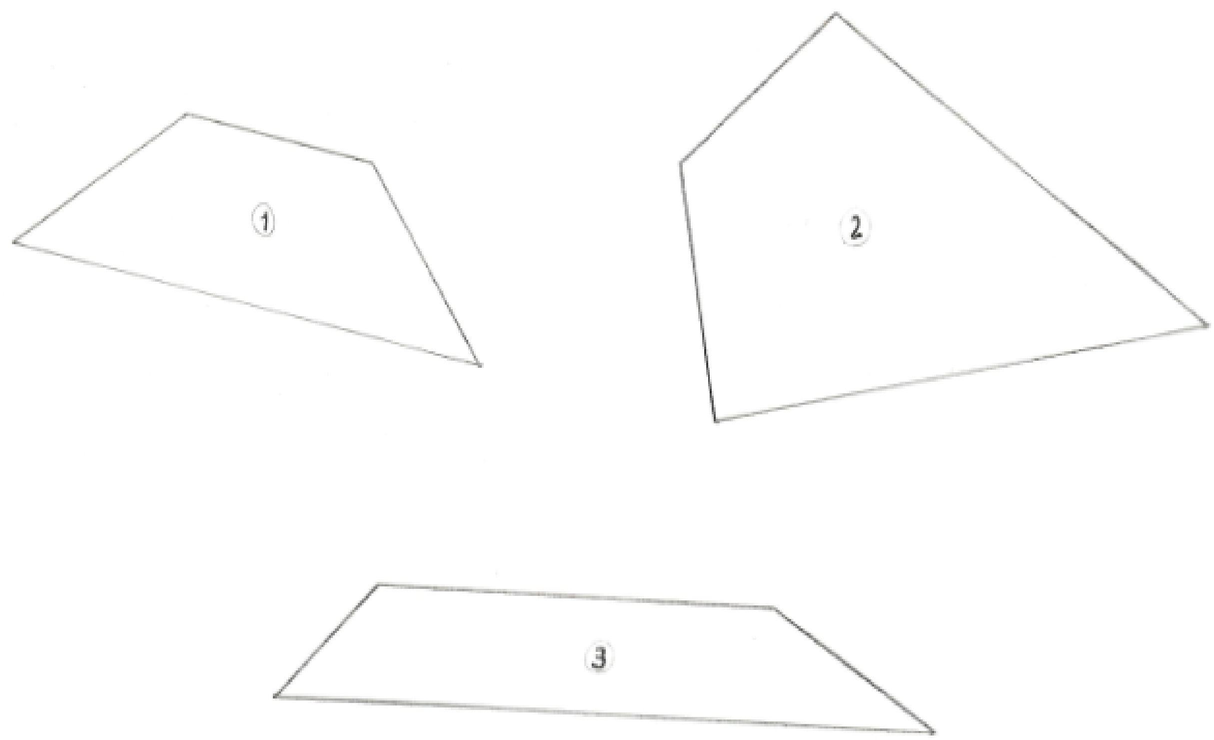
“Clasifiquemos cuadriláteros convexos en trapecios y trapezoides”

Expectativas de aprendizaje

Clasifica los cuadriláteros convexos en trapecios y trapezoides, a partir del criterio de complementariedad de giros sucesivos (paralelismo).

Consignas

1. A continuación presentamos tres cuadriláteros. Verifica primero si son convexos; luego, diseña, para cada uno, un programa de dibujo en Scratch.



2. Representa en papel los algoritmos que ustedes diseñaron para dibujar cada cuadrilátero. Haz las sumas de las medidas de los ángulos sucesivos (aquellos que se siguen uno a otro). No olvides excluir los bloques de control y lápiz.

1	2	3
____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____	____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____	____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____ ____ + ____ = ____

3. Distingue dos tipos de cuadriláteros y describe tu criterio de clasificación.

Grupo 1:

____

____

____

Grupo 2:

____

____

____

4. Escribe en tu cuaderno las definiciones que tu profesor acuerde con todo el grupo.

Tarea 9

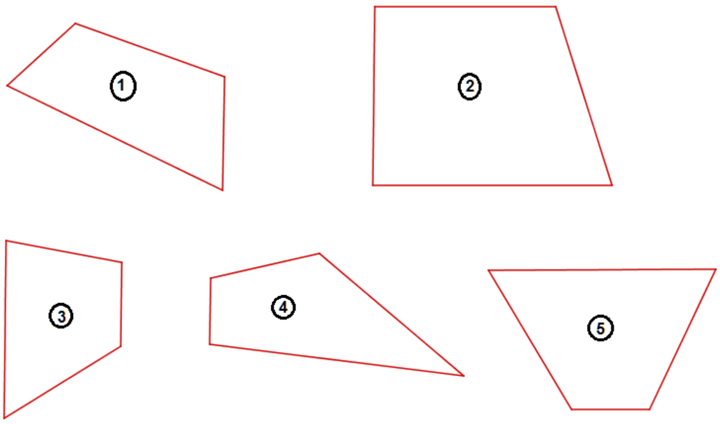
“Definamos trapecios y trapezoides”

Expectativas de aprendizaje

- Formula definiciones para trapecios y trapezoides.

- Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado cuadrilátero es trapecio o trapezoide.

1. En la tarea anterior se distinguieron dos tipos de cuadriláteros convexos, los trapecios y los trapezoides. De los siguientes cuadriláteros, ¿cuáles son trapecios y cuáles trapezoides? Sugerencia: traza las líneas de dirección y mide los ángulos de giro.



