Taller #1
Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso

Notas:

- Recuerde que sólo dos preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado en los primeros 10 minutos de la clase del 26 de Enero. Será el único taller para el cual tendrán más de una semana para elaborarlo.

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser entregado a mano pero con letra legible y buena presentación.
- Debe mostrar todo el procedimiento, no se dará crédito por respuestas sin procedimiento.

1. Un dado y una moneda son lanzados, por un voluntario, al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada, simultáneamente se registra si está lloviendo o no (según el IDEAM existe una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de que llueva). Para volver más interesante el juego, se ofrece al voluntario la siguiente tabla de premios

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	5
Sello	10

Si	Remuneración (miles de pesos)
está Lloviendo	8
No está lloviendo	10

Sea X, Y y Z los ingresos recibidos por el voluntario por el resultado del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.
b. Calcule la varianza de X, Y y Z.
c. Sea $W = X + Y$, calcule: $Var[W]$, $Cov[W, Z]$
d. Sea $Q = ZY$, calcule: $Var[Q]$.

2. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:

a. ¿Son W^2 y W independientes?

b. ¿Son Q y W independientes?

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre:

a) AB y CB
b) $tr(A)$ y $ran(A)$
c) $A^T A$ y $B^T B$
d) A^{-1} y $\left[B^T B\right]^{-1}$

4. Un investigador es contratado para estimar la curva de Engel para las ventas de libros en la Ciudad de Cali. Para esto se cuenta con una encuesta, la cual recogió información sobre el número de libros que demandaba el individuo i (Q_i) dado el posible precio p_i (medido en pesos) y el ingreso del individuo i (I_i) (medido en miles de pesos). Para esto el investigador emplea la siguiente función de demanda:

$$Q_i = \gamma_1 + \gamma_2 p_i + \gamma_3 \frac{1}{I_i} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

Además se cuenta con la siguiente información:

$$X^T X = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 0 & 100 & 200 \end{bmatrix} \qquad y^T X = \begin{bmatrix} 200 & 100 & 100 \end{bmatrix} \qquad y^T y = 2167$$

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas encuestas de realizaron? ¿Cuál es el número promedio de libros demandados por individuo (en la muestra)?
b) Encuentre el valor estimado de γ_1, γ_2, γ_3 y σ^2.
c) Interprete el significado de los valores estimados de γ_1, γ_2 y γ_3. (Demuestre que su interpretación es correcta)

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:

a) Bosqueje la Curva de Engel de acuerdo a los resultados obtenido anteriormente.
b) Si se espera que los próximos años sean de un fuerte crecimiento económico en la ciudad, ¿qué espera que ocurra en el sector?

6. Continuando con el ejercicio anterior, responda las siguientes preguntas:

a) ¿Tiene el ingreso un efecto real sobre la venta de libros? (Haga todas las pruebas estadísticas pertinentes)
b) Construya la tabla ANOVA.
c) ¿Son todas las variables conjuntamente significativas?
d) ¿Qué tan bueno es el modelo estimado? (Comente y haga los cálculos necesarios)

Taller #1

Respuestas Sugeridas
Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso
Monitor: Natalia Angulo

1. Un dado y una moneda son lanzados, por un voluntario, al mismo tiempo sobre una mesa con superficie nivelada, simultáneamente se registra si está lloviendo o no (según el IDEAM existe una probabilidad de $\frac{1}{4}$ de que llueva). Para volver más interesante el juego, se ofrece al voluntario la siguiente tabla de premios

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	2
2	5
3	8
4	11
5	14
6	17

Si Cara Superior de la moneda es	Remuneración (miles de pesos)
Cara	5
Sello	10

Si	Remuneración (miles de pesos)
está Lloviendo	8
No está lloviendo	10

Sea X, Y y Z los ingresos recibidos por el voluntario por el resultado del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente.

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z.

