Taller #6
Regresión Múltiple
Econometría 06169

Julio César Alonso

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 31 de agosto.

INSTRUCCIONES:

- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

Usted ha sido contratado para estimar la función de Costos de una industria competitiva. Considere la siguiente función de costos totales donde CT_i representa el costo total para la empresa i medido en millones de pesos y Y_i representa el nivel de producción de la empresa i medido en miles de unidades.

$$CT_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 Y_i^2 + \beta_4 Y_i^3 + \mu_i \qquad (1)$$

Usted dispone de una base de datos de 30 empresas en el archivo “T6-02-04.xls”.

1. Estime la función de costos especificada en (1).
2. Grafique, a partir de la función estimada, las siguientes funciones:
    a. la función de costo total
    b. la función de costo marginal,
    c. la función de costos medios y
    d. la función de costos variables medios.
3. Responda:
    a. Analice la significancia individual y conjunta de los coeficientes estimados.
    b. Interprete los coeficientes estimados.
4. Continuando con la pregunta anterior,
    a. ¿Para qué nivel de producción y nivel de precio salen las firmas de la industria? Interprete.
    b. Un analista de este mercado afirma que el nivel de producción al que cerrará la firma es 4 mil unidades. ¿Es esta afirmación del analista correcta?

El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos, Y_t, tengan un comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico: $Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$, donde X_{1t} representa el número de reclamos en el día t, X_{2t} representa el número de ofertas en el día t y X_{3t} representa el número de anuncios en el periódico en el día t. ε_t representa una variable estocástica que esta normalmente e independientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido 203 observaciones y han efectuado los siguientes cálculos:

$$Y^T Y = 25925 \qquad Y^T X = (650\ \ 1700\ \ 2850) \qquad X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 200 & 500 & 800 \\ 300 & 800 & 1400 \end{pmatrix}$$

5. A partir de esta información, encuentre (No emplee calculadora):
    a. Los valores estimados para el vector de parámetros β y s^2.
    b. Interprete el Significado de los Coeficientes estimados
6. ¿Son β_1, β_2 y β_3 significativos conjuntamente? Explique las implicaciones de su respuesta.

Taller #6
Respuestas Sugeridas
Regresión Múltiple
Econometría 06169

Julio César Alonso

Notas:
- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del próximo 31 de agosto.

INSTRUCCIONES:
- Este taller debe ser escrito en computador y entregado en papel.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

Usted ha sido contratado para estimar la función de Costos de una industria competitiva. Considere la siguiente función de costos totales donde CT_i representa el costo total para la empresa i medido en millones de pesos y Y_i representa el nivel de producción de la empresa i medido en miles de unidades.

$$CT_i = \beta_1 + \beta_2 Y_i + \beta_3 Y_i^2 + \beta_4 Y_i^3 + \mu_i \qquad (1)$$

Usted dispone de una base de datos de 30 empresas en el archivo "T6-02-04.xls".

1. Estime la función de costos especificada en (1).

La estimación de la ecuación (1) se reporta en la Tabla 1.

Tabla 1: Estimación Función de Costos (1)

	VARIABLE DEPENDIENTE: *CTi* Estadísticos t entre paréntesis
	Ecuación 1 MCO
Constante	185,5305 (11,35) ***
Y_i	22,5481 (2,27) **
$(Y^2)_i$	-3,3403 (-1,86) *
$(Y^3)_i$	0,6337 (6,37) ***
R^2	0,9982
R^2 Ajustado	0,9980
F	4.849,59 ***
# de Obs.	30

(*) nivel de significancia: 10%
(**) nivel de significancia: 5%
(***) nivel de significancia: 1%
MCO: Mínimos Cuadrados Ordinarios

2. Grafique, a partir de la función estimada, las siguientes funciones:
   a. la función de costo total

Para el gráfico de la función de costo total se puede emplear la función estimada que es:

$$\hat{C}T_i = 185.5305 + 22.5481 \cdot Y - 3.3403 \cdot Y^2 + 0.6337 \cdot Y^3$$

Reemplazando los diferentes niveles de producción se obtiene el siguiente gráfico:

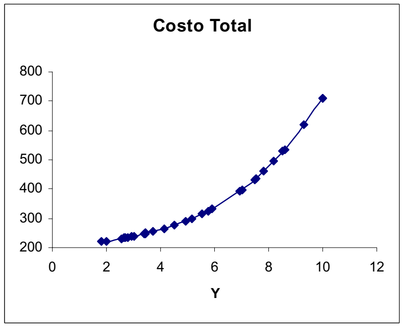


Gráfico 1: Función de Costo Total estimada.