Trapecios: ____

Trapezoides: ______________________________________

Explica por qué los agrupaste de esa forma:

2. Completa las siguientes frases:

c) Un trapecio es un cuadrilátero _________________ que tiene al menos un par de lados __________________________.

d) Un __________________ es un cuadrilátero convexo que no ______________ un par de lados paralelos.

Tarea 10

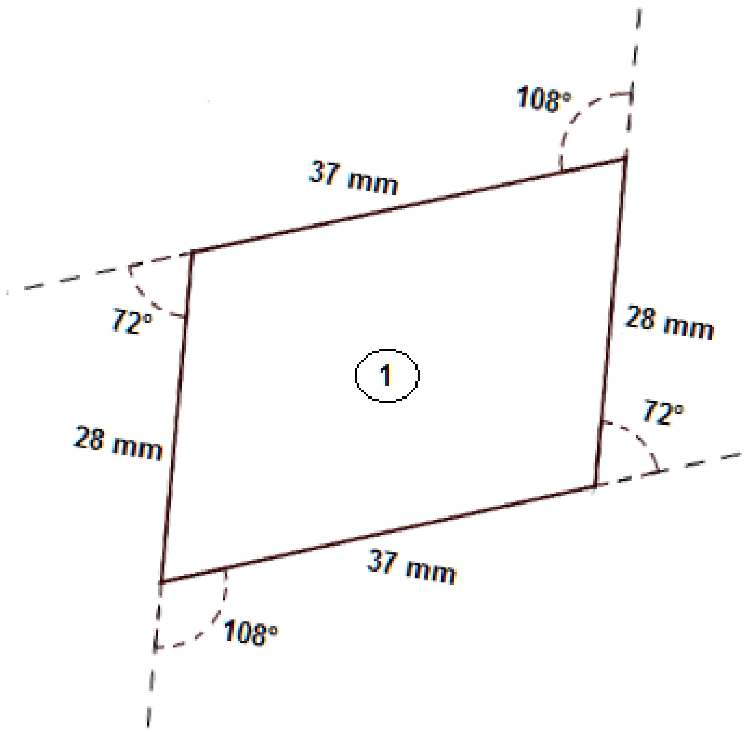
“Reconozcamos paralelogramos”

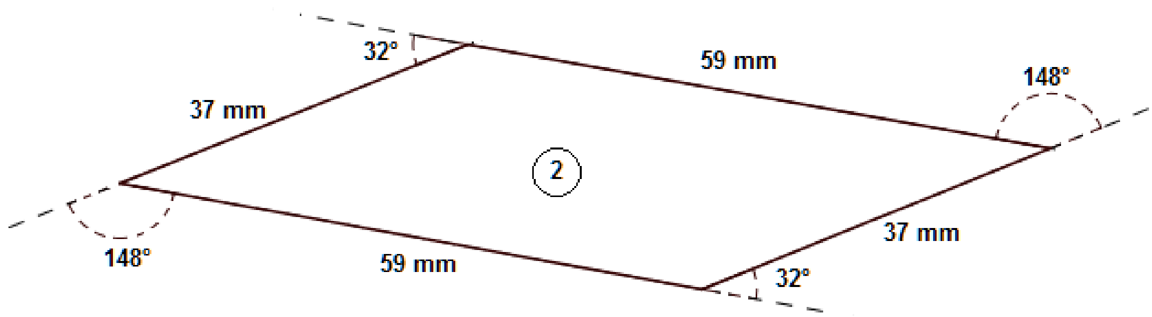
Expectativas de aprendizaje

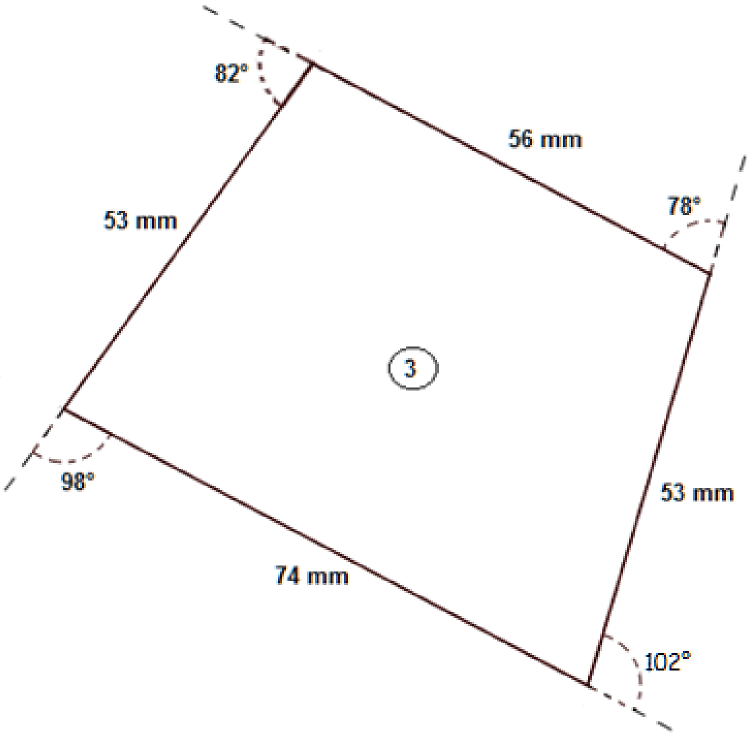
Clasifica trapecios a partir del criterio de complementariedad en dos parejas de giros sucesivos.

Consignas

1. A continuación presentamos tres trapecios con sus respectivas medidas. Diseña, para cada uno, un algoritmo de dibujo para Scratch. No olvides excluir los bloques de control y lápiz.