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, tenemos que:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i*P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{19}{2}=9.5$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}Y_i*P(Y_i)=\frac{15}{2}=7.5$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n}Z_i*P(Z_i)=\frac{19}{2}=9.5$$

Así, se espera que el voluntario reciba en promedio 9500, 7500 y 9500 pesos por concepto del dado, la moneda y el estado del clima, respectivamente

b. Calcule la varianza de X, Y y Z.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var\left[A\right]=E\left[A^2\right]-\left[E\left[A\right]\right]^2$, tenemos que:

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{233}{2}-\frac{361}{4}=\frac{105}{4}$$

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{125}{2}-\frac{225}{4}=\frac{25}{4}$$

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=91-\frac{361}{4}=\frac{3}{4}$$

c. Sea $W=X+Y$, calcule: $Var\left[W\right]$, $Cov\left[W,Z\right]$

Empleando las propiedades de la varianza y el hecho de que X y Y son estadísticamente independientes[1], entonces tenemos:

$$Var\left[W\right]=Var[X+Y]=Var(X)+Var(Y)=\frac{105}{4}+\frac{25}{4}=\frac{65}{2}=32.5$$

Para hallar la $Cov\left[W,Z\right]$, se debe tener en cuenta que W y Z son variables independientes, dado que lo que ocurra con las variables X y Y es independiente del clima (Z), por lo tanto:

$$Cov\left[W,Z\right]=E(WZ)-E(W)E(Z)=0$$

d. Sea $Q=ZY$, calcule: $Var\left[Q\right]$.

Siguiendo la definición de varianza de una variable aleatoria discreta A y el hecho de que $Var\left[A\right]=E\left[A^2\right]-\left[E\left[A\right]\right]^2$, tenemos que:

$$Var(Q)=E(Q^2)-(E(Q))^2=\frac{11375}{2}-\left[\frac{285}{4}\right]^2=\frac{11375}{2}-\frac{81225}{16}=\frac{9775}{16}$$

2. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:

a. ¿Son W^2 y W independientes?

W^2 y W son independientes si y sólo si $E(W^2W)=E(W^2)*E(W)$. Así, debemos probar si esto es cierto. Primero calculemos el lado izquierdo, es decir:

$$E(W^2W)=E(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3)$$

$$E(W^2W)=E(X^3)+3E(X^2)*E(Y)+3E(X)*E(Y^2)+E(Y^3)$$

$$E(W^2W)=\frac{13141}{2}$$

Ahora veamos a que es igual el lado derecho:

$$E(W^2)*E(W)=E\left[\left(X+Y\right)^2\right]*E(X+Y)$$

$$E(W^2)*E(W)=\left[E(X^2)+2E(X)*E(Y)+E(Y^2)\right]*\left[E(X)+E(Y)\right]$$

[1] Es muy fácil demostrar esto, pero intuitivamente es fácil argumentar que el resultado de un dado no depende para nada del resultado de una moneda.

$$E(W^2)*E(W)=\frac{643}{2}*17=\frac{10931}{2}$$

Por lo tanto, $E(W^2W)\neq E(W^2)*E(W)$ y se concluye que W^2 y W no son independientes.

b. ¿Son Q y W independientes?

Similarmente, Q y W son independientes si y solamente si $E(QW)=E(Q)*E(W)$. Consideremos inicialmente el lado izquierdo, es decir

$$E(QW)=E\left[Q\left(X+Y\right)\right]=E(QX)+E(QY)$$

$$E(QW)=\frac{5415}{8}+\frac{4725}{8}=\frac{2535}{2}$$

Ahora el lado derecho:

$$E(Q)*E(W)=\frac{285}{4}*17=\frac{4845}{4}$$

De esta forma se puede notar que $E(QW)\neq E(Q)*E(W)$ y por lo tanto Q y W no son independientes.

3. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&2&3\\1&0&8\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2\\6\\10\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}4&8&2\end{bmatrix}$$

Encuentre:

a) AB y BC

Es fácil mostrar que:

$$AB=\begin{bmatrix}86\\42\\82\end{bmatrix}\qquad BC=\begin{bmatrix}8&16&4\\24&48&12\\40&80&20\end{bmatrix}$$

b) $tr(A)$ y $ran\left(A\right)$

Es facil demostrar que:

- $tr(A)=1+2+8=11$
- $ran\left(A\right)=3$, pues el $ran\left(A\right)$ es igual al número de valores propios diferentes de cero (para una matriz cuadrada de dimensiones nxn, existen n valores propios). Además $|A|\neq 0$, es decir que A tiene rango completo, es decir $ran\left(A\right)=3$.

c) A^TA y B^TB

$$A^TA=\begin{bmatrix}2&4&14\\4&20&30\\14&30&109\end{bmatrix}\qquad B^TB=\left[140\right]$$

d) A^{-1} y $\left[B^TB\right]^{-1}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0.1875&\frac{1}{8}&-0.1875\\-\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\qquad \left[B^TB\right]^{-1}=\left[\frac{1}{140}\right]$$