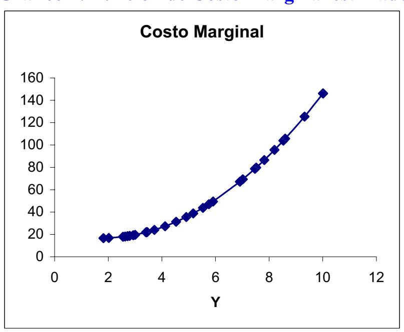
b. la función de costo marginal,

Para realizar el gráfico del costo marginal se debe derivar la función de costo total estimada respecto a Y. De este modo:

$$CMg_i = \frac{\partial CT_i}{\partial Y_i} = 22.5481 - (3.3403 \times 2)Y_i + (0.6337 \times 3)Y_i^2$$

Reemplazando los valores de la producción se obtiene el gráfico de costo marginal.

Gráfico 2: Función de Costo Marginal estimado.



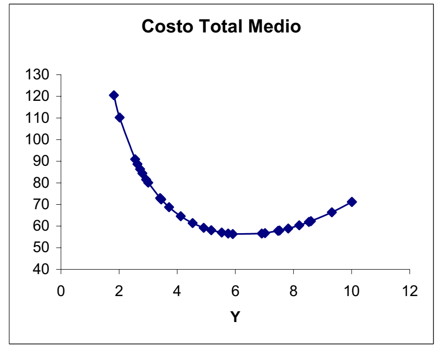
c. la función de costos medios y

El costo total medio se obtiene dividiendo la función de costo total estimada por el nivel de producción:

$$CMe_i = \frac{CT_i}{Y_i} = \frac{185.5305}{Y_i} + 22.5481 - 3.3403 \cdot Y_i + 0.6337 \cdot Y_i^2$$

Por lo tanto, el gráfico de costo medio que se obtiene es:

Gráfico 3: Función de Costo Total Medio estimado.



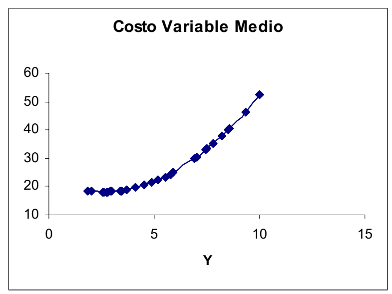
d. la función de costos variables medios.

Finalmente, el costo variable medio se obtiene dividiendo la parte variable del costo total por el nivel de producción:

$$CVMe_i = \frac{CV_i}{Y_i} = \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 Y_i + \hat{\beta}_4 Y_i^2$$

$$CVMe_i = 22.5481 - 3.3403 \cdot Y_i + 0.6337 \cdot Y_i^2$$

Gráfico 4: Función de Costo Variable Medio estimado.



3. Responda:
   a. Analice la significancia individual y conjunta de los coeficientes estimados.

Se observa que tanto el intercepto como el coeficiente asociado a la variable Y_i^3 son significativos individualmente a un nivel del 1%. El coeficiente asociado a Y_i es significativo al 5% y el coeficiente asociado a la variable Y_i^2 es significativo al 10%. Conjuntamente, el estadístico F es igual a 4849.59, el cual permite rechazar la hipótesis nula de que todos los coeficientes son conjuntamente iguales a cero.

b. Interprete los coeficientes estimados.