1	2	3
2. Suma las medidas de los ángulos de giro sucesivos.		

______ + _____ = ______	______ + ______ = ______	______ + ______ = ______
______ + _____ = ______	______ + ______ = ______	______ + ______ = ______
______ + _____ = ______	______ + ______ = ______	______ + ______ = ______
______ + _____ = ______	______ + ______ = ______	______ + ______ = ______

3. Con base a la anterior información, di cuántas parejas de lados paralelos tiene cada trapecio.

Trapecio 1: ____________

Trapecio 2: ____________

Trapecio 3: ____________

4. Usa esta información para clasificar los trapecios en dos grupos.

Grupo 1: _____________

Grupo 2: _____________

5. Escribe en tu cuaderno las definiciones que tu profesor acuerde con todo el grupo.

Tarea 11

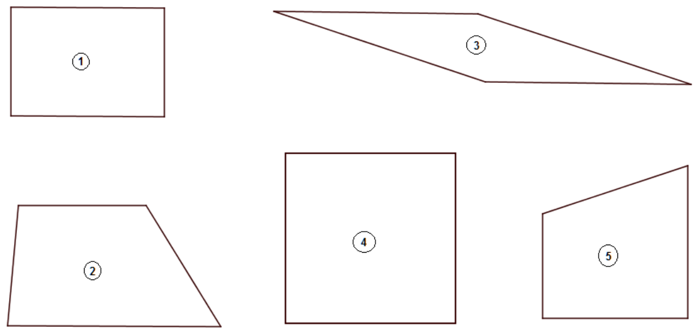
“Definamos paralelogramos y trapecios no paralelogramos”

Expectativas de aprendizaje

- Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado trapecio es paralelogramo o no paralelogramo.
- Formula definiciones de paralelogramos y trapecios no paralelogramos.

Consignas

1. En la tarea anterior se distinguieron dos tipos de trapecios, los paralelogramos y los no paralelogramos. De los siguientes trapecios, ¿cuáles son paralelogramos? Sugerencia: traza las líneas de dirección, mide los ángulos de giro y chequea si hay dos parejas de lados paralelos.



Paralelogramos: ______________________

Trapecios no paralelogramos: ___________

Explica por qué los agrupaste de esa forma:

____

____

2. Completa las siguientes frases:

a) Un paralelogramo es un ________________ que tiene dos pares de lados ________________________.

b) Un _________________ no paralelogramo es un trapecio que solo tiene _________________ de lados paralelos.

Tarea 12

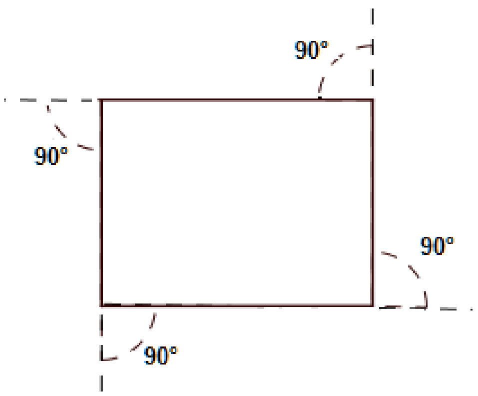
“Definamos rectángulos y cuadrados”

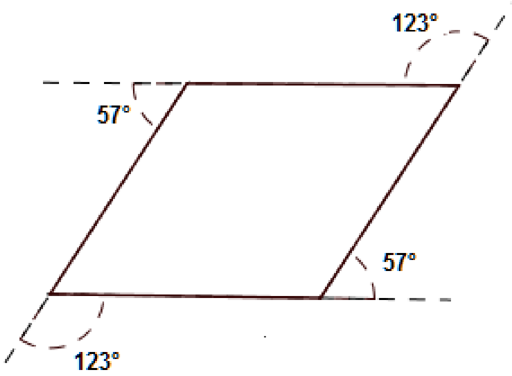
Expectativas de aprendizaje

- Explica, de forma escrita, las razones por las cuales un determinado paralelogramo es rectángulo y un determinado rectángulo es cuadrado.
- Formula, de forma inclusiva, definiciones para rectángulos y cuadrados.

Consignas

1. Ya hemos visto que los rectángulos pertenecen a la familia de los paralelogramos pero, ¿cómo podríamos definirlos? A continuación se muestra dos paralelogramos con las medidas de los ángulos de giro; uno de ellos es rectángulo. ¿Notan alguna diferencia entre ellos? ¿cuál?



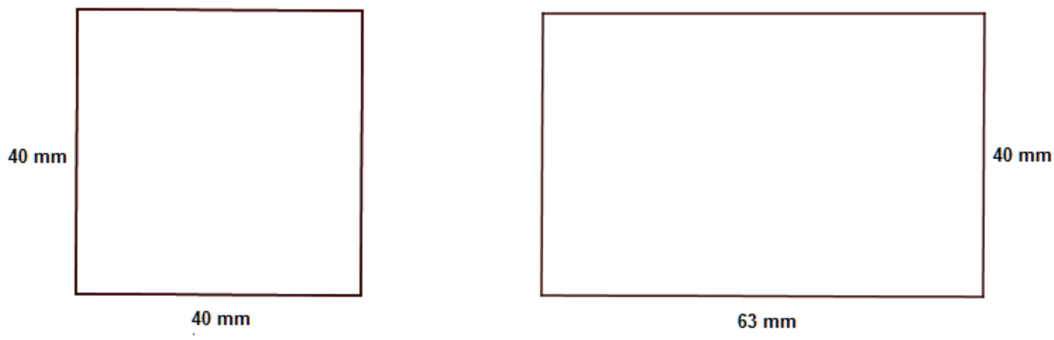


____
____

Formulen una definición de rectángulo:

____
____
____

2. De lo anterior, también se puede deducir que los cuadrados pertenecen a la familia de los rectángulos pero, ¿cómo podríamos definirlos? A continuación se muestra dos rectángulos con las medidas de sus lados, uno de ellos es cuadrado. Notan alguna diferencia entre ellos? ¿cuál?