4. Un investigador es contratado para estimar la curva de Engel para las ventas de libros en la Ciudad de Cali. Para esto se cuenta con una encuesta, la cual recogió información sobre el número de libros que demandaba el individuo i (Q_i) dado el posible precio p_i (medido en pesos) y el ingreso del individuo i (I_i) (medido en miles de pesos). Para esto el investigador emplea la siguiente función de demanda:

$$Q_i=\gamma_1+\gamma_2p_i+\gamma_3\frac{1}{I_i}+\varepsilon_i \qquad (1)$$

Además se cuenta con la siguiente información:

$$X^TX=\begin{bmatrix}200&0&0\\0&300&100\\0&100&200\end{bmatrix}\qquad y^TX=\begin{bmatrix}200&100&100\end{bmatrix}\qquad y^Ty=2167$$

Responda las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas encuestas de realizaron? ¿Cuál es el número promedio de libros demandados por individuo (en la muestra)?

Recuerden que:

$$X^TX=\begin{bmatrix}n&\sum_{i=1}^n X_{1i}&\sum_{i=1}^n X_{2i}&\cdots&\sum_{i=1}^n X_{ki}\\ &\sum_{i=1}^n X_{1i}^2&\sum_{i=1}^n X_{1i}X_{2i}&\cdots&\sum_{i=1}^n X_{1i}X_{ki}\\ &&\sum_{i=1}^n X_{2i}^2&\ddots&\sum_{i=1}^n X_{2i}X_{ki}\\ &&&\ddots&\vdots\\ &&&&\sum_{i=1}^n X_{ki}^2\end{bmatrix}$$

Así, dado que el primer término de la matriz X^TX, representa el tamaño de la muestra, se concluye que se realizaron 200 encuestas.

Además, recuerde que:

$$X^T y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{2i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_i X_{ki} \end{bmatrix}$$

Por tanto, el número promedio de libros es igual a la sumatoria de las cantidades demandadas dividido el tamaño de la muestra, es decir: $\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{200}{200} = 1$

b) Encuentre el valor estimado de γ_1, γ_2, γ_3 y σ^2.

Recuerden que $\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y$ $s^2 = \frac{SSE}{n-k} = \frac{y^T y - \hat{\beta}^T X^T y}{n-k}$. Antes de continuar, es importante anotar que $X^T Y = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$.

Existen varias formas de encontrar los valores estimados de los coeficientes, una posibilidad es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 200 & 0 & 0 & 200 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & 100 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 100 & 200 & 100 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/200 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 & 100 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 100 & 200 & 100 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/200 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 0 & 1/250 & -1/500 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 0 & -1/500 & 3/500 \end{array}\right]$$

Así tenemos que:

$$(X^T X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{250} & -\frac{1}{500} \\ 0 & -\frac{1}{500} & \frac{3}{500} \end{bmatrix} \text{ y } \hat{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

Para estimar σ^2 recuerden que:

$$s^2 = \frac{y^T y - \gamma^T X^T y}{n-k}$$

En este caso $y^T y = 1960$, por lo tanto

$$s^2 = \frac{2167 - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}}{200-3} = \frac{2167-260}{197} = \frac{1907}{197} = 9.68$$

Y la matriz de varianzas y covarianzas de los estimadores MCO es

$$s^2 * (X^T X)^{-1} = \frac{1907}{197} \bullet \begin{bmatrix} \frac{1}{200} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{250} & -\frac{1}{500} \\ 0 & -\frac{1}{500} & \frac{3}{500} \end{bmatrix}$$

c) Interprete el significado de los valores estimados de γ_1, γ_2 y γ_3. (Demuestre que su interpretación es correcta)

Para conocer el significado de γ_1, es más fácil reconocer que las unidades vendidas serán iguales a γ_1 si los precios son cero y el ingreso tiende a infinito. Así, realmente este coeficiente no tiene mucho sentido económico!!!

Para interpretar el significado de los demás coeficientes estimados, podemos derivar (1) con respecto a las variables independientes. Es decir:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} = \gamma_2 \qquad (2)$$

Así, γ_2 corresponde a las unidades en que cambiarán las unidades demandadas Q_i, dado un aumento de una unidad en p_i.