Para la interpretación de los coeficientes es necesario derivar la función de costo total con respecto al nivel de producción. De este modo:

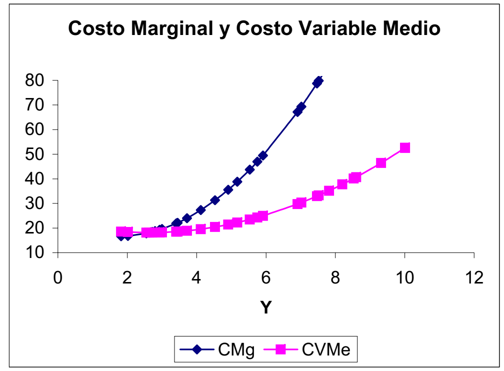
$$\frac{\partial CT_i}{\partial Y_i} = \hat{\beta}_2 + 2\hat{\beta}_3 Y_i + 3\hat{\beta}_4 Y_i^2$$

En este caso, $\hat{\beta}_2$ representa el costo marginal que no depende del nivel de producción mientras que $\hat{\beta}_3$ y $\hat{\beta}_4$ recogen los cambios en el costo marginal de acuerdo al nivel de producción en el que se encuentre. Adicionalmente, $\hat{\beta}_1$ representa el costo fijo (185.5 miles de pesos)

4. Continuando con la pregunta anterior,
   a. ¿Para qué nivel de producción y nivel de precio cierran las firmas de la industria? Interprete.

En una industria competitiva, la curva de oferta de una empresa está determinada por el tramo de la curva de costo marginal que se encuentra por encima de los costos variables medios. Por lo tanto, las empresas salen cuando sus ingresos no logran cubrir los costos variables medios. Adicionalmente, los beneficios obtenidos por las empresas no son positivos hasta que no se logre un nivel de producción en el que el costo medio supere el costo marginal. De acuerdo con lo anterior, se debe analizar los costos marginales y los costos variables medios para determinar a qué nivel de producción se igualan aproximadamente las dos variables. Con los datos obtenidos a partir de la estimación de los gráficos se observa que el punto mínimo de la función de costo variable medio se obtiene en el intervalo (18.146, 18.151), es decir, al nivel de producción (2.63, 2.72). Para este nivel de producción, se igualan aproximadamente el costo marginal y el costo variable medio. Para determinar el precio, dado que se trata de una industria competitiva, este es igual al costo marginal. Por lo tanto el precio de cierre se encuentra en el intervalo (18.13, 18.44). Lo anterior se observa gráficamente:

Gráfico 5: Punto de cierre de las empresas.



Para determinar el nivel de producción y el precio de cierre más exactamente se debe igualar el costo marginal con el costo variable medio. Al igual esto, se despeja Y_i y se reemplaza en la ecuación de costo marginal para obtener el precio:

$$CMg_i = \beta_2 + 2\beta_3 Y_i + 3\beta_4 Y_i^2$$
$$CVMe_i = \beta_2 + \beta_3 Y_i + \beta_4 Y_i^2$$

Igualando y despejando:

$$\beta_2 + 2\beta_3 Y_i + 3\beta_4 Y_i^2 = \beta_2 + \beta_3 Y_i + \beta_4 Y_i^2$$
$$\beta_3 Y_i + 2\beta_4 Y_i^2 = 0$$
$$Y_i(\beta_3 + 2\beta_4 Y_i) = 0$$
$$Y_i = \frac{-\beta_3}{2\beta_4}$$

Finalmente se reemplazan los valores estimados para obtener el nivel de producción al cual se cierran las firmas:

$$Y_{CIERRE} = \frac{-(-3.3403)}{2(0.6337)} = 2.636$$

Para determinar el precio, se reemplaza el valor de Y obtenido anteriormente en la ecuación de costo marginal (dado que para una industria competitiva $CMg = P$):

$$CMg = P_{CIERRE} = 22.5481 + (2 \times -3.3403 \times 2.636) + (3 \times 0.6337 \times 2.636^2)$$

$$P_{CIERRE} = 18.146$$

b. Un analista de este mercado afirma que el nivel de producción al que cerrará la firma es 4 mil unidades. ¿Es esta afirmación del analista correcta?

Noten que comprobar esta afirmación es equivalente a comprobar la siguiente hipótesis nula: $H_0 : Y_i = \frac{-\beta_3}{2\beta_4} = 4$. Esta hipótesis es equivalente a probar que:

$$H_0 : -\beta_3 = 8\beta_4$$

$$H_0 : \beta_3 + 8\beta_4 = 0 \qquad (1)$$

Esta hipótesis se puede reescribir de laforma $R\beta = C$, donde:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix},\ \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Esta hipótesis se puede provar por medio de una prueba de Wald. En este caso el estadístico W es igual a 2.91. Los valores críticos al 10% y 5% de significancia son 2.71 y 3.84 respectivamente. Por lo tanto, la hipótesis nula se puede rechazar al 10% de significancia. Lo anterior indica que 4 mil unidades no es el nivel de producción al que cerrará la firma.