Formulen una definición de cuadrado:

Tarea 13

“Relacionemos y organicemos cuadriláteros”

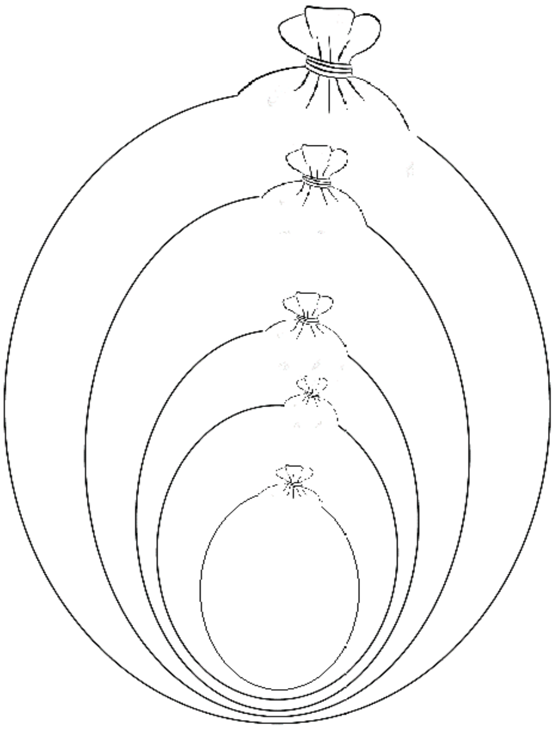
Expectativas de aprendizaje

- Establece relaciones entre diferentes tipos de cuadriláteros.
- Determina la verdad o falsedad de oraciones que relacionan dos tipos de cuadriláteros convexos y lo justifica de manera informal.

Consignas

1. En la bolsa que les ha entregado el docente encontrarán varias fichas con forma de cuadrilátero convexo. También encontrarán adentro bolsas de distinto tamaño. Guarden las fichas en la bolsa que corresponda, de tal manera que unas queden dentro de otras, como se indica en la figura. Etiqueten las bolsas con los nombres que aparecen a continuación. Escriban también en la figura los nombres que correspondan a cada bolsa.

ETIQUETAS
Cuadriláteros convexos
Cuadrados
Trapecios
Rectángulos
Paralelogramos



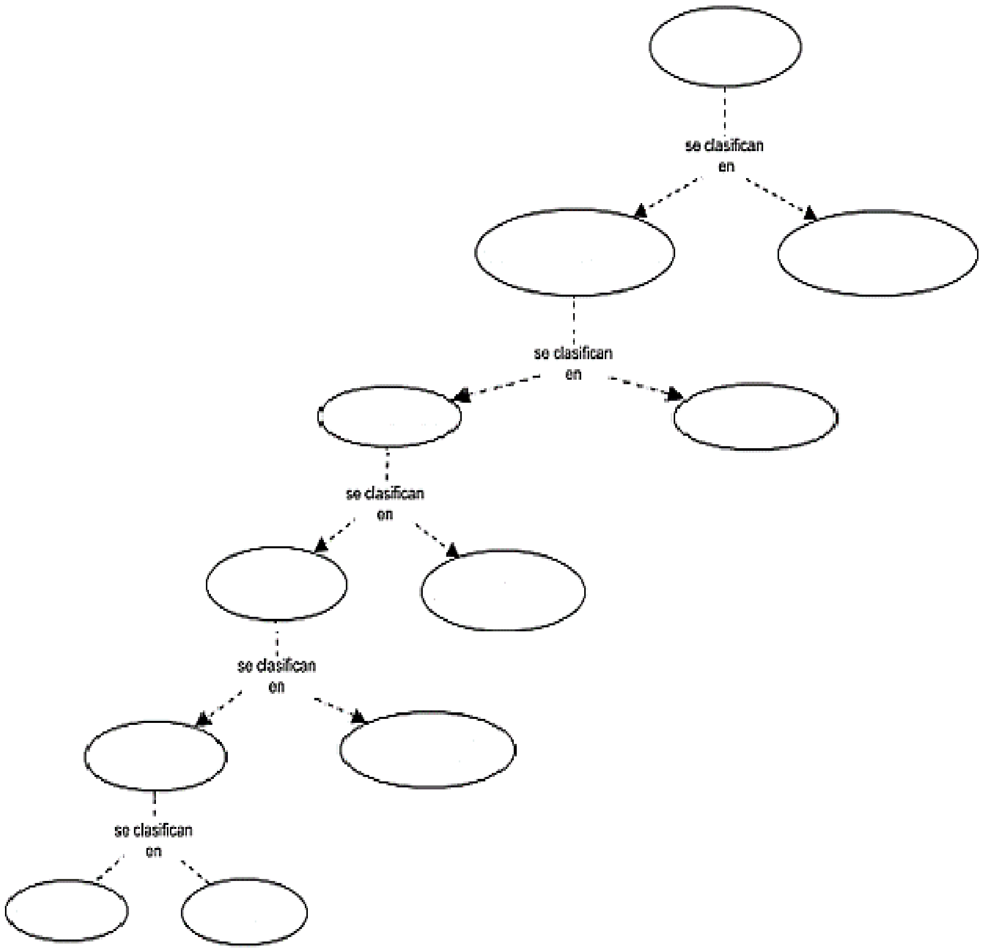
2. Completen el siguiente diagrama de clasificación con las palabras que se indican:

Cuadrados | Paralelogramos | Trapecios no paralelogramos

Cuadriláteros | Cuadriláteros convexos | Rectángulos

Cuadriláteros cóncavos | Rectángulos no cuadrados | Trapecios

Paralelogramos no rectángulos | Trapezoides



3. Lean con atención cada una de las características que aparecen en la tabla y marquen con (**X**) la columna de los cuadriláteros que la satisfagan. Aclaración: una característica puede ser compartida por varios cuadriláteros, por lo tanto una fila puede tener más de una **X.**

Características	CUADRILATERO CONVEXO	CUADRILATERO CONCAVO	TRAPECIO	TRAPEZOIDE	PARALELOGRAMO	RECTANGULO	PARALELOGRAMO NO RECTANGULO	CUADRADO
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido o la cantidad de vértices coincide con la de la de sus puntas.								
Cuadrilátero donde un ángulo de giro va en sentido contrario al de los demás.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido y tiene al menos un par de lados opuestos paralelos.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, pero no posee una pareja de lados opuestos paralelos.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido y tiene dos parejas de lados opuestos paralelos.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos y además cuyos lados consecutivos son perpendiculares entre sí.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos, pero sus lados consecutivos no son perpendiculares entre sí.								
Cuadrilátero cuyos ángulos de giro van en el mismo sentido, posee dos parejas de lados opuestos paralelos, sus lados consecutivos son perpendiculares entre si y además, sus lados tienen la misma medida.								

4. Determinen si la oración es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera justifiquen su respuesta; de lo contrario, den un ejemplo que muestre su falsedad. La justificación puede apoyarse en dibujos o esquemas.

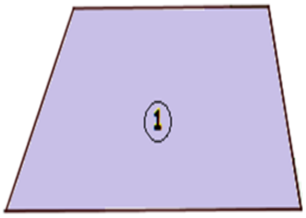
   a) Todo **cuadrado** es un **rectángulo**.

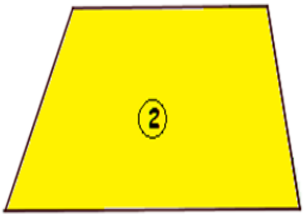
b) Todo **paralelogramo** es un **rectángulo.**

c) Todo **rectángulo** es un **trapecio**.

d) Existen **rectángulos** que no son **cuadrados**.

5. Utiliza los instrumentos de trazado y medición (regla y transportador) para formar un cuadrilátero uniendo los trapecios no paralelogramos 1 y 2. Di el nombre del cuadrilátero formado y la medida de sus lados y ángulos de giro. Sugerencia: Gira imaginariamente el trapecio no paralelogramo #2 y busca acoplarlos para formar el cuadrilátero.

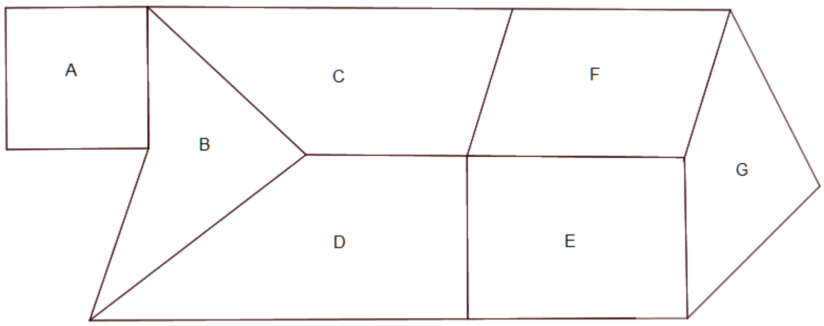




Anexo 3

PRUEBA FINAL

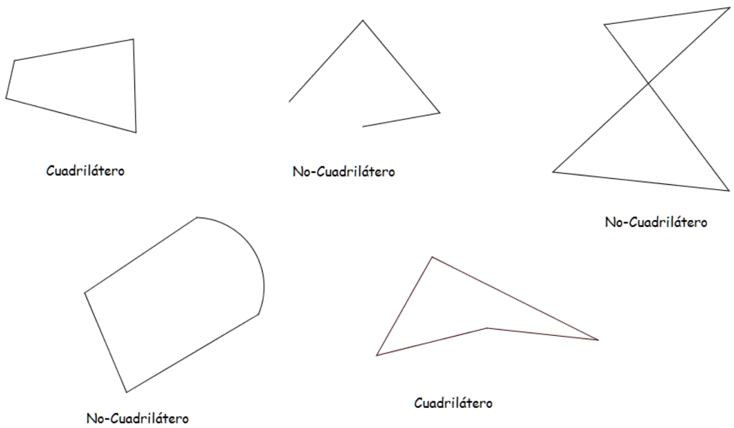
1. La siguiente figura representa un lote divido en varias partes. El padre dejó este lote como herencia a sus siete hijos.



En su testamento declaró la distribución de cada lote. Ayúdale los hijos a identificar su lote y escribe debajo de cada uno la letra correspondiente al cuadrilátero indicado.