Por tanto $\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{5}$, implica que un aumento de un peso en el precio de los libros aumentará la demanda en .20 libros. Noten que este resultado es contraintuitivo y no corresponde a lo esperado por la teoría económica.

Para encontrar el significado de γ_3, será necesario derivar (1) con respecto a I_i. En otras palabras,

$$\frac{\partial Q_i}{\partial I_i} = -\gamma_3 \frac{1}{I_i^2} \tag{3}$$

$$\gamma_3 = -\frac{\partial Q_i}{\partial I_i / I_i^2} = -\frac{\partial Q_i}{\partial I_i / I_i^2}\frac{100}{100} = -100 I_i \frac{\partial Q_i}{\Delta\% I_i} \tag{4}$$

$$\frac{\partial Q_i}{\Delta\% I_i} = -\frac{\gamma_3}{100 I_i} \tag{5}$$

Así, un aumento del 1% en I_i provocará un cambio de $-\gamma_3/100 I_i$ unidades en las cantidades demandadas. Es decir el efecto de aumentar el ingreso no es constante y dependerá del nivel de ingresos.

Así, $\hat{\gamma}_3 = \frac{2}{5}$ implicará que un aumento del 1% en I_i provocará un cambio de $-0.04/100 I_i$ unidades en las cantidades demandadas Q_i. Es decir, existe una relación negativa y cambiante entre el ingreso y las unidades demandas de libros.

5. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:
    a) Bosqueje la Curva de Engel de acuerdo a los resultados obtenido anteriormente.

Antes de graficar la curva de Engel recuerden que la curva de Engel es una curva que relaciona las cantidades demandas de un bien Q_i y el nivel de ingresos I_i. Es decir, que en el eje horizontal tendremos el ingreso y en el vertical tendremos el ingreso.

Antes de graficar la curva de Engel es importante tener en cuenta dos aspectos. Primero, note que, cuando el ingreso es lo suficientemente grande, entonces las cantidades demandas tienden a $\gamma_1 + \gamma_2 p_i + \varepsilon_i$. Es decir, $\lim_{I_i \to \infty} Q_i = \gamma_1 + \gamma_2 p_i + \varepsilon_i$.

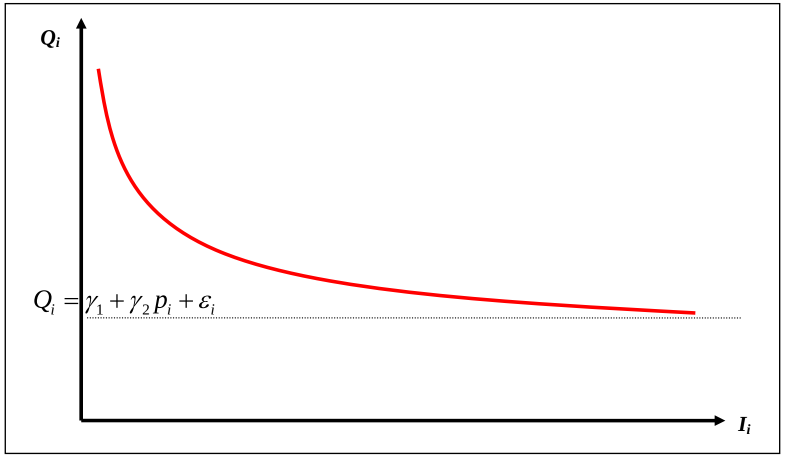
Segundo, debemos determinar la pendiente de la curva y su curvatura. De nuestros cálculos anteriores sabemos que el signo de la pendiente $\frac{\partial Q_i}{\partial I_i} = -\gamma_3 \frac{1}{I_i^2}$ dependerá del signo de γ_3 que en este caso es negativa pues $\hat{\gamma}_3 = \frac{2}{5} > 0$ y la curvatura de la curva de Engel dependerá

de la segunda derivada ($\frac{\partial^2 Q_i}{\partial I_i^2} = \gamma_3 \frac{1}{I_i^3}$). Así, la segunda derivada dependerá también del signo de γ_3 y en este caso esta segunda derivada es positiva.

En conclusión, dado que $\hat{\gamma}_3$ es positivo tendremos que:
- la pendiente de la curva de Engel será negativa (el bien será un bien inferior).
- Y la curva tiene una segunda derivada positiva

Es decir la curva de Engel tendrá que verse como en la Figura 1.