El jefe de la división de planeación del departamento de mercadeo de una cadena de almacenes espera que las ventas diarias en millones de pesos, Y_t, tengan un comportamiento descrito por el siguiente modelo estadístico: $Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 \cdot X_{2t} + \beta_3 \cdot X_{3t} + \varepsilon_t$, donde X_{1t} representa el número de reclamos en el día t, X_{2t} representa el número de ofertas en el día t y X_{3t} representa el número de anuncios en el periódico en el día t. ε_t representa una variable estocástica que esta normalmente e independientemente distribuida con media cero y varianza constante.

Los economistas de la división de planeación ya han recogido 203 observaciones y han efectuado los siguientes cálculos:

$$Y^T Y = 25925 \qquad Y^T X = \begin{pmatrix} 650 & 1700 & 2850 \end{pmatrix} \qquad X^T \cdot X = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 200 & 500 & 800 \\ 300 & 800 & 1400 \end{pmatrix}$$

5. A partir de esta información, encuentre (No emplee calculadora):
   a. Los valores estimados para el vector de parámetros β y s^2.

Sabemos que $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$. Así,

$$\beta hat = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 \\ 200 & 500 & 800 \\ 300 & 800 & 1400 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 650 \\ 1700 \\ 2850 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$s^2 = \frac{y^T y - \beta hat \cdot X^T y}{n - k} = \frac{25925 - \left[\left(-\frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{1}{2}\right) \cdot (650 \quad 1700 \quad 2850)^T\right]}{203 - 3} = \frac{20000}{200}$$

$$s^2 = 100$$

b. Interprete el Significado de los Coeficientes estimados

$\beta hat_1 = -\frac{1}{2}$; un reclamo adicional en el dia t provocará una disminución de 500.000 pesos en las ventas,

$\beta hat_2 = 2$; una oferta adicional en el día t implicará un aumento de 2 millones de pesos en las ventas

$\beta hat_3 = 1$; un anuncios adicional en el periodico en el dia t aumentará las ventas en un millón de pesos.

6. ¿Son β_1, β_2 y β_3 significativos conjuntamente? Explique las implicaciones de su respuesta.

Entonces queremos probar la siguiente hipótesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$. Como vimos en clase, esta hipótesis la podemos reescribir en la forma $R \cdot \beta = C$. En este caso a martriz R tendrá dimensiones 3x3. En este caso tenemos $R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Así el F calculado está dado por:

$$F_{\beta_0} = \frac{\dfrac{((C - R \cdot \beta hat))^T \cdot \left[R \cdot \left((X)^T \cdot X\right)^{-1} \cdot R^T\right]^{-1} \cdot (C - R \cdot \beta hat)}{r}}{s^2}$$

donde r=1,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$\left(X^{T}X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{50} & -\frac{1}{25} & \frac{1}{100}\\ -\frac{1}{25} & \frac{1}{20} & -\frac{1}{50}\\ \frac{1}{100} & -\frac{1}{50} & \frac{1}{100}\end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que:

$$F_c=\frac{\dfrac{\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\2\\1\end{pmatrix}\right]^{T}\cdot\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{3}{200}&-\frac{1}{100}&\frac{1}{400}\\-\frac{1}{100}&\frac{1}{80}&-\frac{1}{200}\\\frac{1}{400}&-\frac{1}{200}&\frac{1}{400}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{T}\right]^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]}{3}}{100}$$

$$F_c=\frac{\dfrac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}100&200&300\\200&500&800\\300&800&1400\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\\-1\end{pmatrix}}{3}}{100}$$

$$F_c=(19.75)$$

Este F_c lo tenemos que comparar con el $F_{0.05,(3,250)}=2.642$. Claramente el $F_{calculado}$ es mayor que el F de la tabla y por tanto hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de que todos los coeficientes son conjuntamente iguales a cero. Lo que indica que las dos variables y el intercepto son significativos para explicar el modelo