Hijo	Brayan	Sofía	Claudia	Jhon	Luis	Laura	Andrea
Forma del lote	Cuadrilátero cóncavo	Trapecio no-paralelogramo	Trapecio no-paralelogramo con un ángulo recto	Rectángulo no-cuadrado	Cuadrado	Paralelogramo no-rectángulo	Trapezoide
Letra							

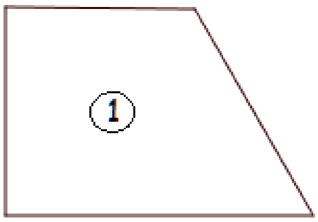
2. Observa las siguientes figuras (pregunta de selección múltiple con única respuesta):

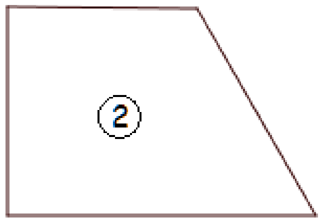


Según esta información un cuadrilátero es,

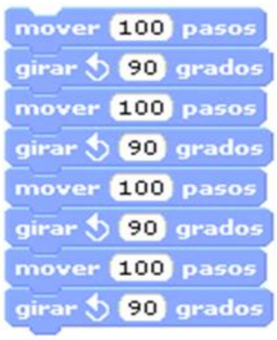
- una figura plana con varias puntas
- una recta compuesta de varios lados.
- una figura plana cerrada de tramos rectos.
- una figura plana de contorno cerrado, de tramos rectos y que encierra una sola región.

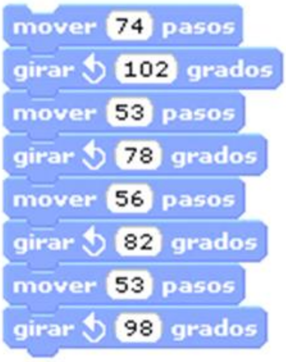
3. Utiliza los instrumentos de trazado y medición (regla y transportador) para dibujar un cuadrilátero uniendo los trapecios no paralelogramos 1 y 2. Di el nombre del cuadrilátero formado y escribe la medida de sus lados y ángulos de giro.





4. Debajo de cada representación algorítmica escribe el nombre de la familia de cuadriláteros a la que corresponde.



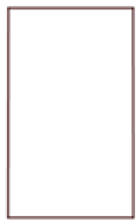


5. Lee las siguientes instrucciones de movimiento (pregunta de selección múltiple con única respuesta):

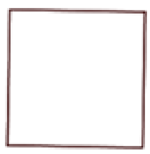
   El caminante recorrerá una distancia de 80 m en la dirección elegida. Luego hará un giro de 120° (en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y recorrerá una distancia de 120 m. Después hará un giro de 60° en el mismo sentido, y recorrerá una distancia de 80 m. Por último, hará un giro de 120° y caminará 120 m, llegando al punto de partida.

   La figura que mejor representa el recorrido hecho por el caminante es

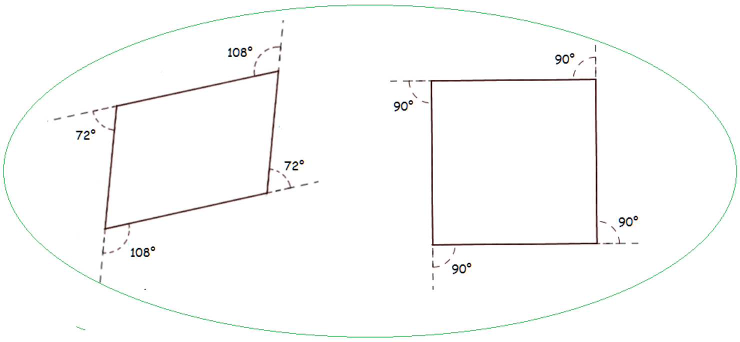
○ 

○ 

○ 

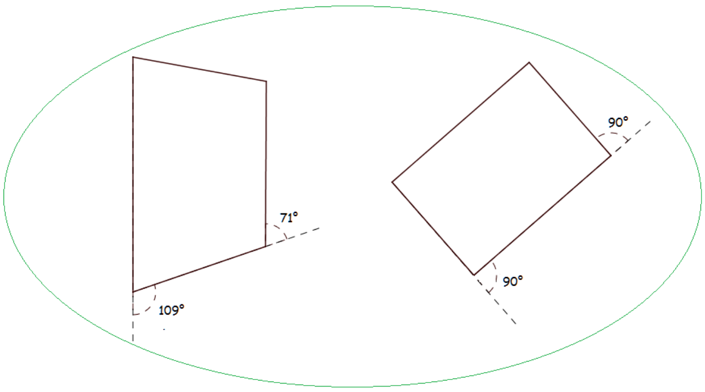
○ 

6. Recuerda que hemos estudiado los cuadriláteros según cuatro características, en el siguiente orden: 1) sentido de los ángulos de giro, 2) paralelismo, 3) perpendicularidad y 4) congruencia de lados. A continuación verás varias parejas de cuadriláteros; obsérvalas, traza una línea que conecte cada pareja con una característica que tengan en común.



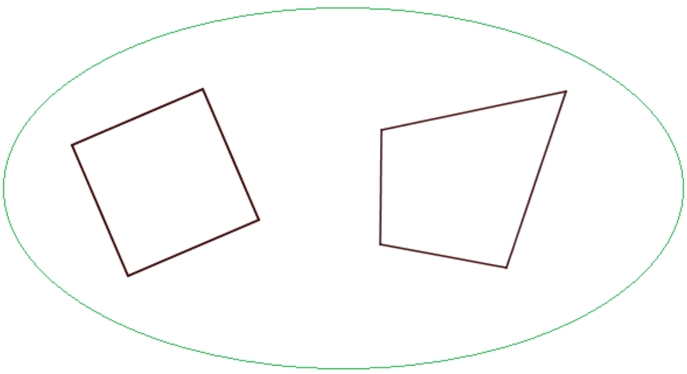
Sus ángulos de giro tienen el mismo sentido.