Figura 1. Curva de Engel con $\gamma_3 > 0$.



b) Si se espera que los próximos años sean de un fuerte crecimiento económico en la ciudad, ¿qué espera que ocurra en el sector?

Dada esta curva de Engel se espera que si los precios de los libros se mantienen constantes y en efecto $\hat{\gamma}_3$ es significativo y positivo, entonces la demanda de libros empezara a caer si el ingreso de la población caleña empezara a caer. Así se le debe recomendar al gremio alguna estrategia para mejorar esta situación. Entre las posibles estrategias tenemos por ejemplo:
- Aumentar los precios de los libros (pues de acuerdo a nuestro modelo a medida que aumenta el precio aumenta la demanda!!) aunque esta estrategia parece poco intuitiva. Así amerita mucho más estudio antes de adoptar este tipo de estrategia.
- Realizar una campaña publicitaria para cambiar los gustos de los consumidores caleñas.

6. Continuando con el ejercicio anterior, responda las siguientes preguntas:
   a) ¿Tiene el ingreso un efecto real sobre la venta de libros? (Haga todas las pruebas estadísticas pertinentes)

Para responder esta pregunta se debe probar la $H_0:\gamma_3=0$ versus la $H_A:\gamma_3\neq 0$, por lo tanto el estadístico relevante es

$$t_c=\frac{\hat{\beta}_i-c}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

En este caso tenemos que:

$$t_c=\frac{\frac{2}{5}-0}{\sqrt{\left(\frac{1907}{197}\right)\left(\frac{3}{500}\right)}}=0.166$$

Este t_c se compara con el de la tabla con n-k grados de libertad, en este caso $t_{\frac{0.01}{2},197}=2.601$. Note que $|t_c|$ es menor que el valor crítico, por lo tanto no se puede rechazar la hipótesis nula. Es decir, el ingreso no tiene un efecto real sobre la venta de libros a un nivel de confianza del 99%.

   b) Construya la tabla ANOVA.

La tabla ANOVA está dada por:

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	$SSR=\hat{\beta}^T X^T y-n\overline{Y}^2$	k-1	$\frac{SSR}{k-1}$
Error (Residuos)	$SSE=y^T y-\hat{\beta}^T X^T y$	n-k	$\frac{SSE}{n-k}$
Total	$y^T y-n\overline{y}^2$	n-1	

En este caso, k=3, n=200, $y^T y=1960$, $\gamma^T X^T y$ =260 y $\overline{y}=1$. Por lo tanto, la tabla Anova es:

Fuente de variación	SS	G de L	MS
Regresión	$SSR=260-200\bullet 1^2=60$	3-1=2	30
Error (Residuos)	$SSE=2167-260=1907$	200-3=197	$\frac{1907}{197}$
Total	$2167-200=1967$	200-1=199	

   c) ¿Son todas las variables conjuntamente significativas?

Se desea contrastar la hipótesis nula $H_0:\gamma_2=\gamma_3=0$ versus la hipótesis alterna no H_0, esto se puede realizar empleando la información de la tabla ANOVA. Así,

$$F_C=\frac{MSR}{MSE}=\frac{30}{\frac{1907}{197}}=\frac{5910}{1907}=3.099$$

Este $F_{calculado}$ se compara con el correspondiente F de la tabla, En este caso $F_{0.05,(2,197)}=3.042$ y $F_{0.01,(2,197)}=4.715$. De esta forma, como el $F_{calculado}>F_{0.05,(2,197)}$, entonces hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%, es decir, las variables son conjuntamente significativas. Pero con un nivel de confianza del 99%, tenemos que $F_{calculado}<F_{0.01,(2,197)}$ y por tanto no se puede rechazar la hipótesis nula a un nivel de significancia del 1%.

   d) ¿Qué tan bueno es el modelo estimado? (Comente y haga los cálculos necesarios)

Una forma de realizar esto es empleando el R^2. Sabemos que:

$$R^2=\frac{SSR}{SST}=\frac{60}{1700}=0.031.$$

Esto implica que el 3.1% de la variación de Q es explicada por el modelo, Este resultado unido a nuestra conclusión, con un nivel de significancia del 99% de la pregunta anterior, implican que el modelo no es el más adecuado. Así la mejor opción es replantear el modelo.