(Cuadriláteros convexos)



Tienen dos parejas de lados paralelos.

(Paralelogramos)



Tienen al menos una pareja de lados paralelos.

(Trapecios)

7. Define los siguientes cuadriláteros, teniendo como referencia el cuadro de características y el diagrama arbóreo:

Paralelogramo:
____
____

Rectángulo:
____
____

8. Determina si la oración es verdadera o falsa. En caso de ser verdadera justifica tu respuesta; de lo contrario, da un ejemplo que muestre su falsedad. La justificación puede apoyarse en dibujos o esquemas.

a) Todo **rectángulo** es un **paralelogramo.** V | F

b) Todo **trapecio** es un **paralelogramo.** V | F

Anexo 4

RESULTADOS LA PRUEBA DIAGNÓSTICO

Distribución de tipos de respuesta por estudiante

	Ítem						
Estudiante	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	X	X	X	X	X	2	1
2	X	X	X	X	X	6	1
3	X	X	X	X	X	4	3
4	X	X	X	X	X	2	1
5	X	X	X	X	X	4	3
6	X	X	X	X	X	6	3
7	X	X	X	X	X	6	2
8	X	X	X	X	X	2	2
9	X	X	X	X	X	4	3
10	X	X	X	X	X	2	2
11	X	X	X	X	X	2	4
12	X	X	X	X	X	3	3
13	X	X	X	X	X	6	3
14	X	X	X	X	X	3	3
15	X	X	X	X	X	6	3
16	X	X	X	X	X	6	1
17	X	X	X	X	X	1	3
18	X	X	X	X	X	3	3
19	X	X	X	X	X	6	2
20	X	X	X	X	X	2	3
21	X	X	X	X	X	6	1
22	X	X	X	X	X	3	3
23	X	X	X	X	X	2	3
24	X	X	X	X	X	3	2
25	X	X	X	X	X	3	3
26	X	X	X	X	X	2	3
27	X	X	X	X	X	1	2
28	X	X	X	X	X	1	1
29	X	X	X	X	X	6	2
30	X	X	X	X	X	6	2

X: Cumplió **X: Cumplió parcialmente** **X: No cumplió**

Grado de adquisición del nivel 2

	Ponderados (%)		Promedio	Gr(2)
Estudiante	**6**	**7**		
1	20	0	10,0	N
2	80	0	40,0	I
3	50	25	37,5	B
4	20	0	10,0	N
5	50	25	37,5	B
6	80	25	52,5	I
7	80	20	50,0	I
8	20	20	20,0	B
9	50	25	37,5	B
10	20	20	20,0	B
11	20	50	35,0	B
12	25	25	25,0	B
13	80	25	52,5	I
14	25	25	25,0	B
15	80	25	52,5	I
16	80	0	40,0	I
17	0	25	12,5	N
18	25	25	25,0	B
19	80	20	50,0	I
20	20	25	22,5	B
21	80	0	40,0	I
22	25	25	25,0	B
23	20	25	22,5	B
24	25	20	22,5	B
25	25	25	25,0	B
26	20	25	22,5	B
27	0	20	10,0	N
28	0	0	0,0	N
29	80	20	50,0	I
30	80	20	50,0	I

Anexo 5

RESULTADOS DE LA TAREA 12

Distribución de tipos de respuesta por estudiante.

	Rectángulos		Cuadrados	
Estudiante	**Diferenciación**	**Definición**	**Diferenciación**	**Definición**
1	6	4	4	4
2	6	2	7	7
3	2	4	4	2
4	3	4	6	7
5	4	4	4	4
6	4	3	4	4
7	6	4	6	4
8	6	2	4	4
9	6	4	2	6
10	2	1	3	3
11	6	6	6	4
12	6	4	4	6
13	2	3	4	2
14	4	4	6	7
15	4	1	4	6
16	4	2	6	6
17	5	4	4	7
18	4	4	6	7
19	5	2	4	6
20	6	4	5	6
21	6	4	2	7
22	6	2	4	6

Ponderado de respuestas por estudiante. Tarea

	Rectángulos		Cuadrados	
Estudiante	**Diferenciación**	**Definición**	**Diferenciación**	**Definición**
1	80	50	50	50
2	80	20	100	100
3	20	50	50	20
4	25	50	80	100
5	50	50	50	50
6	50	25	50	50
7	80	50	80	50
8	80	20	50	50
9	80	50	20	80
10	20	0	25	25
11	80	80	80	50
12	80	50	50	80
13	20	25	50	20
14	50	50	80	100
15	50	0	50	80
16	50	20	80	80
17	75	50	50	100
18	50	50	80	100
19	75	20	50	80
20	80	50	75	80
21	80	50	20	100
22	80	20	50	80

Grado adquisición de cada nivel por estudiante

	Nivel 2		Nivel 3	
Estudiante	**Promedio**	**Gr(2)**	**Promedio**	**Gr(3)**
1	65	A	50	I
2	90	C	60	A
3	35	B	35	B
4	52,5	I	75	A
5	50	I	50	I
6	50	I	37,5	B
7	80	C	50	I
8	65	A	35	B
9	50	I	65	A
10	22,5	B	12,5	N
11	80	C	65	A
12	65	A	65	A
13	35	B	22,5	B
14	65	A	75	A
15	50	I	40	I
16	65	A	50	I
17	62,5	A	75	A
18	65	A	75	A
19	62,5	A	50	I
20	77,5	A	65	A
21	50	I	75	A
22	65	A	50	I

Anexo 6

RESULTADOS DE LA TAREA 13

Distribución de tipos de respuesta por estudiante

	ÍTEM				
Parejas de estudiantes	4a	4b	4c	4d	5
1	6	2	2	4	4
2	6	4	2	4	4
3	7	7	2	4	4
4	4	4	2	4	6
5	4	6	4	4	4
6	4	4	3	4	6
7	4	4	2	4	6
8	3	3	2	6	2
9	2	2	4	2	2
10	2	2	2	4	6
11	5	5	2	7	7

Ponderado de respuestas por estudiante

Parejas de estudiantes	4a	4b	4c	4d	5
1	80	20	20	50	50
2	80	50	20	50	50
3	100	100	20	50	50
4	50	50	20	50	80
5	50	80	50	50	50
6	50	50	25	50	80
7	50	50	20	50	80
8	25	25	20	80	20
9	20	20	50	20	20
10	20	20	20	50	80
11	75	75	20	100	100

Grado adquisición de cada nivel por estudiante.

	Promedio			
Parejas de estudiantes	Nivel 2	Gr(2)	Nivel 3	Gr(3)
1	50	I	42,5	I
2	50	I	40,6	I
3	50	I	67,5	A
4	80	C	42,5	I
5	50	I	57,5	I
6	80	C	43,8	I
7	80	C	42,5	I
8	20	B	37,5	B
9	20	B	27,5	B
10	80	C	27,5	B
11	100	C	67,5	A

Anexo 7

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN FINAL

Distribución de tipos de respuesta por estudiante

	Nivel 2		Nivel 3	
Estudiantes	**3**	**4**	**7**	**8**
1	2	6	5	4
2	6	3	3	6
3	2	3	4	3
4	2	6	1	4
5	7	6	3	4
6	6	3	2	3
7	6	3	5	3
8	4	3	1	6
9	1	6	3	4
10	4	3	2	2
11	6	6	2	6
12	2	6	3	3
13	5	3	4	1
14	7	3	2	3
15	2	4	4	6
16	7	7	6	4
17	4	3	4	3
18	4	6	2	3
19	6	6	3	4
20	6	7	4	4
21	3	3	7	4

22	5	3	4	3

Distribución de grados de adquisición de razonamiento nivel 2

	Ítem de respuesta cerrada						**Ítem de respuesta abierta**				**Total**	
Estudiantes	**1**	**2**	**5**	**6**	$\bar{X}_1$	$0,4*\bar{X}_1$	**3**	**4**	$\bar{X}_2$	$0,6*\bar{X}_2$	$\bar{X}$	**Gr(2)**
1	30	100	80	100	77,5	31	20	80	50	30	61	**A**
2	60	100	80	80	80	32	80	25	52,5	31,5	63,5	**A**
3	80	100	100	100	95	38	20	25	22,5	13,5	51,5	**I**
4	60	100	100	80	85	34	20	80	50	30	50	**I**
5	30	100	30	80	60	24	100	80	90	54	78	**A**
6	60	100	30	80	67,5	27	80	25	52,5	31,5	58,5	**I**
7	30	100	100	100	82,5	33	80	25	52,5	31,5	64,5	**A**
8	30	100	100	80	77,5	31	50	25	37,5	22,5	53,5	**I**
9	80	100	80	100	90	36	0	80	40	24	60	**A**
10	80	100	100	100	95	38	50	25	37,5	22,5	60,5	**A**
11	30	100	100	100	82,5	33	80	80	80	48	81	**C**
12	60	100	80	100	85	34	20	80	50	30	64	**A**
13	60	100	100	100	90	36	75	25	50	30	66	**A**
14	100	100	100	80	95	38	100	25	62,5	37,5	75,5	**A**
15	30	100	80	80	72,5	29	20	50	35	21	50	**I**
16	100	100	80	80	90	36	100	100	100	60	96	**C**
17	80	100	60	100	85	34	50	25	37,5	22,5	56,5	**I**
18	60	100	80	80	80	32	50	80	65	39	71	**A**
19	80	100	80	100	90	36	80	80	80	48	84	**C**
20	80	100	80	80	85	34	80	100	90	54	88	**C**
21	100	100	80	80	90	36	25	25	25	15	51	**I**
22	80	30	100	100	77,5	31	75	25	50	30	61	**A**

Distribución de grados de adquisición de razonamiento nivel 3

	Ítem de nivel 3			
Estudiantes	**7**	**8**	$\overline{X}$	**Gr(3)**
1	75	50	62,5	**A**
2	25	80	52,5	**I**
3	50	25	37,5	**B**
4	0	50	25	**B**
5	25	50	37,5	**B**
6	20	25	22,5	**B**
7	75	25	50	**I**
8	0	80	40	**I**
9	25	50	37,5	**B**
10	20	20	20	**B**
11	20	80	50	**I**
12	25	25	25	**B**
13	50	0	25	**B**
14	20	25	22,5	**B**
15	50	80	65	**A**
16	80	50	65	**A**
17	50	25	37,5	**B**
18	20	25	22,5	**B**
19	25	50	37,5	**B**
20	50	50	50	**I**
21	100	50	75	**A**
22	50	25	37,5	**B**